Chapitre 1.X1 –Les séries de Fourier

Remarque : CETTE SECTION EST ENTIÈREMENT EN CONSTRUCTION

Situation A : ***Le polynôme du 2^e degré en sinus.*** Vérifiez que la fonction $x = t^2$ peut être bien approximée par la fonction

$$x = t^2 \approx \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos(t) - \frac{1}{4}\cos(2t) + \frac{1}{9}\cos(3t) - ...\right)$$

pour l'intervalle $t = \{-\pi, \pi\}$ en évaluant la fonction x à **(a)** $t = 0$, **(b)** $t = 1$ et **(c)** $t = 2$.

(a) $x(t=0) \approx \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos((0)) - \frac{1}{4}\cos(2(0)) + \frac{1}{9}\cos(3(0))\right)$

$\Rightarrow$ $x(t=0) \approx \frac{\pi^2}{3} - 4\left((1) - \frac{1}{4}(1) + \frac{1}{9}(1)\right)$

$\Rightarrow$ $\boxed{x(t=0) \approx -0{,}1546}$ et $x(t=0) = 0$

(b) $x(t=1) \approx \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos((1)) - \frac{1}{4}\cos(2(1)) + \frac{1}{9}\cos(3(1))\right)$

$\Rightarrow$ $x(t=0) \approx \frac{\pi^2}{3} - 4\left((0{,}5403) - \frac{1}{4}(-0{,}4161) + \frac{1}{9}(-0{,}9900)\right)$

$\Rightarrow$ $\boxed{x(t=1) \approx 1{,}1526}$ et $x(t=1) = 1$

(c) $x(t=2) \approx \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos((2)) - \frac{1}{4}\cos(2(2)) + \frac{1}{9}\cos(3(2))\right)$

$\Rightarrow$ $x(t=2) \approx \frac{\pi^2}{3} - 4\left((-0{,}41615) - \frac{1}{4}(-0{,}6536) + \frac{1}{9}(0{,}9602)\right)$

$\Rightarrow$ $\boxed{x(t=2) \approx 3{,}8741}$ et $x(t=2) = 4$

<u>Remarque :</u>

Nous constatons que la fonction $x = t^2$ peut être approximé à l'aide d'un développement en fonction cosinus de la forme

$$\cos(nt) \text{ où } n \in \mathrm{N} \ .$$

La question suivante semble tout à fait légitime :

Peut-on déterminer mathématiquement les coefficients devant les termes $\cos(nt)$?

La période fondamentale d'un groupe de fonctions sinus et cosinus

Le groupe des fonctions trigonométriques

$$1\ ,\ \cos(x)\ ,\ \sin(x)\ ,\cos(2x)\ ,\ \sin(2x)\ ,\ \ldots\ ,\ \cos(nx)\ ,\ \sin(nx)\ ,\ \ldots\ ,$$

où $n \in \mathrm{N}$ forme un ensemble de fonction ayant une période fondamentale commune de $P = 2\pi$ radian. Ainsi, lorsque $x = 0$ ou $x = 2\pi$, toutes les fonctions cosinus auront une valeur de 1 et toutes les fonction sinus auront une valeur de 0.

Bien entendu, la période propre P_n de chaque fonction

$$\cos(nx)\ \text{ et }\ \sin(nx)$$

sera égal à $P_n = 2\pi / n$ (périodicité en radian) où n est l'équivalent de ω et P_n est l'équivalent de T dans la relation $T = 2\pi / \omega$ (périodicité temporelle) du mouvement harmonique simple.

L'intégrale de la fonction sinus et cosinus sur une période

Lorsque l'on effectue une intégrale de la fonction sinus et cosinus sur une période 2π ($x \in [-\pi,\ \pi]$), nous pouvons obtenir les propriétés suivantes pour les fonction de la forme

$$\cos(nx)\ \text{ et }\ \sin(nx)\quad \text{où}\quad n \in \mathrm{N}\ \text{sauf}\ n \neq 0\ :$$

Intégrale donnant zéro		L'intégrale donnant π	
$\int_{x=-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0$	$\int_{x=-\pi}^{\pi} \sin(nx)\,\mathrm{d}x = 0$	$\int_{x=-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\,\mathrm{d}x = \pi$	$\int_{x=-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)\,\mathrm{d}x = \pi$

Preuve :

Évaluons l'intégrale de nos 4 fonctions :

- $\int_{x=-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,\mathrm{d}x = \int_{u=-n\pi}^{n\pi} \frac{\cos(u)}{n}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{n}\left[\sin(u)\right]_{-n\pi}^{+n\pi} = \frac{1}{n}\left(\sin(n\pi) - \sin(-n\pi)\right) = \frac{1}{n}(0-0) = 0$

- $\int_{x=-\pi}^{\pi} \sin(nx)\,\mathrm{d}x = \int_{u=-n\pi}^{n\pi} \frac{\sin(u)}{n}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{n}\left[-\cos(u)\right]_{-n\pi}^{+n\pi} = -\frac{1}{n}\left(\cos(n\pi) - \cos(-n\pi)\right) = -\frac{1}{n}\left(\cos(n\pi) - \cos(n\pi)\right) =$

