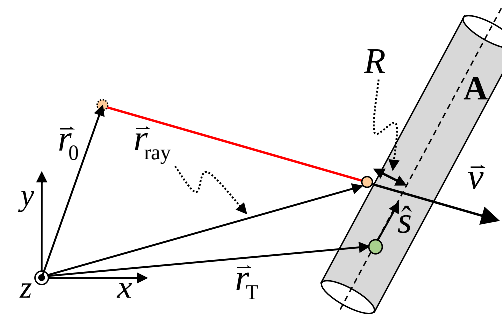
Chapitre 6.2c – L'intersection de géométrie complexe dans le *ray tracer*

L'intersection d'un rayon avec un tube infini



L'intersection d'un rayon avec un tube infini (un cylindre infini sans extrémité) de rayon R positionné à un point $\vec{r}_{\text{T}}$ et aligné selon l'axe $\hat{s}$ se calcul grâce à la résolution d'un polynôme du 2e degré en temps t

$$At^2 + Bt + C = 0$$

tel que $A = \vec{v}_{\text{A}} \cdot \vec{v}_{\text{A}}$, $B = 2\vec{r}_{\text{A0}} \cdot \vec{v}_{\text{A}}$ et $C = \vec{r}_{\text{A0}} \cdot \vec{r}_{\text{A0}} - R^2$

où $\vec{r}_{\text{A0}} = \hat{s} \times (\vec{r}_0 - \vec{r}_{\text{T}}) \times \hat{s}$ et $\vec{v}_{\text{A}} = (\hat{s} \times \vec{v} \times \hat{s})$

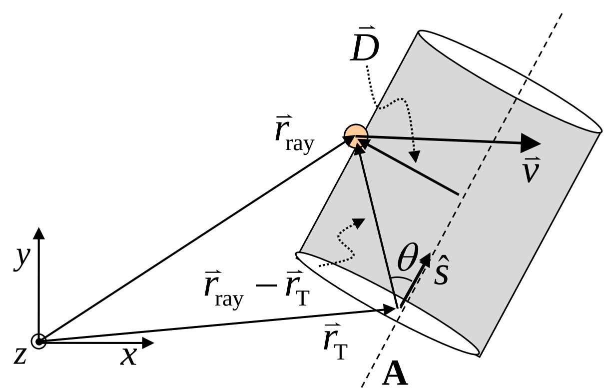
avec[1] $\vec{r}_0$: Origine du rayon (position d'émission du rayon).
$\vec{v}$: Orientation du rayon ($\|\vec{v}\| = 1$, vecteur unitaire).
$\vec{r}_{\text{T}}$: Position où passe le tube.
$\hat{s}$: L'axe du tube.
R : Rayon du tube.

Preuve :

En premier temps, il faut développer une expression nous permettant d'évaluer la distance D entre la position de l'intersection $\vec{r}_{\text{ray}}$ et l'axe de référence que forme le tube.

En utilisant le point $\vec{r}_{\text{T}}$ sur l'axe du tube et une projection à l'aide de la fonction trigonométrique sinus, nous obtenons

$$\|\vec{D}\| = \|\vec{r}_{\text{ray}} - \vec{r}_{\text{T}}\| \sin(\theta)$$



Cependant, évaluer l'angle θ sera difficile. Pour contourner cette réalité, nous utiliserons le produit vectoriel[2] avec l'axe du tube $\hat{s}$.

[1] La lettre **A** faite référence à l'axe du tube.
[2] Produit vectoriel : $\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\sin(\theta)\hat{n}$

Par la suite, on peut former le vecteur $\vec{D}$ de la façon suivante :

$\vec{D} = \hat{s}\times\left(\vec{r}_{\text{ray}} - \vec{r}_{\text{T}}\right)\times\hat{s}$	$\Rightarrow$	$\vec{D} = \hat{s}\times\left(\left(\vec{r}_0 + \vec{v}t\right) - \vec{r}_{\text{T}}\right)\times\hat{s}$	(Remplacer $\vec{r}_{\text{ray}} = \vec{r}_0 + \vec{v}t$)
	$\Rightarrow$	$\vec{D} = \hat{s}\times\left(\vec{r}_0 - \vec{r}_{\text{T}} + \vec{v}t\right)\times\hat{s}$	(Réécriture)
	$\Rightarrow$	$\vec{D} = \hat{s}\times\left(\vec{r}_0 - \vec{r}_{\text{T}}\right)\times\hat{s} + \hat{s}\times\vec{v}t\times\hat{s}$	(Distribution)
	$\Rightarrow$	$\vec{D} = \hat{s}\times\left(\vec{r}_0 - \vec{r}_{\text{T}}\right)\times\hat{s} + \left(\hat{s}\times\vec{v}\times\hat{s}\right)t$	(Factoriser *t*)
	$\Rightarrow$	$\vec{D} = \vec{r}_{\text{A0}} + \left(\hat{s}\times\vec{v}\times\hat{s}\right)t$	($\vec{r}_{\text{A0}} = \hat{s}\times\left(\vec{r}_0 - \vec{r}_{\text{T}}\right)\times\hat{s}$)
	$\Rightarrow$	$\boxed{\vec{D} = \vec{r}_{\text{A0}} + \vec{v}_{\text{A}}t}$	($\vec{v}_{\text{A}} = \left(\hat{s}\times\vec{v}\times\hat{s}\right)$)

En exploitant le calcul du produit scalaire[3], nous pouvons formuler un polynôme du 2e degré selon le temps *t* qui permettra d'identifier le moment de l'intersection *s'il y a lieu* selon l'expression de *D* :

