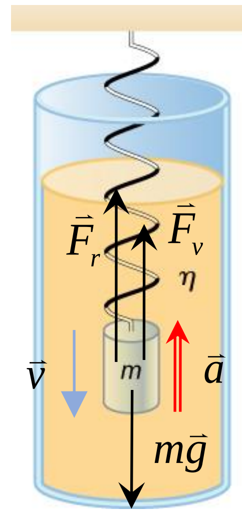
1.7a – Les oscillations amorties

L'équation différentielle de l'oscillateur harmonique amorti

L'oscillateur harmonique amorti OHA est une équation différentielle dont la construction provient d'un oscillateur harmonique simple MHS où l'on ajoute une résistance proportionnelle à la vitesse. Par exemple, l'application de la 2e loi de Newton à un système masse-ressort oscillant dans un liquide génère une équation différentielle de la forme d'un OHA :



https://pressbooks.bccampus.ca/universityphysicssandbox/chapter/damped-oscillations/

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \eta \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0{}^2 x = 0$$

où x : Position de l'objet selon l'axe x $(x = x(t))$

t : Temps écoulé durant le mouvement (s)

η : Facteur d'atténuation proportionnel à la vitesse $\eta = b/m$ (s^{-1})

ω_0 : Fréquence angulaire naturelle $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ (rad/s)

b : Coefficient de frottement (kg s^{-1})

m : La masse du bloc (kg)

k : Constante du ressort (N/m)

<u>Preuve :</u> (exemple du système masse-ressort oscillant dans un liquide)

Considérons un système masse-ressort oscillant grâce à la force du ressort $F_r = -kx$ et ralenti par une force de viscosité proportionnelle à la vitesse $F_v = -bv_x$. Appliquons la 2e loi de Newton selon l'axe x afin de former une équation différentielle :

$\sum F_x = ma_x \quad \Rightarrow \quad F_r + F_v = ma_x$ (Appliquer deux forces : F_r et F_v)

$\Rightarrow \quad -kx - bv_x = ma_x$ (Remplacer $F_r = -kx$ et $F_v = -bv_x$)

$\Rightarrow \quad -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}v_x = a_x$ (Diviser par m)

$\Rightarrow \quad -\omega_0{}^2 x - \eta v_x = a_x$ (Remplacer $\omega_0{}^2 = \frac{k}{m}$ et $\eta = \frac{b}{m}$)

$\Rightarrow \quad a_x + \eta v_x + \omega_0{}^2 x = 0$ (Mettre équation égale à zéro)

$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} + \eta v_x + \omega_0{}^2 x = 0$ (Remplacer $a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$)

$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t} + \eta \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0{}^2 x = 0 \quad \blacksquare$ (Remplacer $v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$)

La solution générale de l’oscillateur harmonique amorti

L’oscillateur harmonique amorti possède une solution générale de forme exponentielle. Lorsqu’on la propose à l’équation différentielle, celle-ci génère une contrainte sur l’ensemble des solutions possible par l’entremise d’un polynôme du 2e degré :

Équation différentielle	Solution générale	Tel que ($\beta = \eta / 2$)
$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t} + \eta \frac{\mathrm{d}\, x}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 x = 0$	$x(t) = A_1 e^{c_1 t} + A_2 e^{c_2 t}$	$c_1 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - {\omega_0}^2}$ $c_2 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - {\omega_0}^2}$

<u>Preuve :</u>

Posons la forme d’une solution générale acceptable $x = Ae^{ct}$ et appliquons cette solution à l’équation différentielle du OHA :

Soit : $x = Ae^{ct}$

$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \eta \frac{\mathrm{d}\, x}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 x = 0$ (Équation du OHA)

$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2 \left(Ae^{ct} \right)}{\mathrm{d}t^2} + \eta \frac{\mathrm{d}\left(Ae^{ct} \right)}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 \left(Ae^{ct} \right) = 0$ (Remplacer $x = Ae^{ct}$)

$\Rightarrow \quad \left(c^2\right) Ae^{ct} + \eta (c) Ae^{ct} + {\omega_0}^2 Ae^{ct} = 0$ (Appliquer la dérivée : $\frac{\mathrm{d}\, e^{ax}}{\mathrm{d}x} = ae^{x}$)

$\Rightarrow \quad c^2 + \eta\, c + {\omega_0}^2 = 0$ (Simplifier $x = Ae^{ct}$)

$\Rightarrow \quad c = \frac{-\eta \pm \sqrt{\eta^2 - 4{\omega_0}^2}}{2}$ (Résoudre polynôme du 2e degré)

$\Rightarrow \quad c = \frac{-\eta \pm 2\sqrt{\frac{\eta^2}{4} - {\omega_0}^2}}{2}$ (Factoriser le terme 4 hors de la racine carré)

$\Rightarrow \quad c = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - {\omega_0}^2}$ (Remplacer $\beta = \frac{\eta}{2}$)

$\Rightarrow \quad c = \begin{Bmatrix} c_1 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - {\omega_0}^2} \\ c_2 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - {\omega_0}^2} \end{Bmatrix}$ (Deux solutions au polynôme du 2e degré)

Puisqu’il y deux solutions possibles à un polynôme du 2e degré, la solution à l’équation différentielle la plus générale et complète se doit d’inclure les deux solutions du polynôme.

