1.7b – Les oscillations amorties-entretenues

Le mouvement harmonique amorti-entretenu

Le mouvement harmonique amorti-entretenu MHAE est un mouvement de type mouvement harmonique amorti MHA qui se superpose à un mouvement forcé par une force externe tel que

$$x(t) = x_g(t) + x_p(t) .$$

Le MHA $x_g(t)$ est associé à un mouvement initial qui dépend des conditions initiales et correspond à la solution générale. Le MHAE $x_p(t)$ est associé à un mouvement engendré par la force externe et correspond à la solution particulière.

https://musiquedepot.ca/amplificateurs/haut-parleurs-de-remplacements.html
Un haut-parleur est un OHAE qui est conçu pour osciller à la fréquence imposé par un signal audio.

Équation différentielle OHA : $$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \eta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0{}^2 x = \frac{F_\mathrm{e}}{m}\cos\left(\omega_\mathrm{e} t + \phi_\mathrm{e}\right)$$

Solution MHAE : $$x(t) = x_g + x_p$$

où $x(t)$: Position de l'objet selon l'axe x (m)
$x_g(t)$: La solution générale à la position de l'objet (m)
$x_p(t)$: La solution particulière à la position de l'objet (m)
t : Temps écoulé durant le mouvement (s)
η : Constante de résistance au mouvement (s^{-1})
β : Constante de résistance $\beta = \eta / 2$ (s^{-1})
ω_0 : Fréquence angulaire naturelle (rad/s)
F_e : Module maximale de la force d'entretien (N)
m : La masse en oscillation (kg)
ω_e : La fréquence angulaire de l'entretien (rad/s)
ϕ_e : La phase de la force d'entretien (rad)
φ : La phase du mouvement initiale (rad)
δ : La phase du mouvement en régime permanent (rad)

En situation de mouvement amortie MHA, voici la solution complète avec solution générale pour mouvement amortie : ($\omega_0 > \beta = \eta / 2$)

$$x(t) = x_g + x_p$$

avec

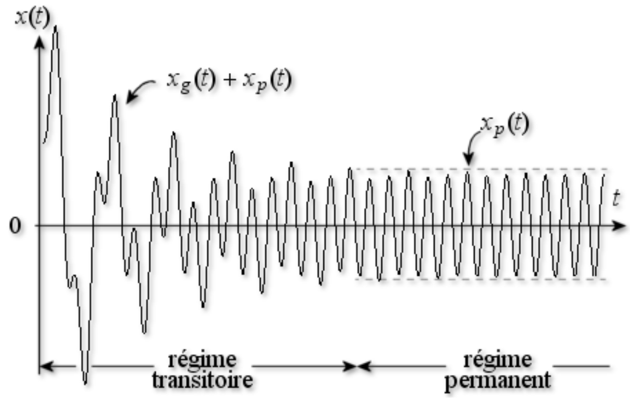
$$x_g = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_a t + \varphi)$$

$$\text{si} \quad \omega_0 > \beta = \eta / 2$$

(mouvement initial en perte d'amplitude durant le régime transitoire)

$$x_p(t) = A\cos(\omega_e t + \delta)$$

(mouvement d'entretien qui va perdurer dans le temps dans le régime permanent)



http://www.edu.upmc.fr/uel/physique/syst_oscillants/apprendre/gpb.osc.fa.301.a2/content/access.htm#D15

En situation de mouvement amortie surcritique MHAS, voici la solution complète avec solution générale pour mouvement à amortissement surcritique : ($\omega_0 < \beta = \eta / 2$)