$D = \left\|\vec{D}\right\|$	$\Rightarrow$	$D = \left\|\vec{r}_{\text{A0}} + \vec{v}_{\text{A}}t\right\|$	(Remplacer $\vec{D} = \vec{r}_{\text{A0}} + \vec{v}_{\text{A}}t$)
	$\Rightarrow$	$D^2 = \left\|\vec{r}_{\text{A0}} + \vec{v}_{\text{A}}t\right\|^2$	(Mettre au carré)
	$\Rightarrow$	$D^2 = \left(\vec{r}_{\text{A0}} + \vec{v}_{\text{A}}t\right)\cdot\left(\vec{r}_{\text{A0}} + \vec{v}_{\text{A}}t\right)$	(Propriété : $\left\|\vec{A}\right\|^2 = \vec{A}\cdot\vec{A}$)
	$\Rightarrow$	$D^2 = \vec{r}_{\text{A0}}\cdot\vec{r}_{\text{A0}} + 2\,\vec{r}_{\text{A0}}\cdot\vec{v}_{\text{A}}t + \vec{v}_{\text{A}}\cdot\vec{v}_{\text{A}}t^2$	(Distribution)
	$\Rightarrow$	$\boxed{\vec{v}_{\text{A}}\cdot\vec{v}_{\text{A}}t^2 + 2\,\vec{r}_{\text{A0}}\cdot\vec{v}_{\text{A}}t + \vec{r}_{\text{A0}}\cdot\vec{r}_{\text{A0}} - D^2 = 0}$	(Regrouper les termes)

À partir de notre expression permettant d'évaluer le temps *t* requis pour effectuer une intersection entre un rayon $\vec{r}_{\text{ray}}$ et une distance *D* à un axe, remplaçons la distance *D* d'un tube par la valeur *R* qui est constante et construisons notre polynôme du 2ième degré :

	$\vec{v}_{\text{A}}\cdot\vec{v}_{\text{A}}t^2 + 2\,\vec{r}_{\text{A0}}\cdot\vec{v}_{\text{A}}t + \vec{r}_{\text{A0}}\cdot\vec{r}_{\text{A0}} - D^2 = 0$	(Équation précédente)
$\Rightarrow$	$\vec{v}_{\text{A}}\cdot\vec{v}_{\text{A}}t^2 + 2\vec{r}_{\text{A0}}\cdot\vec{v}_{\text{A}}t + \vec{r}_{\text{A0}}\cdot\vec{r}_{\text{A0}} - \left(R\right)^2 = 0$	(Remplacer $D = R$)
$\Rightarrow$	$\left(\vec{v}_{\text{A}}\cdot\vec{v}_{\text{A}}\right)t^2 + \left(2\,\vec{r}_{\text{A0}}\cdot\vec{v}_{\text{A}}\right)t + \left(\vec{r}_{\text{A0}}\cdot\vec{r}_{\text{A0}} - R^2\right) = 0$	(Réorganiser les termes)
$\Rightarrow$	$At^2 + Bt + C = 0 \quad \blacksquare$	(Remplacer *A*, *B* et *C*)

[3] Produit scalaire : $\vec{A}\cdot\vec{B} = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos(\theta) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

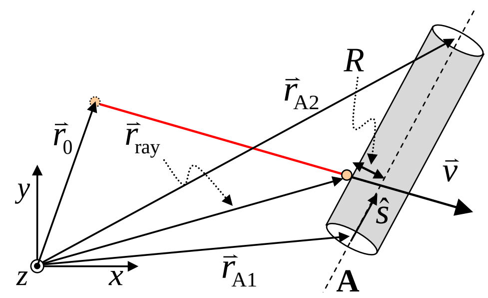
L'intersection d'un rayon avec un tube

L'intersection d'un rayon avec un tube de rayon R délimité par les deux points $\vec{r}_{A1}$ et $\vec{r}_{A2}$ se calcul grâce à la résolution d'un polynôme du 2[e] degré en temps t

$$At^2 + Bt + C = 0$$

tel que $A = \vec{v}_A \cdot \vec{v}_A$, $B = 2\vec{r}_{A0} \cdot \vec{v}_A$ et $C = \vec{r}_{A0} \cdot \vec{r}_{A0} - R^2$

où $\hat{s} = \dfrac{\vec{r}_{A2} - \vec{r}_{A1}}{\left|\vec{r}_{A2} - \vec{r}_{A1}\right|}$, $\vec{r}_{A0} = \hat{s} \times (\vec{r}_0 - \vec{r}_{A1}) \times \hat{s}$, $\vec{v}_A = (\hat{s} \times \vec{v} \times \hat{s})$



avec[4] $\vec{r}_0$: Origine du rayon (position d'émission du rayon).
$\vec{v}$: Orientation du rayon ($\|\vec{v}\| = 1$, vecteur unitaire).
$\vec{r}_{A1}$: Position de l'extrémité 1 du tube.
$\vec{r}_{A2}$: Position de l'extrémité 2 du tube.
R : Rayon du tube.

En plus de solutionner un temps t **réel** et **positif**, la position de l'intersection $\vec{r}_{ray}$ au temps t doit être située entre les deux extrémités $\vec{r}_{A1}$ et $\vec{r}_{A2}$ de l'axe ce qui correspond à satisfaire les deux contraintes

$$(\vec{r}_{ray} - \vec{r}_{A1}) \cdot \hat{s} > 0 \quad \text{et} \quad (\vec{r}_{ray} - \vec{r}_{A2}) \cdot \hat{s} < 0 \quad \text{avec} \quad \vec{r}_{ray} = \vec{r}_0 + \vec{v}\,t\,.$$

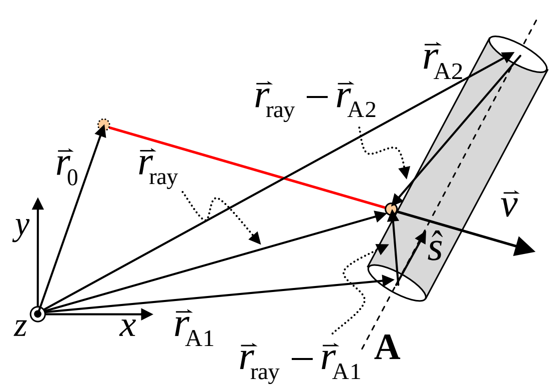
(côté intérieur à $\vec{r}_{A1}$) (côté intérieur à $\vec{r}_{A2}$)

<u>Preuve :</u>

À partir de la démonstration précédente, nous pouvons affirme que le temps d'intersection d'un tube est <u>un sous ensemble des solutions de l'intersection d'un tube infini</u>.