Ainsi : $$x(t) = A_1 e^{c_1 t} + A_2 e^{c_2 t} \quad \blacksquare$$

Les trois solutions particulières de l'oscillateur amorti

La forme générale de la solution à l'oscillateur amorti peut prendre trois formes complètement différentes selon les paramètres physiques $\beta = \eta/2$ et ω_0 de la situation. En raison de la résolution précédente d'un polynôme du 2e degré ($c^2 + \eta c + \omega_0{}^2 = 0$), les solutions admissibles impliquent l'apparition de la racine carrée d'un radical[1] provenant de la solution du polynôme du 2e degré. Ce calcul peut avoir trois solutions distinctes selon les valeurs β et ω_0 : réelle, imaginaire et nul.

Radical positif (deux solutions réelles)	Radical négatif (deux solutions imaginaires)	Radical nul (solution unique)
$\omega_0 < \beta$	$\omega_0 > \beta$	$\omega_0 = \beta$
$c = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0{}^2}$	$c = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0{}^2 - \beta^2}$	$c = -\beta$

Preuve du radical négatif :

Modifions la forme du radical afin de le rendre positif à partir de la forme générale de la solution *c*. Cette opération fera apparaitre le nombre imaginaire i :

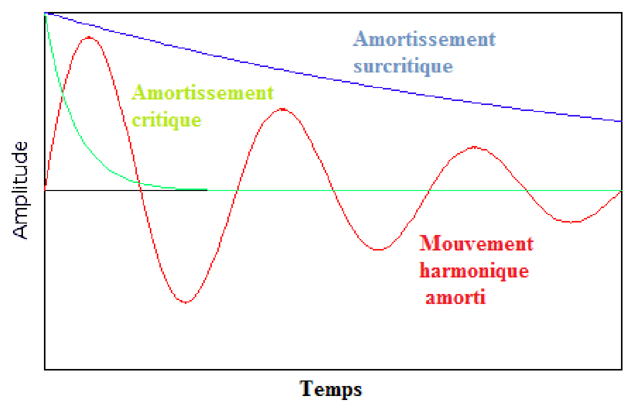
$$c = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0{}^2} \quad \Rightarrow \quad c = -\beta \pm \sqrt{-1}\sqrt{\omega_0{}^2 - \beta^2} \qquad \text{(Factoriser le signe négatif)}$$

$$\Rightarrow \quad c = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0{}^2 - \beta^2} \ \blacksquare \qquad \text{(Remplacer } i = \sqrt{-1}\text{)}$$

La représentation graphique des trois solutions particulières

Les trois solutions particulières proposent trois types d'oscillations :

1) Amortissement surcritique
   ($\omega_0 < \beta$)
2) Mouvement harmonique amorti
   ($\omega_0 > \beta$)
3) Amortissement critique
   ($\omega_0 = \beta$)



[1] Le radical Δ dans la résolution d'un polynôme du 2ième degré est égal à $\Delta = b^2 - 4ac$

Le mouvement harmonique amorti ($\omega_0 > \beta$)

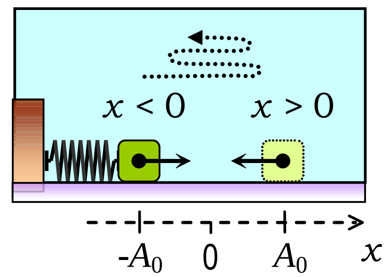
Le mouvement harmonique amorti MHA est la solution particulière de l'oscillateur amorti lorsque la valeur du radial admet deux solutions imaginaires ($\omega_0 > \beta$). À partir de la formule d'Euler, on peut représenter une somme de fonction exponentiel imaginaire à l'aide de la fonction cosinus.