$$x(t) = x_g + x_p$$

avec

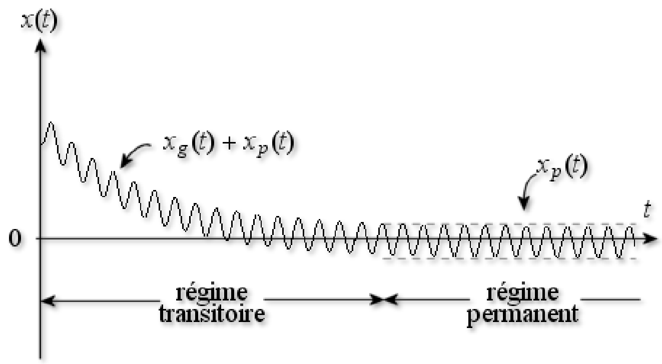
$$x_g = A_0 e^{-\beta t} \cosh(\sigma t + \varphi)$$

$$\text{si} \quad \omega_0 < \beta = \eta / 2$$

(mouvement initial avec amortissement surcritique durant le régime transitoire)

$$x_p(t) = A\cos(\omega_e t + \delta)$$

(mouvement d'entretien qui va perdurer dans le temps dans le régime permanent)



http://www.edu.upmc.fr/uel/physique/syst_oscillants/apprendre/gpb.osc.fa.301.a2/content/access.htm#D15

Nous aurons les expressions suivantes pour l'amplitude A et la phase $\delta = \theta + \varphi_e$:

Amplitude A	La phase δ ($\delta = \theta + \varphi_e$)		
$A = \dfrac{F_e / m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_e^2\right)^2 + \eta^2 \omega_e^2}}$	$\omega_e = \omega_0$	$\omega_e > \omega_0$	$\omega_e < \omega_0$
	$\theta = \dfrac{\pi}{2}$	$\theta = \arctan\left(\dfrac{\eta \omega_e}{\omega_e^2 - \omega_0^2}\right)$	$\theta = \arctan\left(\dfrac{\eta \omega_e}{\omega_0^2 - \omega_e^2}\right) + \pi$

Preuve :

Si l'on introduit les solutions générales

$$x_g = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega_a t+\varphi) \qquad \text{ou} \qquad x_g = A_0 e^{-\beta t}\cosh(\sigma t+\varphi)$$

dans l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+\eta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^{\,2}x = F(t) \quad \text{tel que} \quad F(t)=\frac{F_\mathrm{e}}{m}\cos(\omega_\mathrm{e}t+\phi_\mathrm{e}),$$

nous constatons qu'elles sont insuffisantes pour engendrer le terme $F(t)$, car elles sont la solution à l'équation

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+\eta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^{\,2}x = 0 \quad .$$

Introduisons dans notre équation différentielle[1] à résoudre une autre forme de solution

$$x_p(t) = A\cos(\omega_e t+\delta)$$

afin que ce terme puisse engendrer le terme $F(t)$ après l'application des dérivées dans le temps.

Pour parvenir à obtenir l'expression de A et δ, nous devrons à nouveau exploiter la propriété des nombres complexes et réécrire nos expressions sous la forme suivante :

- $x_p(t) = A\cos(\omega_e t+\delta)$ ce qui donnera $\quad x_p(t) = Ae^{i(\omega_e t+\delta)} = Ae^{i\omega_e t}e^{i\delta}$
- $F(t)=\frac{F_\mathrm{e}}{m}\cos(\omega_\mathrm{e}t+\varphi_\mathrm{e})$ ce qui donnera $\quad F(t)=\frac{F_\mathrm{e}}{m}e^{i(\omega_\mathrm{e}t+\varphi_\mathrm{e})} = \frac{F_\mathrm{e}}{m}e^{i\omega_\mathrm{e}t}e^{i\varphi_\mathrm{e}}$