Pour satisfaire l'intersection entre les deux extrémités du tube $\vec{r}_{A1}$ et $\vec{r}_{A2}$, on peut construire les deux vecteurs

$$\vec{r}_{ray} - \vec{r}_{A1} \quad \text{et} \quad \vec{r}_{ray} - \vec{r}_{A2}\,.$$



Avec l'axe du tube $\hat{s}$ et le produit scalaire, une intersection $\vec{r}_{ray}$ sera à l'intérieur du tube par rapport à $\vec{r}_{A1}$ si

$$(\vec{r}_{ray} - \vec{r}_{A1}) \cdot \hat{s} > 0 \qquad \text{(même sens que } \hat{s}\text{)}$$

et sera à l'intérieur du tube par rapport à $\vec{r}_{A2}$ si

$$(\vec{r}_{ray} - \vec{r}_{A2}) \cdot \hat{s} < 0 \ . \qquad \text{(sens contraire à } \hat{s}\text{)} \ \blacksquare$$

[4] La lettre **A** faite référence à l'axe du tube.

L'intersection d'un rayon avec un cône

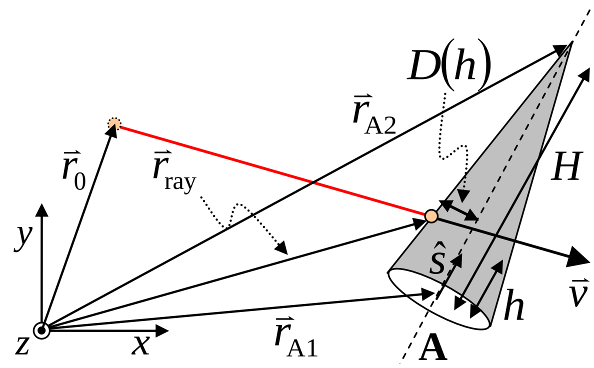
L'intersection d'un rayon avec un cône dont le centre de la base de rayon R est situé au point $\vec{r}_{A1}$ et la point du cône est situé au point $\vec{r}_{A2}$ se calcul grâce à la résolution d'un polynôme du 2e degré en temps t

$$At^2 + Bt + C = 0$$

tel que

$$A = \vec{v}_A \cdot \vec{v}_A - {v_s}^2 \frac{R^2}{H^2} \quad , \quad B = 2\vec{r}_{A0} \cdot \vec{v}_A + 2Wv_s \frac{R^2}{H^2}$$

$$\text{et} \qquad C = \vec{r}_{A0} \cdot \vec{r}_{A0} - W^2 \frac{R^2}{H^2}$$



$$\text{où} \quad \hat{s} = \frac{\vec{r}_{A2} - \vec{r}_{A1}}{\left|\vec{r}_{A2} - \vec{r}_{A1}\right|} \quad , \quad \vec{r}_{A0} = \hat{s} \times (\vec{r}_0 - \vec{r}_{A1}) \times \hat{s} \, , \quad \vec{v}_A = (\hat{s} \times \vec{v} \times \hat{s}) , \; h = (\vec{r}_{ray} - \vec{r}_{A1}) \cdot \hat{s} \, , \quad H = \left|\vec{r}_{A2} - \vec{r}_{A1}\right| \; ,$$

$$h_0 = (\vec{r}_0 - \vec{r}_{A1}) \cdot \hat{s} \, , \qquad v_s = \vec{v} \cdot \hat{s} \qquad \text{et} \qquad W = h_{max} - h_0$$

avec[5] $\vec{r}_0$: Origine du rayon (position d'émission du rayon).
$\vec{v}$: Orientation du rayon ($\|\vec{v}\| = 1$, vecteur unitaire).
$\vec{r}_{A1}$: Position centrale de la base du cône.
$\vec{r}_{A2}$: Position de la pointe du cône.
R : Rayon de la base du cône.

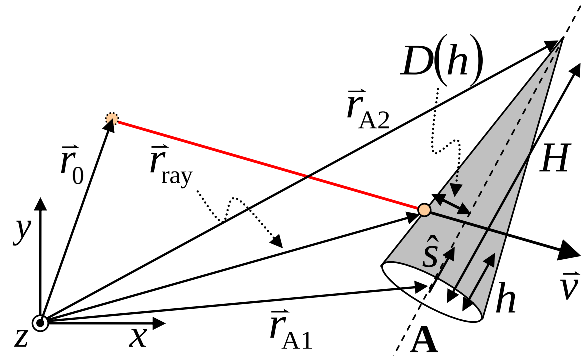
En plus de solutionner un temps t **réel** et **positif**, la position de l'intersection $\vec{r}_{ray}$ au temps t doit être située entre les deux extrémités $\vec{r}_{A1}$ et $\vec{r}_{A2}$ de l'axe ce qui correspond à satisfaire les deux contraintes

$$\underset{\text{(côté intérieur à } \vec{r}_{A1})}{(\vec{r}_{ray} - \vec{r}_{A1}) \cdot \hat{s} > 0} \qquad \text{et} \qquad \underset{\text{(côté intérieur à } \vec{r}_{A2})}{(\vec{r}_{ray} - \vec{r}_{A2}) \cdot \hat{s} < 0} \qquad \text{avec} \qquad \vec{r}_{ray} = \vec{r}_0 + \vec{v}\, t \, .$$

[5] La lettre **A** faite référence à l'axe du tube.

Preuve :

En premier temps, il faut définir la fonction D représentant la distance entre la position de l'intersection $\vec{r}_{\text{ray}}$ sur le cône et l'axe du cône. Puisque la distance débute avec une valeur R étant le rayon de la base du cône situé au point $\vec{r}_{\text{A1}}$ et que cette distance varie linéairement jusqu'à une valeur nulle à la point du cône au point $\vec{r}_{\text{A2}}$, l'équation D sera égale à l'expression suivante :



$$D = D(h) = \left(1 - \frac{h}{H}\right)R$$

où $h = (\vec{r}_{\text{ray}} - \vec{r}_{\text{A1}}) \cdot \hat{s}$: Distance parallèle à l'axe du cône entre le point $\vec{r}_{\text{A1}}$ et la position de l'intersection $\vec{r}_{\text{ray}}$.

$H = |\vec{r}_{\text{A2}} - \vec{r}_{\text{A1}}|$: La hauteur du cône.