Le MHA représente une oscillation à une fréquence angulaire ω_a légèrement inférieure à la fréquence naturelle d'oscillateur ω_0 dont l'amplitude diminue à un rythme exponentiel :

<u>Équation différentielle OHA :</u>
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \eta\frac{dx}{dt} + \omega_0^{\ 2}x = 0$$

<u>Solution MHA :</u>
$$x(t) = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega_a t + \phi)$$

<u>Condition :</u>
$$\omega_0 > \beta = \eta / 2$$



Le système masse-ressort oscillant dans l'eau est un OHA, le mouvement est donc un MHA dans certaines conditions.

où $x(t)$: Position de l'objet selon l'axe x (m)

t : Temps écoulé durant le mouvement (s)

A_0 : Amplitude du mouvement à $t = 0$ (m)

η : Constante de résistance au mouvement (s^{-1})

β : Constante de résistance $\beta = \eta / 2$ (s^{-1})

ω_0 : Fréquence angulaire naturelle (rad/s)

ω_a : Fréquence angulaire amortie (rad/s)

ϕ : Constante de phase (rad)

x_0 : Position de l'objet à $t = 0$ (m)

v_{x0} : Vitesse de l'objet à $t = 0$ (m)

tel que $\omega_a = \sqrt{\omega_0^{\ 2} - \beta^2}$ (Fréquence angulaire amortie)

$$A_0 = \sqrt{x_0^{\ 2} + \frac{(v_{x0} + \beta x_0)^2}{\omega_a^{\ 2}}}$$ (Amplitude des oscillations à $t = 0$)

$$\phi = \cos^{-1}(x_0 / A_0)$$ (Constante de phase)

Preuve :

À partir de la solution générale de l'oscillateur harmonique amorti, appliquons la condition $\omega_0 > \beta$ et développons la solution sous la forme d'une fonction cosinus afin d'obtenir le MHA. Débutons avec l'expression particulière des solutions du polynôme du 2ième degré c obtenu précédemment :

$$c = -\beta \pm i\sqrt{{\omega_0}^2 - \beta^2} \quad \Rightarrow \quad c = -\beta \pm i\omega_a \qquad \text{(Remplacer } \omega_a = \sqrt{{\omega_0}^2 - \beta^2}\text{)}$$

À partir de notre solution générale pour $x(t)$, remplaçons les expressions de c_1 et c_2 :

$$x = A_1 e^{c_1 t} + A_2 e^{c_2 t} \qquad \text{(Solution générale)}$$

$$\Rightarrow \quad x = A_1 e^{(-\beta + i\omega_a)t} + A_2 e^{(-\beta - i\omega_a)t} \qquad \text{(Remplacer } c_1 \text{ et } c_2\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = e^{-\beta t}\left(A_1 e^{i\omega_a t} + A_2 e^{-i\omega_a t}\right)} \qquad \text{(Factoriser } e^{-\beta t}\text{)}$$

La présence d'une exponentielle complexe nous permet d'affirmer que nous pouvons transformer l'expression précédente sous la forme d'une **fonction cosinus**[2] grâce à la formule d'Euler :

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\text{car} \qquad e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \qquad \text{et} \qquad e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)$$

Puisque nous avons deux constantes A_1 et A_2 à définir en fonction des conditions initiales x_0 et v_{x0}, nous pouvons les reformuler sous la forme suivante afin d'appliquer plus aisément la formule d'Euler :

$$A_1 = \frac{A_0}{2} e^{i\phi} \qquad \text{et} \qquad A_2 = \frac{A_0}{2} e^{-i\phi}$$

Ce choix est astucieux, car il nous permettra d'introduire dans notre solution finale $x(t)$ un terme d'amplitude initiale A_0 à $x = 0$ et un terme de phase ϕ par analogie avec le MHS.

Développons notre équation précédente avec ces nouveaux éléments :

$$x = e^{-\beta t}\left(A_1 e^{i\omega_a t} + A_2 e^{-i\omega_a t}\right) \qquad \text{(Équation précédente)}$$

$$\Rightarrow \quad x = e^{-\beta t}\left(\left(\frac{A_0}{2} e^{i\phi}\right) e^{i\omega_a t} + \left(\frac{A_0}{2} e^{-i\phi}\right) e^{-i\omega_a t}\right) \qquad \text{(Remplacer } A_1 = \frac{A_0}{2} e^{i\phi} \text{ et } A_2 = \frac{A_0}{2} e^{-i\phi}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{A_0}{2} e^{-\beta t}\left(e^{i\phi} e^{i\omega_a t} + e^{-i\phi} e^{-i\omega_a t}\right) \qquad \text{(Factoriser } \frac{A_0}{2}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{A_0}{2} e^{-\beta t}\left(e^{i(\omega_a t + \phi)} + e^{-i(\omega_a t + \phi)}\right) \qquad \text{(Distribuer } e^{i\phi}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_a t + \phi)} \quad \blacksquare \qquad \text{(Formule d'Euler : } \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\text{)}$$

---

[2] Les fonctions trigonométriques sont basées sur la relation suivante : $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