Appliquons nos expressions de $x_p(t)$ et $F(t)$ à notre équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+\eta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^{\,2}x = F(t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(Ae^{i\omega_\mathrm{e}t}e^{i\delta}\right)+\eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(Ae^{i\omega_\mathrm{e}t}e^{i\delta}\right)+\omega_0^{\,2}\left(Ae^{i\omega_\mathrm{e}t}e^{i\delta}\right)=\frac{F_\mathrm{e}}{m}e^{i\omega_\mathrm{e}t}e^{i\varphi_\mathrm{e}}$$

$$\Rightarrow \quad i^2\omega_e^{\,2}\left(Ae^{i\omega_e t}e^{i\delta}\right)+\eta i\omega_e\left(Ae^{i\omega_e t}e^{i\delta}\right)+\omega_0^{\,2}\left(Ae^{i\omega_e t}e^{i\delta}\right)=\frac{F_\mathrm{e}}{m}e^{i\omega_e t}e^{i\varphi_\mathrm{e}}$$

$$\Rightarrow \quad Ae^{i\omega_e t}e^{i\delta}\left(-\omega_e^{\,2}+i\eta\omega_e+\omega_0^{\,2}\right)=\frac{F_\mathrm{e}}{m}e^{i\omega_e t}e^{i\varphi_\mathrm{e}}$$

$$\Rightarrow \quad Ae^{i\delta}\left(-\omega_e^{\,2}+i\eta\omega_e+\omega_0^{\,2}\right)=\frac{F_\mathrm{e}}{m}e^{i\varphi_\mathrm{e}}$$

$$\Rightarrow \quad Ae^{i\delta}=\frac{F_\mathrm{e}}{m\left(\omega_0^{\,2}-\omega_e^{\,2}+i\eta\omega_e\right)}e^{i\varphi_\mathrm{e}}$$

---

[1] Référence : https://faculty.washington.edu/seattle/physics227/reading/reading-3a.pdf

$$Ae^{i\delta} = \frac{F_{\mathrm{e}}}{m\left(\omega_0^2 - \omega_e^2 + i\eta\omega_e\right)} e^{i\varphi_{\mathrm{e}}}$$ (ligne précédente)

$$\Rightarrow \qquad A\frac{e^{i\delta}}{e^{i\varphi_{\mathrm{e}}}} = \frac{F_{\mathrm{e}}}{m\left(\omega_0^2 - \omega_e^2 + i\eta\omega_e\right)}$$

$$\Rightarrow \qquad Ae^{i(\delta-\varphi_{\mathrm{e}})} = \frac{F_{\mathrm{e}}}{m\left(\omega_0^2 - \omega_e^2 + i\eta\omega_e\right)}$$

Effectuons le changement de variable

$$z = \frac{F_{\mathrm{e}}}{m\left(\omega_0^2 - \omega_e^2 + i\eta\omega_e\right)} \qquad \text{et} \qquad \theta = \delta - \varphi_{\mathrm{e}}$$

afin de représenter

$$z = Ae^{i\theta} \quad .$$

Utilisons le module du nombre complexe

$$|z| = \sqrt{z\,z^*} = A$$

afin de déterminer l'expression de l'amplitude A :

$$A = \sqrt{z\,z^*} \qquad \Rightarrow \qquad A = \sqrt{\left(\frac{F_{\mathrm{e}}}{m\left(\omega_0^2 - \omega_e^2 + i\eta\omega_e\right)}\right)\left(\frac{F_{\mathrm{e}}}{m\left(\omega_0^2 - \omega_e^2 - i\eta\omega_e\right)}\right)}$$

$$\Rightarrow \qquad A = \frac{F_{\mathrm{e}}}{m}\sqrt{\left(\frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega_e^2 + i\eta\omega_e\right)}\right)\left(\frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega_e^2 - i\eta\omega_e\right)}\right)}$$

$$\Rightarrow \qquad A = \frac{F_{\mathrm{e}}/m}{\sqrt{\omega_0^4 + \omega_e^4 - i^2\eta^2\omega_e^2 - 2\omega_0^2\omega_e^2}}$$

$$\Rightarrow \qquad A = \frac{F_{\mathrm{e}}/m}{\sqrt{\omega_0^4 + \omega_e^4 - 2\omega_0^2\omega_e^2 + \eta^2\omega_e^2}}$$

$$\Rightarrow \qquad A = \frac{F_{\mathrm{e}}/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_e^2\right)^2 + \eta^2\omega_e^2}} \qquad \blacksquare \ (1)$$

Pour évaluer θ, il serait préférable d'écrire notre nombre complexe z sous la forme $z = a + ib$ afin d'utiliser la propriété[2]

$$\theta = \arg(z) = \mathrm{arctan2}\left(\mathrm{Im}(z), \mathrm{Re}(z)\right) = \mathrm{arctan2}(b, a)$$

qui donnera plusieurs expression pour θ en fonction des signes de b et a.