Développons la fonction D afin d'évaluer une expression pour D^2 :

$$D = \left(1 - \frac{h}{H}\right)R \qquad \text{(Expression de } D\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad D = \left(1 - \frac{(\vec{r}_{\text{ray}} - \vec{r}_{\text{A1}}) \cdot \hat{s}}{H}\right)R \qquad (h = (\vec{r}_{\text{ray}} - \vec{r}_{\text{A1}}) \cdot \hat{s})$$

$$\Rightarrow \quad D = \left(1 - \frac{(\vec{r}_0 + \vec{v}t - \vec{r}_{\text{A1}}) \cdot \hat{s}}{H}\right)R \qquad (\vec{r}_{\text{ray}} = \vec{r}_0 + \vec{v}t)$$

$$\Rightarrow \quad D = \left(1 - \frac{(\vec{r}_0 - \vec{r}_{\text{A1}}) \cdot \hat{s} + \vec{v} \cdot \hat{s}\, t}{H}\right)R \qquad \text{(Réécriture)}$$

$$\Rightarrow \quad D = \left(1 - \frac{h_0 + \vec{v} \cdot \hat{s}\, t}{H}\right)R \qquad (h_0 = (\vec{r}_0 - \vec{r}_{\text{A1}}) \cdot \hat{s})$$

$$\Rightarrow \quad D = \left(1 - \frac{h_0 + v_s t}{H}\right)R \qquad (v_s = \vec{v} \cdot \hat{s})$$

$$\Rightarrow \quad D = (H - h_0 - v_s t)\frac{R}{H} \qquad \text{(Dénominateur commun)}$$

$$\Rightarrow \quad D = (W - v_s t)\frac{R}{H} \qquad (W = h_{\max} - h_0)$$

$$\Rightarrow \quad D^2 = (W - v_s t)^2 \frac{R^2}{H^2} \qquad \text{(Mettre au carré)}$$

$$\Rightarrow \quad D^2 = \left(W^2 - 2Wv_s t + v_s{}^2 t^2\right)\frac{R^2}{H^2} \qquad \text{(Calcul)}$$

À partir de l'expression

$$\vec{v}_{\mathrm{A}} \cdot \vec{v}_{\mathrm{A}} t^2 + 2\vec{r}_{\mathrm{A0}} \cdot \vec{v}_{\mathrm{A}} t + \vec{r}_{\mathrm{A0}} \cdot \vec{r}_{\mathrm{A0}} - D^2 = 0$$

développée précédemment pour évaluer l'intersection d'un rayon avec un tube infini, remplaçons D^2 dans l'expression afin de formuler notre polynôme du 2ième degré pour l'intersection avec le cône :

$$\vec{v}_{\mathrm{A}} \cdot \vec{v}_{\mathrm{A}} t^2 + 2\vec{r}_{\mathrm{A0}} \cdot \vec{v}_{\mathrm{A}} t + \vec{r}_{\mathrm{A0}} \cdot \vec{r}_{\mathrm{A0}} - D^2 = 0 \quad \text{(Expression)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_{\mathrm{A}} \cdot \vec{v}_{\mathrm{A}} t^2 + 2\vec{r}_{\mathrm{A0}} \cdot \vec{v}_{\mathrm{A}} t + \vec{r}_{\mathrm{A0}} \cdot \vec{r}_{\mathrm{A0}} - \left(\left(W^2 - 2Wv_s t + {v_s}^2 t^2 \right) \frac{R^2}{H^2} \right) = 0 \quad \text{(Remplacer } D\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\vec{v}_{\mathrm{A}} \cdot \vec{v}_{\mathrm{A}} - {v_s}^2 \frac{R^2}{H^2} \right) t^2 + \left(2\vec{r}_{\mathrm{A0}} \cdot \vec{v}_{\mathrm{A}} + 2Wv_s \frac{R^2}{H^2} \right) t + \left(\vec{r}_{\mathrm{A0}} \cdot \vec{r}_{\mathrm{A0}} - W^2 \frac{R^2}{H^2} \right) = 0 \quad \text{(Réorganisation)}$$

$$\Rightarrow \quad At^2 + Bt + C = 0 \quad \blacksquare \quad \text{(Rempl. } A, B \text{ et } C\text{)}$$

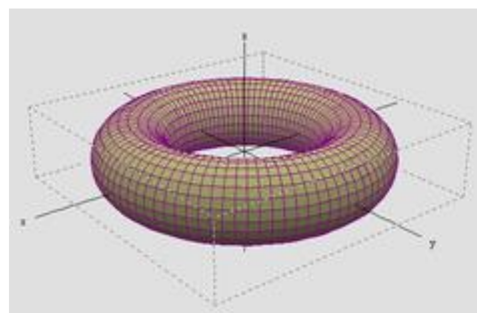
Pour s'assurer que l'intersection au temps t est située entre les deux extrémités $\vec{r}_{\mathrm{A1}}$ et $\vec{r}_{\mathrm{A2}}$ du cône, il faut utiliser la même démarche que pour le tube ce qui a déjà été démontré.

L'intersection d'un rayon avec un tore

Un tore est une forme géométrique qui a l'apparence d'un beignet. L'équation implicite d'un tore situé dans le plan xy et centré à l'origine est égale à l'expression

$$\left(x^2 + y^2 + z^2 + {R_{\mathrm{maj}}}^2 - {R_{\mathrm{min}}}^2 \right)^2 = 4{R_{\mathrm{maj}}}^2 \left(x^2 + y^2 \right)$$

où R_{maj} est la distance entre le centre du tore et le centre de la partir cylindrique du tore (*major radius*) et R_{min} est le rayon du cylindre appartenant au tore (*minor radius*).



https://fr.wikipedia.org/wiki/Tore
Un tore dans le plan xy centré à l'origine où $R_{\mathrm{maj}} = 3R_{\mathrm{min}}$

Pour réaliser l'intersection du tore avec un rayon $\vec{r}_{\mathrm{ray}}$, nous pouvons décrire nos concepts à l'aide des paramètres suivants :

- $\vec{r}_0$: Origine du rayon (position d'émission du rayon).
- $\vec{v}$: Orientation du rayon ($\|\vec{v}\| = 1$, vecteur unitaire).
- $\vec{r}_{\mathrm{T}}$: Position centrale du tore.
- $\vec{n}$: L'orientation de la normale au plan du tore.
- R_{max} : Rayon du tore .
- R_{min} : Rayon du cylindre du tore.