- $\int_{x=-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\,\mathrm{d}x = \int_{x=-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos(2nx)}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{x=-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x + \int_{x=-\pi}^{\pi} \cos(2nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}[x]_{-\pi}^{\pi} + 0 = \frac{1}{2}(\pi - -\pi) = \pi$

- $\int_{x=-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)\,\mathrm{d}x = \int_{x=-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos(2nx)}{2}\,\mathrm{d}x = \ldots = \pi$

L'intégrale du produit de deux fonctions sinus et cosinus de même période fondamentale

Lorsque l'on effectue l'intégrale sur une période $P = 2\pi$ sur le produit de deux fonctions de l'ensemble

$$\cos(x),\ \sin(x), \cos(2x),\ \sin(2x),\ \ldots,\ \cos(nx),\ \sin(nx),\ \ldots,\ \cos(mx),\ \sin(mx)$$

comme

$$\int_{x=-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x\ ,\ \int_{x=-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x \ \text{ et } \int_{x=-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x\ ,$$

nous retrouvons les propriétés suivantes pour $n \in \mathrm{N}$ et $m \in \mathrm{N}$ (mais $n \neq 0$ et $m \neq 0$:

Contrainte sur n et m		
$\forall\, n, m$	$n = m$	$n \neq m$
$\int_{x=-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x = 0$	$\int_{x=-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\,\mathrm{d}x = \pi$	$\int_{x=-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x = 0$
	$\int_{x=-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)\,\mathrm{d}x = \pi$	$\int_{x=-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x = 0$

<u>Preuve :</u>

Démontrons les intégrales

$$\int_{x=-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x = 0\ ,\ \int_{x=-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x = 0 \ \text{ et } \int_{x=-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x = 0$$

en exploitant les identités trigonométrique suivantes :

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right)$$

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$$

1) $\quad I = \int_{x=-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x$

$\Rightarrow \quad I = \int_{x=-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left(\sin(nx+mx) + \sin(nx-mx)\right)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{2}\int_{x=-\pi}^{\pi} \sin((n+m)x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{x=-\pi}^{\pi} \sin((n-m)x)\,\mathrm{d}x$

$\Rightarrow \quad I = 0 \ \ \forall\, n, m \in \mathrm{N}$ car $\int_{x=-\pi}^{\pi} \sin(a\,x)\,\mathrm{d}x = 0$ où $a = n+m$ ou bien $a = n-m$

2) $I = \int_{x=-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x$

$\Rightarrow$ $I = \int_{x=-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left(\cos(nx+mx)+\cos(nx-mx)\right)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow$ $I = \frac{1}{2}\int_{x=-\pi}^{\pi} \cos((n+m)x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{x=-\pi}^{\pi} \cos((n-m)x)\,\mathrm{d}x$

- Si $n = m$, alors l'intégrale sera de forme $I = \int_{x=-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\,\mathrm{d}x = \pi$ selon nos équations précédentes.
- Si $n \neq m$, alors $I = 0\ \ \forall n, m \in \mathrm{N}$, car $\int_{x=-\pi}^{\pi} \cos(ax)\,\mathrm{d}x = 0$ où $a = n+m$ ou bien $a = n-m$.

3) $I = \int_{x=-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x$

$\Rightarrow$ $I = \int_{x=-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left(\cos(nx-mx)+\cos(nx+mx)\right)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow$ $I = \frac{1}{2}\int_{x=-\pi}^{\pi} \cos((n-m)x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{x=-\pi}^{\pi} \cos((n+m)x)\,\mathrm{d}x$

- Si $n = m$, alors l'intégrale sera de forme $I = \int_{x=-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)\,\mathrm{d}x = \pi$ selon nos équations précédentes.
- Si $n \neq m$, alors $I = 0\ \ \forall n, m \in \mathrm{N}$, car $\int_{x=-\pi}^{\pi} \cos(ax)\,\mathrm{d}x = 0$ où $a = n+m$ ou bien $a = n-m$.

La série de Fourier

La série de Fourier correspond à un développement d'une fonction $f(x)$ sur une période de 2π à l'aide de fonctions sinus et cosinus de période fondamentale commune de 2π que l'on peut représenter de la façon suivante :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right) \quad \text{où} \quad x \in [x_0,\ x_0 + 2\pi]$$

où n : Le numéro de l'harmonique de la fonction sinus ou cosinus.
a_n : Amplitude de la composante cosinus de l'harmonique n.
b_n : Amplitude de la composante sinus de l'harmonique n.
a_0 : Le facteur constant de la série.

et $A_n = \sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2}$ est l'amplitude de l'harmonique n.

$\phi_n = \left\{\begin{matrix} \arctan(a_n / b_n) & \text{si } b_n > 0 \\ \arctan(a_n / b_n) + \pi & \text{si } b_n < 0 \end{matrix}\right\}$ est la phase de l'harmonique n.