[2] Référence : https://en.wikipedia.org/wiki/Atan2

Ainsi

$$z=\frac{F_{\mathrm{e}}}{m\left(\omega_0{}^2-\omega_e{}^2+i\,\eta\omega_e\right)} \quad\Rightarrow\quad z=\frac{F_{\mathrm{e}}}{m}\frac{1}{\left(\omega_0{}^2-\omega_e{}^2+i\,\eta\omega_e\right)}$$

$$\Rightarrow\quad z=\frac{F_{\mathrm{e}}}{m}\frac{1}{\left(\omega_0{}^2-\omega_e{}^2+i\,\eta\omega_e\right)}\frac{\left(\omega_0{}^2-\omega_e{}^2-i\,\eta\omega_e\right)}{\left(\omega_0{}^2-\omega_e{}^2-i\,\eta\omega_e\right)}$$

$$\Rightarrow\quad z=\frac{F_{\mathrm{e}}}{m}\frac{\omega_0{}^2-\omega_e{}^2-i\,\eta\omega_e}{\left(\omega_0{}^2-\omega_e{}^2\right)^2+\eta^2\omega_e{}^2}$$

$$\Rightarrow\quad z=\frac{F_{\mathrm{e}}}{m}\frac{\omega_0{}^2-\omega_e{}^2}{\left(\omega_0{}^2-\omega_e{}^2\right)^2+\eta^2\omega_e{}^2}-i\frac{F_{\mathrm{e}}}{m}\frac{\eta\omega_e}{\left(\omega_0{}^2-\omega_e{}^2\right)^2+\eta^2\omega_e{}^2}$$

Ceci nous donnera $z=a+ib$ tel que

$$a=\frac{F_{\mathrm{e}}}{m}\frac{\omega_0{}^2-\omega_e{}^2}{\left(\omega_0{}^2-\omega_e{}^2\right)^2+\eta^2\omega_e{}^2} \qquad \text{et} \qquad b=-\frac{F_{\mathrm{e}}}{m}\frac{\eta\omega_e}{\left(\omega_0{}^2-\omega_e{}^2\right)^2+\eta^2\omega_e{}^2}$$

Nous pourrons obtenir notre différence de phase $\theta=\delta-\varphi_{\mathrm{e}}$ par le calcul suivant :

$$\theta=\arctan2\left(b,a\right) \quad\Rightarrow\quad \theta=\arctan2\left(\frac{-\dfrac{F_{\mathrm{e}}}{m}\dfrac{\eta\omega_e}{\left(\omega_0{}^2-\omega_e{}^2\right)^2+\eta^2\omega_e{}^2}}{\dfrac{F_{\mathrm{e}}}{m}\dfrac{\omega_0{}^2-\omega_e{}^2}{\left(\omega_0{}^2-\omega_e{}^2\right)^2+\eta^2\omega_e{}^2}}\right)$$

$$\Rightarrow\quad \theta=\arctan2\left(\frac{-\dfrac{\eta\omega_e}{\left(\omega_0{}^2-\omega_e{}^2\right)^2+\eta^2\omega_e{}^2}}{\dfrac{\omega_0{}^2-\omega_e{}^2}{\left(\omega_0{}^2-\omega_e{}^2\right)^2+\eta^2\omega_e{}^2}}\right)$$

$$\Rightarrow\quad \theta=\arctan2\left(-\frac{\eta\omega_e}{\left(\omega_0{}^2-\omega_e{}^2\right)^2+\eta^2\omega_e{}^2}\frac{\left(\omega_0{}^2-\omega_e{}^2\right)^2+\eta^2\omega_e{}^2}{\omega_0{}^2-\omega_e{}^2}\right)$$

$$\Rightarrow\quad \theta=\arctan2\left(-\frac{\eta\omega_e}{\omega_0{}^2-\omega_e{}^2}\right)$$

$$\Rightarrow\quad \theta=\arctan2\left(\frac{\eta\omega_e}{\omega_e{}^2-\omega_0{}^2}\right)$$