L'intersection d'un rayon avec un tore centré à la position $\vec{r}_{\mathrm{T}}$ dont l'axe de la normale au plan du tore est alignée selon $\vec{n}$ se calcul grâce à la résolution d'un polynôme du 4e degré en temps t

$$At^4 + Bt^3 + Ct^2 + Dt + E = 0$$

tel que

$$A = \delta_1^{\ 2} \qquad B = 2\delta_1\eta_2 \qquad C = \left(2\delta_1\,\beta_3 + \eta_2^{\ 2} - 4R_{\mathrm{maj}}^{\ \ 2}\gamma_1\right)$$

$$D = 2\eta_2\beta_3 - 4R_{\mathrm{maj}}^{\ \ 2}\mu_2 \qquad E = \beta_3^{\ 2} - 4R_{\mathrm{maj}}^{\ \ 2}\alpha_3$$

et avec les changements de variable suivant :

Changement de base avec $\vec{k}_{\mathrm{T}} \neq \vec{i}$ (sinon, on peut prendre $\vec{j}$ comme référence dans le calcul de $\vec{i}_{\mathrm{T}}$)		
$\vec{k}_{\mathrm{T}} = \dfrac{\vec{n}}{\lvert\vec{n}\rvert}$	$\vec{i}_{\mathrm{T}} = \dfrac{\vec{i} \times \vec{k}_{\mathrm{T}}}{\lvert\vec{i} \times \vec{k}_{\mathrm{T}}\rvert}$	$\vec{j}_{\mathrm{T}} = \vec{k}_{\mathrm{T}} \times \vec{i}_{\mathrm{T}}$ (pour avoir $\vec{i}_{\mathrm{T}} \times \vec{j}_{\mathrm{T}} = \vec{k}_{\mathrm{T}}$)

Projection des vecteurs dans la nouvelle base		
$r_{x\mathrm{T}} = \vec{r}_{\mathrm{T}} \cdot \vec{i}_{\mathrm{T}}$	$r_{y\mathrm{T}} = \vec{r}_{\mathrm{T}} \cdot \vec{j}_{\mathrm{T}}$	$r_{z\mathrm{T}} = \vec{r}_{\mathrm{T}} \cdot \vec{k}_{\mathrm{T}}$
$r_{x0} = \vec{r}_0 \cdot \vec{i}_{\mathrm{T}}$	$r_{y0} = \vec{r}_0 \cdot \vec{j}_{\mathrm{T}}$	$r_{z0} = \vec{r}_0 \cdot \vec{k}_{\mathrm{T}}$
$v_x = \vec{v} \cdot \vec{i}_{\mathrm{T}}$	$v_y = \vec{v} \cdot \vec{j}_{\mathrm{T}}$	$v_z = \vec{v} \cdot \vec{k}_{\mathrm{T}}$

Changement de variable en lien avec les coefficients *A, B, C, D* et *E*		
$\alpha_1 = r_{x\mathrm{T}}^{\ \ 2} + r_{y\mathrm{T}}^{\ \ 2}$	$\alpha_2 = \alpha_1 + r_{x0}^{\ \ 2} + r_{y0}^{\ \ 2}$	$\alpha_3 = \alpha_2 - 2r_{x0}r_{x\mathrm{T}} - 2r_{y0}r_{y\mathrm{T}}$
$\beta_1 = R_{\mathrm{maj}}^{\ \ 2} - R_{\mathrm{min}}^{\ \ 2} + \alpha_1 + r_{z\mathrm{T}}^{\ \ 2}$	$\beta_2 = \beta_1 + r_{x0}^{\ \ 2} + r_{y0}^{\ \ 2} + r_{z0}^{\ \ 2}$	$\beta_3 = \beta_2 - 2r_{x0}r_{x\mathrm{T}} - 2r_{y0}r_{y\mathrm{T}} - 2r_{z0}r_{z\mathrm{T}}$
$\gamma_1 = v_x^{\ 2} + v_y^{\ 2}$	$\delta_1 = \gamma_1 + v_z^{\ 2}$	
$\mu_1 = r_{x0}v_x + r_{y0}v_y$	$\mu_2 = 2\left(\mu_1 - v_x r_{x\mathrm{T}} - v_y r_{y\mathrm{T}}\right)$	
$\eta_1 = \mu_1 + r_{z0}v_z$	$\eta_2 = 2\left(\eta_1 - v_x r_{x\mathrm{T}} - v_y r_{y\mathrm{T}} - v_z r_{z\mathrm{T}}\ \right)$	

<u>Preuve :</u>

L'équation d'un tore centré à l'origine dans le plan *xy* est

$$\left(x^2 + y^2 + z^2 + R_{\mathrm{maj}}^{\ \ 2} - R_{\mathrm{min}}^{\ \ 2}\right)^2 = 4R_{\mathrm{maj}}^{\ \ 2}\left(x^2 + y^2\right) \ .$$

Pour développer une expression d'un tore centré en $\vec{r}_{\mathrm{T}}$ avec une normale au plan du tore $\vec{n}$, nous devons définir une nouvelles base $\vec{i}_{\mathrm{T}}$, $\vec{j}_{\mathrm{T}}$ et $\vec{k}_{\mathrm{T}}$ tel que

$$\vec{k}_{\mathrm{T}} = \frac{\vec{n}}{\lvert\vec{n}\rvert} \qquad \text{et} \qquad \vec{i}_{\mathrm{T}} = \frac{\vec{i} \times \vec{k}_{\mathrm{T}}}{\lvert\vec{i} \times \vec{k}_{\mathrm{T}}\rvert} \qquad \vec{j}_{\mathrm{T}} = \vec{k}_{\mathrm{T}} \times \vec{i}_{\mathrm{T}}$$

ce qui assure $\vec{i}_\mathrm{T} \times \vec{j}_\mathrm{T} = \vec{k}_\mathrm{T}$. Ce choix impose cependant que $\vec{k}_\mathrm{T} \neq \vec{i}$. On peut mesurer la distance *x*, *y* et *z* dans notre nouvelle base avec les équations

$$x = (\vec{r} - \vec{r}_\mathrm{T}) \cdot \vec{i}_\mathrm{T} \quad , \quad y = (\vec{r} - \vec{r}_\mathrm{T}) \cdot \vec{j}_\mathrm{T} \quad \text{et} \quad z = (\vec{r} - \vec{r}_\mathrm{T}) \cdot \vec{k}_\mathrm{T}$$

où $\vec{r}$ correspond à un vecteur position d'un point sur le tore.