Les coefficients de la série de Fourier

À partir de la série de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$$

sur l'intervalle $x \in [x_0,\ x_0 + 2\pi]$, nous pouvons déterminer les coefficients a_0, a_n et b_n à l'aide des expressions suivantes :

Coefficient a_0 constant	Coefficient a_n et b_n des harmonique n où $n \in \{1, 2, 3, ...\}$	
$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{x=x_0}^{x_0+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$	$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{x=x_0}^{x_0+2\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x$	$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{x=x_0}^{x_0+2\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x$

Preuve :

Soit la fonction $f(x)$ qui est intégrable sur l'intervalle $x \in [x_0,\ x_0 + 2\pi]$ où $x_0 = -\pi$, évaluons l'expression de a_0 associé au coefficient de la série de Fourier sur l'intervalle $x \in [-\pi,\ \pi]$ en appliquant le calcul de l'intégrale sur une période $P = 2\pi$ à notre fonction $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)\right]\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\,\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)\,\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)\,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (0) + a_n \sum_{n=1}^{\infty}(0)$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}[x]_{-\pi}^{\pi}$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\left((\pi) - (-\pi)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}2\pi$$

$$\Rightarrow \quad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \blacksquare \ (1)$$

Évaluons l'intégrale de la fonction $f(x)$ multiplié par la fonction $\cos(mx)$ sur l'intervalle $x \in [-\pi, \pi]$ afin d'évaluer l'expression du coefficient a_m :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right)$$

$$\Rightarrow \quad f(x)\cos(mx) = \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right) \right] \cos(mx)$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right) \right] \cos(mx)\,\mathrm{d}x$$

$\Rightarrow$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\cos(mx)\,\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x$$

$\Rightarrow$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (0)$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1,\, n\neq m}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x + a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1,\, n\neq m}^{\infty} a_n (0) + a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(mx)\,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,\mathrm{d}x = a_m (\pi)$$

$$\Rightarrow \quad a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,\mathrm{d}x \quad \blacksquare \text{ (1)}$$

Nous allons laisser à la discrétion du lecteur la démonstration du terme

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)\,\mathrm{d}x$$

qui exploite sensiblement les mêmes propriétés que la preuve (2).

Les séries de Fourier des intervalles temporelles

Les séries de Fourier permettre de définir une fonction $f(x)$ à l'aide d'une somme de fonction $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ où $n \in \mathrm{N}$ sur une période $P = 2\pi$ sur un intervalle $x \in [x_0, x_0 + P]$.

Afin d'augmenter le domaine x admissible dans le développement, nous pouvons remplacer l'espace x de périodicité $P = 2\pi$ en radian en espace t de périodicité fondamentale T_0 en seconde. Ainsi, la fonction à développer sera $f(t)$. Ce changement de domaine entraînement une modification dans la forme des fonctions ayant une période fondamentale commune T_0 par le changement de variable

$$x = \frac{2\pi}{T_0} t \quad \text{avec} \quad t \in [t_i, t_i + T_0]$$

ce qui donnera les fonctions

$$1,\ \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right),\ \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} x\right), \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} 2t\right),\ \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} 2t\right), \ldots,\ \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} n\,t\right),\ \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} n\,t\right), \ldots$$

ou les fonctions

$$1,\ \cos(2\pi f_0\, t),\ \sin(2\pi f_0\, x), \cos(2\pi f_0\, 2t),\ \sin(2\pi f_0\, 2t), \ldots,\ \cos(2\pi f_0\, n\,t),$$
$$\sin(2\pi f_0\, n\,t), \ldots$$

avec l'expression de la fréquence fondamentale

$$f_0 = \frac{1}{T_0} \quad .$$

Ainsi, la série de Fourier

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(2\pi f_0 n\,t) + b_n \sin(2\pi f_0 n\,t)\big) \text{ sur l'intervalle } t \in [t_i,\ t_i + T_0] \text{ où}$$

$$f_0 = 1/T_0,$$

nous pouvons déterminer les coefficients a_0, a_n et b_n à l'aide des expressions suivantes :

Coefficient a_0 constant	Coefficient a_n et b_n des harmonique n où $n \in \{1, 2, 3, ...\}$	
$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{t=t_i}^{t_i+T_0} f(t)\,\mathrm{d}t$	$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{t=t_i}^{t_i+T_0} f(t) \cos(2\pi f_0 n\,t)\,\mathrm{d}t$	$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{t=t_i}^{t_i+T_0} f(t) \sin(2\pi f_0 n\,t)\,\mathrm{d}t$

Preuve :

La preuve consiste à remplacer l'expression $f(x)$ en $f(t)$ à l'aide du changement de variable

$$x = \frac{2\pi}{T_0} t$$

et en convertissant l'intégrale

$$\int_{x=-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\,\mathrm{d}x = \pi \text{ par l'intégrale } \int_{t=-T_0/2}^{T_0/2} \cos^2(2\pi f_0 n t)\,\mathrm{d}t = \frac{T_0}{2}$$

sur une période fondamentale T_0. Le tout est laissé à la discrétion du lecteur.

QUESTION :

Et si $T_0 = \infty$, alors $f_0 = 0$. Ainsi, comment elles seront modifiées les équations ????