Puisque $\eta\omega_e > 0$, nous avons trois cas à considérer :

- $\omega_e^2 = \omega_0^2$ ($\omega_e^2 - \omega_0^2 = 0$) : $\quad \theta = \dfrac{\pi}{2}$
- $\omega_e^2 > \omega_0^2$ ($\omega_e^2 - \omega_0^2 > 0$) : $\quad \theta = \arctan\left(\dfrac{\eta\omega_e}{\omega_e^2 - \omega_0^2}\right)$
- $\omega_e^2 < \omega_0^2$ ($\omega_e^2 - \omega_0^2 < 0$) : $\quad \theta = \arctan\left(\dfrac{\eta\omega_e}{\omega_0^2 - \omega_e^2}\right) + \pi$

En inversant la relation pour θ pour obtenir δ, nous aurons :

$$\delta = \theta + \varphi_\mathrm{e} \qquad \blacksquare \ (2)$$

La résonance dans un oscillateur harmonique amorti-entretenu

Pour maximiser l'amplitude A d'un mouvement harmonique amortie-entretenu MHAE, la fréquence d'entretien ω_e doit être égal à l'expression suivante :

Expression de l'amplitude A	Amplitude A maximale	Fréquence ω_e qui maximise A	
		(avec η)	(avec $\beta = \eta / 2$)
$A = \dfrac{F_\mathrm{e} / m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_e^2\right)^2 + \eta^2\omega_e^2}}$	$A = \dfrac{F_\mathrm{e} / m}{\eta\omega_0}$	$\omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - \dfrac{\eta^2}{2}}$	$\omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$

Dans le cas d'absence de résistance $\eta = 0$, la fréquence d'oscillation naturelle sera identique à la fréquence de résonance :

Fréquence d'oscillation	Fréquence d'entretien qui maximise A	Valeur maximale de l'amplitude
$\omega_\mathrm{a} = \omega_0$	$\omega_e = \omega_0$	$A = \infty$

Dans le cas d'amortissement $\omega_0 > \beta = \eta / 2$, la fréquence d'oscillation amortie sera pratiquement identique à la fréquence de résonance :

Fréquence d'oscillation	Fréquence d'entretien qui maximise A	Valeur maximale de l'amplitude
$\omega_\mathrm{a} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$	$\omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$	$A = \dfrac{F_\mathrm{e} / m}{2\beta\omega_0}$

Preuve :

À partir de l'expression de l'amplitude A dans le MHAE, effectuons la dérivée de cette expression par rapport à la fréquence d'entretien ω_e et égalisons cette expression à zéro afin de maximiser l'expression de A :