Effectuons le produit scalaire afin d'obtenir une notation plus compacte :

$$x = (\vec{r} - \vec{r}_\mathrm{T}) \cdot \vec{i}_\mathrm{T} \quad \Rightarrow \quad x = \vec{r} \cdot \vec{i}_\mathrm{T} - \vec{r}_\mathrm{T} \cdot \vec{i}_\mathrm{T}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = r_x - r_{x\mathrm{T}}}$$

Nous pouvons généraliser l'ensemble des calculs à l'axe *y* et *z* dans le tableau suivant :

Selon l'axe *x*	Selon l'axe *y*	Selon l'axe *z*
$x = r_x - r_{x\mathrm{T}}$	$y = r_y - r_{y\mathrm{T}}$	$z = r_z - r_{z\mathrm{T}}$
$r_x = \vec{r} \cdot \vec{i}_\mathrm{T}$	$r_y = \vec{r} \cdot \vec{j}_\mathrm{T}$	$r_z = \vec{r} \cdot \vec{k}_\mathrm{T}$
$r_{x\mathrm{T}} = \vec{r}_\mathrm{T} \cdot \vec{i}_\mathrm{T}$	$r_{y\mathrm{T}} = \vec{r}_\mathrm{T} \cdot \vec{j}_\mathrm{T}$	$r_{z\mathrm{T}} = \vec{r}_\mathrm{T} \cdot \vec{k}_\mathrm{T}$

Développons l'expression de $x^2 = (r_x - r_{x\mathrm{T}})^2$ ce qui donne

$$x^2 = r_x{}^2 - 2r_x r_{x\mathrm{T}} + r_{x\mathrm{T}}{}^2 \quad .$$

Nous pouvons généraliser l'ensemble des calculs à l'axe *y* et *z* dans le tableau suivant :

Selon l'axe *x*	Selon l'axe *y*	Selon l'axe *z*
$x^2 = r_x{}^2 - 2r_x r_{x\mathrm{T}} + r_{x\mathrm{T}}{}^2$	$y^2 = r_y{}^2 - 2r_y r_{y\mathrm{T}} + r_{y\mathrm{T}}{}^2$	$z^2 = r_z{}^2 - 2r_z r_{z\mathrm{T}} + r_{z\mathrm{T}}{}^2$

Puisque $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}\,t$, nous aurons à développer r_x :

$$r_x = \vec{r} \cdot \vec{i}_\mathrm{T} \quad \Rightarrow \quad r_x = (\vec{r}_0 + \vec{v}\,t) \cdot \vec{i}_\mathrm{T}$$

$$\Rightarrow \quad r_x = \vec{r}_0 \cdot \vec{i}_\mathrm{T} + \vec{v} \cdot \vec{i}_\mathrm{T} t$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{r_x = r_{x0} + v_x t} \qquad (r_{x0} = \vec{r}_0 \cdot \vec{i}_\mathrm{T} \text{ et } v_x = \vec{v} \cdot \vec{i}_\mathrm{T})$$

Nous pouvons généraliser l'ensemble des calculs à l'axe *y* et *z* dans le tableau suivant :

Selon l'axe *x*	Selon l'axe *y*	Selon l'axe *z*
$r_x = r_{x0} + v_x t$	$r_y = r_{y0} + v_y t$	$r_z = r_{z0} + v_z t$
$r_{x0} = \vec{r}_0 \cdot \vec{i}_\mathrm{T}$	$r_{y0} = \vec{r}_0 \cdot \vec{j}_\mathrm{T}$	$r_{z0} = \vec{r}_0 \cdot \vec{k}_\mathrm{T}$
$v_x = \vec{v} \cdot \vec{i}_\mathrm{T}$	$v_y = \vec{v} \cdot \vec{j}_\mathrm{T}$	$v_z = \vec{v} \cdot \vec{k}_\mathrm{T}$

Développons maintenant l'expression de $r_x^{\,2} = \left(r_{x0} + v_x\, t\right)^2$ ce qui donne

$$r_x^{\,2} = r_{x0}^{\,2} + 2 r_{x0} v_x\, t + v_x^{\,2}\, t^2 \quad .$$

Nous pouvons généraliser l'ensemble des calculs à l'axe *y* et *z* dans le tableau suivant :

Selon l'axe *x*	Selon l'axe *y*	Selon l'axe *z*
$r_x^{\,2} = r_{x0}^{\,2} + 2 r_{x0} v_x\, t + v_x^{\,2}\, t^2$	$r_y^{\,2} = r_{y0}^{\,2} + 2 r_{y0} v_y\, t + v_y^{\,2}\, t^2$	$r_z^{\,2} = r_{z0}^{\,2} + 2 r_{z0} v_z\, t + v_z^{\,2}\, t^2$

Nous allons maintenant remplacer les expressions de x^2, y^2 et z^2 dans l'équation du tore :

$$\left(x^2 + y^2 + z^2 + R_{\text{maj}}^{\,2} - R_{\text{min}}^{\,2}\right)^2 = 4 R_{\text{maj}}^{\,2}\left(x^2 + y^2\right)$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} &\left(\left(r_x^{\,2} - 2 r_x r_{x\text{T}} + r_{x\text{T}}^{\,2}\right) + \left(r_y^{\,2} - 2 r_y r_{y\text{T}} + r_{y\text{T}}^{\,2}\right) + \left(r_z^{\,2} - 2 r_z r_{z\text{T}} + r_{z\text{T}}^{\,2}\right) + R_{\text{maj}}^{\,2} - R_{\text{min}}^{\,2}\right)^2 \\ &= 4 R_{\text{maj}}^{\,2}\left(\left(r_x^{\,2} - 2 r_x r_{x\text{T}} + r_{x\text{T}}^{\,2}\right) + \left(r_y^{\,2} - 2 r_y r_{y\text{T}} + r_{y\text{T}}^{\,2}\right)\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} &\left(r_x^{\,2} + r_y^{\,2} + r_z^{\,2} - 2 r_x r_{x\text{T}} - 2 r_y r_{y\text{T}} - 2 r_z r_{z\text{T}} + R_{\text{maj}}^{\,2} - R_{\text{min}}^{\,2} + r_{x\text{T}}^{\,2} + r_{y\text{T}}^{\,2} + r_{z\text{T}}^{\,2}\right)^2 \\ &= 4 R_{\text{maj}}^{\,2}\left(r_x^{\,2} + r_y^{\,2} - 2 r_x r_{x\text{T}} - 2 r_y r_{y\text{T}} + r_{x\text{T}}^{\,2} + r_{y\text{T}}^{\,2}\right) \end{aligned}$$

Effectuons les changements de variable

$$\alpha_1 = r_{x\text{T}}^{\,2} + r_{y\text{T}}^{\,2} \qquad \text{et} \qquad \beta_1 = R_{\text{maj}}^{\,2} - R_{\text{min}}^{\,2} + \alpha_1 + r_{z\text{T}}^{\,2}$$

ce qui donne l'expression simplifiée

$$\left(r_x^{\,2} + r_y^{\,2} + r_z^{\,2} - 2 r_x r_{x\text{T}} - 2 r_y r_{y\text{T}} - 2 r_z r_{z\text{T}} + \beta_1\right)^2 = 4 R_{\text{maj}}^{\,2}\left(r_x^{\,2} + r_y^{\,2} - 2 r_x r_{x\text{T}} - 2 r_y r_{y\text{T}} + \alpha_1\right) \quad .$$

Nous allons maintenant remplacer les expressions de $r_x^{\,2}$, $r_y^{\,2}$ et $r_z^{\,2}$ dans l'équation du tore :

$$\left(r_x^{\,2} + r_y^{\,2} + r_z^{\,2} - 2 r_x r_{x\text{T}} - 2 r_y r_{y\text{T}} - 2 r_z r_{z\text{T}} + \beta_1\right)^2 = 4 R_{\text{maj}}^{\,2}\left(r_x^{\,2} + r_y^{\,2} - 2 r_x r_{x\text{T}} - 2 r_y r_{y\text{T}} + \alpha_1\right)$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} &\left(\left(r_{x0}^{\,2} + 2 r_{x0} v_x\, t + v_x^{\,2}\, t^2\right) + \left(r_{y0}^{\,2} + 2 r_{y0} v_y\, t + v_y^{\,2}\, t^2\right) + \left(r_{z0}^{\,2} + 2 r_{z0} v_z\, t + v_z^{\,2}\, t^2\right) - 2 r_x r_{x\text{T}} - 2 r_y r_{y\text{T}} - 2 r_z r_{z\text{T}} + \beta_1\right)^2 \\ &= 4 R_{\text{maj}}^{\,2}\left(\left(r_{x0}^{\,2} + 2 r_{x0} v_x\, t + v_x^{\,2}\, t^2\right) + \left(r_{y0}^{\,2} + 2 r_{y0} v_y\, t + v_y^{\,2}\, t^2\right) - 2 r_x r_{x\text{T}} - 2 r_y r_{y\text{T}} + \alpha_1\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} &\left(v_x^{\,2}\, t^2 + v_y^{\,2}\, t^2 + v_z^{\,2}\, t^2 + 2 r_{x0} v_x\, t + 2 r_{y0} v_y\, t + 2 r_{z0} v_z\, t - 2 r_x r_{x\text{T}} - 2 r_y r_{y\text{T}} - 2 r_z r_{z\text{T}} + \beta_1 + r_{x0}^{\,2} + r_{y0}^{\,2} + r_{z0}^{\,2}\right)^2 \\ &= 4 R_{\text{maj}}^{\,2}\left(v_x^{\,2}\, t^2 + v_y^{\,2}\, t^2 + 2 r_{x0} v_x\, t + 2 r_{y0} v_y\, t - 2 r_x r_{x\text{T}} - 2 r_y r_{y\text{T}} + \alpha_1 + r_{x0}^{\,2} + r_{y0}^{\,2}\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} &\left(\left(v_x^{\,2} + v_y^{\,2} + v_z^{\,2}\right) t^2 + 2\left(r_{x0} v_x + r_{y0} v_y + r_{z0} v_z\right) t - 2 r_x r_{x\text{T}} - 2 r_y r_{y\text{T}} - 2 r_z r_{z\text{T}} + \beta_1 + r_{x0}^{\,2} + r_{y0}^{\,2} + r_{z0}^{\,2}\right)^2 \\ &= 4 R_{\text{maj}}^{\,2}\left(\left(v_x^{\,2} + v_y^{\,2}\right) t^2 + 2\left(r_{x0} v_x + r_{y0} v_y\right) t - 2 r_x r_{x\text{T}} - 2 r_y r_{y\text{T}} + \alpha_1 + r_{x0}^{\,2} + r_{y0}^{\,2}\right) \end{aligned}$$

Effectuons l'ensemble des changements de variable suivant :

$$\alpha_2 = \alpha_1 + r_{x0}{}^2 + r_{y0}{}^2 \qquad \beta_2 = \beta_1 + r_{x0}{}^2 + r_{y0}{}^2 + r_{z0}{}^2$$
$$\gamma_1 = v_x{}^2 + v_y{}^2 \qquad \delta_1 = \gamma_1 + v_z{}^2$$
$$\mu_1 = r_{x0}v_x + r_{y0}v_y \qquad \eta_1 = \mu_1 + r_{z0}v_z$$

Ces changements nous donnent l'expression

$$\left(\delta_1 t^2 + 2\eta_1 t - 2r_x r_{x\mathrm{T}} - 2r_y r_{y\mathrm{T}} - 2r_z r_{z\mathrm{T}} + \beta_2\right)^2 = 4R_{\mathrm{maj}}{}^2\left(\gamma_1 t^2 + 2\mu_1 t - 2r_x r_{x\mathrm{T}} - 2r_y r_{y\mathrm{T}} + \alpha_2\right) \quad .$$