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\omega_e}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega_e}\left(\frac{F_{\mathrm{e}}/m}{\sqrt{\left(\omega_0{}^2-\omega_e{}^2\right)^2+\eta^2\omega_e{}^2}}\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad F_{\mathrm{e}}/m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega_e}\left(\left(\omega_0{}^2-\omega_e{}^2\right)^2+\eta^2\omega_e{}^2\right)^{-1/2}=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega_e}\left(\left(\omega_0{}^2-\omega_e{}^2\right)^2+\eta^2\omega_e{}^2\right)^{-1/2}=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-1}{2}\left(\left(\omega_0{}^2-\omega_e{}^2\right)^2+\eta^2\omega_e{}^2\right)^{-3/2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega_e}\left(\left(\omega_0{}^2-\omega_e{}^2\right)^2+\eta^2\omega_e{}^2\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\left(\omega_0{}^2-\omega_e{}^2\right)^2+\eta^2\omega_e{}^2\right)^{-3/2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega_e}\left(\omega_0{}^2-\omega_e{}^2\right)^2+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega_e}\eta^2\omega_e{}^2\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\left(\omega_0{}^2-\omega_e{}^2\right)^2+\eta^2\omega_e{}^2\right)^{-3/2}\left(2\left(\omega_0{}^2-\omega_e{}^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega_e}\left(\omega_0{}^2-\omega_e{}^2\right)+\eta^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega_e}\omega_e{}^2\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\left(\omega_0{}^2-\omega_e{}^2\right)^2+\eta^2\omega_e{}^2\right)^{-3/2}\left(2\left(\omega_0{}^2-\omega_e{}^2\right)\left(-2\omega_e\right)+\eta^2\left(2\omega_e\right)\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\left(\omega_0{}^2-\omega_e{}^2\right)^2+\eta^2\omega_e{}^2\right)^{-3/2}4\omega_e\left(\left(\omega_0{}^2-\omega_e{}^2\right)\left(-1\right)+\frac{\eta^2}{2}\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\left(\omega_0{}^2-\omega_e{}^2\right)^2+\eta^2\omega_e{}^2\right)^{-3/2}\left(\omega_e{}^2-\omega_0{}^2+\frac{\eta^2}{2}\right)=0 \qquad (\text{Suppose } \omega_e\neq 0)$$

$$\Rightarrow \quad \left(\left(\omega_0{}^2-\omega_e{}^2\right)^2+\eta^2\omega_e{}^2\right)^{-3/2}\left(\omega_e{}^2-\left(\omega_0{}^2-\frac{\eta^2}{2}\right)\right)=0$$

En raison de l'exposant négatif du terme $\left(\left(\omega_0{}^2-\omega_e{}^2\right)^2+\eta^2\omega_e{}^2\right)^{-3/2}$, il est impossible de définir une valeur à ω_e pour rendre l'expression nulle et satisfaire notre égalité.

Cependant, le 2^e^ terme $\omega_e{}^2 - \left(\omega_0{}^2 - \frac{\eta^2}{2}\right)$ peut être fixé à zéro si l'on peut satisfaire l'égalité

$$\omega_e{}^2 = \omega_0{}^2 - \frac{\eta^2}{2}$$

ce qui permet d'obtenir la fréquence de résonance

$$\omega_e = \sqrt{\omega_0{}^2 - \frac{\eta^2}{2}} \quad . \qquad \blacksquare \text{ (1)}$$

Évaluons maintenant l'expression de A lorsque $\omega_e = \sqrt{\omega_0{}^2 - \frac{\eta^2}{2}}$ a été déterminée pour maximiser A :

$$A = \frac{F_\mathrm{e}/m}{\sqrt{\left(\omega_0{}^2 - \omega_e{}^2\right)^2 + \eta^2\omega_e{}^2}} \qquad \text{(Expression de } A\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{F_\mathrm{e}/m}{\sqrt{\left(\omega_0{}^2 - \left(\sqrt{\omega_0{}^2 - \frac{\eta^2}{2}}\right)^2\right)^2 + \eta^2\left(\sqrt{\omega_0{}^2 - \frac{\eta^2}{2}}\right)^2}} \qquad \text{(Remplacer } \omega_e = \sqrt{\omega_0{}^2 - \frac{\eta^2}{2}}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{F_\mathrm{e}/m}{\sqrt{\left(\omega_0{}^2 - \left(\omega_0{}^2 - \frac{\eta^2}{2}\right)\right)^2 + \eta^2\left(\omega_0{}^2 - \frac{\eta^2}{2}\right)}}$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{F_\mathrm{e}/m}{\sqrt{\left(\frac{\eta^2}{2}\right)^2 + \eta^2\omega_0{}^2 - \frac{\eta^4}{2}}}$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{F_\mathrm{e}/m}{\sqrt{\eta^2\omega_0{}^2}}$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{F_\mathrm{e}/m}{\eta\omega_0} \qquad \blacksquare \text{ (2)}$$