Remplaçons maintenant les termes r_x, r_y et r_z

$$\left(\delta_1 t^2 + 2\eta_1 t - 2r_x r_{x\mathrm{T}} - 2r_y r_{y\mathrm{T}} - 2r_z r_{z\mathrm{T}} + \beta_2\right)^2 = 4R_{\mathrm{maj}}{}^2\left(\gamma_1 t^2 + 2\mu_1 t - 2r_x r_{x\mathrm{T}} - 2r_y r_{y\mathrm{T}} + \alpha_2\right)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned}&\left(\delta_1 t^2 + 2\eta_1 t - 2(r_{x0} + v_x t)r_{x\mathrm{T}} - 2(r_{y0} + v_y t)r_{y\mathrm{T}} - 2(r_{z0} + v_z t)r_{z\mathrm{T}} + \beta_2\right)^2 \\ &= 4R_{\mathrm{maj}}{}^2\left(\gamma_1 t^2 + 2\mu_1 t - 2(r_{x0} + v_x t)r_{x\mathrm{T}} - 2(r_{y0} + v_y t)r_{y\mathrm{T}} + \alpha_2\right)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned}&\left(\delta_1 t^2 + 2\eta_1 t - 2r_{x0}r_{x\mathrm{T}} - 2v_x r_{x\mathrm{T}}\, t - 2r_{y0}r_{y\mathrm{T}} - 2v_y r_{y\mathrm{T}}\, t - 2r_{z0}r_{z\mathrm{T}} - 2v_z r_{z\mathrm{T}}\, t + \beta_2\right)^2 \\ &= 4R_{\mathrm{maj}}{}^2\left(\gamma_1 t^2 + 2\mu_1 t - 2r_{x0}r_{x\mathrm{T}} - 2v_x r_{x\mathrm{T}}\, t - 2r_{y0}r_{y\mathrm{T}} - 2v_y r_{y\mathrm{T}}\, t + \alpha_2\right)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned}&\left(\delta_1 t^2 + 2\left(\eta_1 - v_x r_{x\mathrm{T}} - v_y r_{y\mathrm{T}} - v_z r_{z\mathrm{T}}\right)t + \beta_2 - 2r_{x0}r_{x\mathrm{T}} - 2r_{y0}r_{y\mathrm{T}} - 2r_{z0}r_{z\mathrm{T}}\right)^2 \\ &= 4R_{\mathrm{maj}}{}^2\left(\gamma_1 t^2 + 2\left(\mu_1 - v_x r_{x\mathrm{T}} - v_y r_{y\mathrm{T}}\right)t + \alpha_2 - 2r_{x0}r_{x\mathrm{T}} - 2r_{y0}r_{y\mathrm{T}}\right)\end{aligned}$$

Nous allons faire le changement de variable suivant :

$$\alpha_3 = \alpha_2 - 2r_{x0}r_{x\mathrm{T}} - 2r_{y0}r_{y\mathrm{T}} \qquad \beta_3 = \beta_2 - 2r_{x0}r_{x\mathrm{T}} - 2r_{y0}r_{y\mathrm{T}} - 2r_{z0}r_{z\mathrm{T}}$$
$$\mu_2 = 2\left(\mu_1 - v_x r_{x\mathrm{T}} - v_y r_{y\mathrm{T}}\right) \qquad \eta_2 = 2\left(\eta_1 - v_x r_{x\mathrm{T}} - v_y r_{y\mathrm{T}} - v_z r_{z\mathrm{T}}\right)$$

Ces changements nous donnent l'expression

$$\left(\delta_1 t^2 + \eta_2 t + \beta_3\right)^2 = 4R_{\mathrm{maj}}{}^2\left(\gamma_1 t^2 + \mu_2 t + \alpha_3\right) \quad .$$

Développons maintenant le carré du côté gauche et réécrivons le tout sous la forme d'un polynôme du 4ième degré :

$$\left(\delta_1 t^2 + \eta_2 t + \beta_3\right)^2 = 4R_{\mathrm{maj}}{}^2\left(\gamma_1 t^2 + \mu_2 t + \alpha_3\right)$$

$$\Rightarrow \quad \left(\delta_1 t^2 + \eta_2 t + \beta_3\right)\left(\delta_1 t^2 + \eta_2 t + \beta_3\right) = 4R_{\mathrm{maj}}{}^2\left(\gamma_1 t^2 + \mu_2 t + \alpha_3\right)$$

$$\Rightarrow \quad \delta_1{}^2 t^4 + \delta_1\eta_2 t^3 + \delta_1 \beta_3 t^2 + \eta_2\delta_1 t^3 + \eta_2{}^2 t^2 + \eta_2\beta_3 t + \beta_3\delta_1 t^2 + \beta_3\eta_2 t + \beta_3{}^2 = 4R_{\mathrm{maj}}{}^2\left(\gamma_1 t^2 + \mu_2 t + \alpha_3\right)$$

$$\Rightarrow \quad \delta_1{}^2 t^4 + 2\delta_1\eta_2 t^3 + 2\delta_1 \beta_3 t^2 + \eta_2{}^2 t^2 + 2\eta_2\beta_3 t + \beta_3{}^2 = 4R_{\mathrm{maj}}{}^2\left(\gamma_1 t^2 + \mu_2 t + \alpha_3\right)$$

$$\Rightarrow \quad \delta_1{}^2 t^4 + 2\delta_1\eta_2 t^3 + \left(2\delta_1 \beta_3 + \eta_2{}^2 - 4R_{\mathrm{maj}}{}^2\gamma_1\right)t^2 + \left(2\eta_2\beta_3 - 4R_{\mathrm{maj}}{}^2\mu_2\right)t + \beta_3{}^2 - 4R_{\mathrm{maj}}{}^2\alpha_3 = 0$$

La dernière équation se déduit à un polynôme du 4e degré

$$At^4 + Bt^3 + Ct^2 + Dt + E = 0$$

tel que

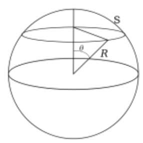
$$A = \delta_1^{\,2} \qquad B = 2\delta_1\eta_2 \qquad C = \left(2\delta_1\beta_3 + \eta_2^{\,2} - 4R_{\mathrm{maj}}^{\;\;2}\gamma_1\right)$$

$$D = 2\eta_2\beta_3 - 4R_{\mathrm{maj}}^{\;\;2}\mu_2 \qquad E = \beta_3^{\,2} - 4R_{\mathrm{maj}}^{\;\;2}\alpha_3$$

ce qui conclut la preuve. ■

L'intersection d'une calotte sphérique

En construction …



https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Calotte_spherique.svg