Nous pouvons maintenant passer à l'évaluation de l'amplitude A_0 et la constante de phase ϕ en fonction des conditions initiales x_0 et v_{x0}. Pour réaliser cette tâche, évaluons l'expression de la vitesse $v_x(t)$ à partir de sa définition :

$$v_x = \frac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(Définition de la vitesse } v_x(t)\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad v_x = \frac{\mathrm{d}\left(A_0 e^{-\beta t}\cos\left(\omega_\mathrm{a} t+\varphi\right)\right)}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(Remplacer } x(t)\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad v_x = A_0\,\frac{\mathrm{d}\left(e^{-\beta t}\cos\left(\omega_\mathrm{a} t+\varphi\right)\right)}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(Factoriser } A_0\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad v_x = A_0\left[\cos\left(\omega_\mathrm{a} t+\varphi\right)\frac{\mathrm{d}\left(e^{-\beta t}\right)}{\mathrm{d}t}+e^{-\beta t}\,\frac{\mathrm{d}\left(\cos\left(\omega_\mathrm{a} t+\varphi\right)\right)}{\mathrm{d}t}\right] \qquad \left(\frac{\mathrm{d}(fg)}{\mathrm{d}x}=f\,\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}+g\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)$$

$$\Rightarrow \quad v_x = A_0\left[\cos(\omega_\mathrm{a} t+\phi)\left(-\beta e^{-\beta t}\right)+e^{-\beta t}(-\omega_\mathrm{a})\sin(\omega_\mathrm{a} t+\phi)\right] \qquad \left(\frac{\mathrm{d}\,e^{ax}}{\mathrm{d}x}=ae^{x},\ \frac{\mathrm{d}\cos(ax)}{\mathrm{d}x}=-a\sin(ax)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_x = A_0 e^{-\beta t}\left[-\beta\cos(\omega_\mathrm{a} t+\phi)-\omega_\mathrm{a}\sin(\omega_\mathrm{a} t+\phi)\right]} \qquad \text{(Factoriser } e^{-\beta t}\text{)}$$

Pour évaluer l'expression de nos constantes A_0 et ϕ, nous devons poser nos conditions initiales à nos équations de position et de vitesse :

<u>Position initiale :</u>

$$x(t=0)=x_0 \qquad \text{(Position à } t=0\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad x_0 = A_0 e^{-\beta(0)}\cos(\omega_\mathrm{a}(0)+\phi) \qquad \text{(Remplacer } t=0 \text{ dans } x(t)\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad x_0 = A_0\cos(\phi) \qquad \text{(Simplifier)}$$

$$\Rightarrow \quad \cos(\phi)=\frac{x_0}{A_0} \qquad \text{(Isoler } \cos(\phi)\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\phi=\cos^{-1}\left(\frac{x_0}{A_0}\right)} \quad \blacksquare \qquad \text{(Isoler } \phi\text{)}$$

<u>Vitesse initiale :</u>

$$v_x(t=0)=v_{x0} \qquad \text{(Vitesse à } t=0\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad v_{x0} = A_0 e^{-\beta(0)}\left[-\beta\cos(\omega_\mathrm{a}(0)+\phi)-\omega_\mathrm{a}\sin(\omega_\mathrm{a}(0)+\phi)\right] \qquad \text{(Remplacer } t=0 \text{ dans } v_x(t)\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad v_{x0} = A_0\left[-\beta\cos(\phi)-\omega_\mathrm{a}\sin(\phi)\right] \qquad \text{(Simplifier)}$$

Continuons à simplifier notre expression afin d'isoler $\sin(\phi)$:

$$v_{x0} = A_0[-\beta\cos(\phi) - \omega_a \sin(\phi)]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v_{x0}}{A_0} = -\beta\cos(\phi) - \omega_a \sin(\phi) \qquad \text{(Diviser par } A_0\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \sin(\phi) = -\left(\frac{v_{x0}}{A_0\omega_a} + \frac{\beta\cos(\phi)}{\omega_a}\right) \qquad \text{(Isoler } \sin(\phi)\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \sin(\phi) = -\left(\frac{v_{x0}}{A_0\omega_a} + \frac{\beta(x_0 / A_0)}{\omega_a}\right) \qquad \text{(Remplacer } \cos(\phi) = \frac{x_0}{A_0}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sin(\phi) = -\left(\frac{v_{x0} + \beta x_0}{A_0\omega_a}\right)} \qquad \text{(Réécriture)}$$

Afin d'isoler l'amplitude A_0, appliquons l'identité trigonométrique suivante :

$$\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) = 1 \qquad \text{(Identité trigonométrique)}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{x_0}{A_0}\right)^2 + \left(-\left(\frac{v_{x0} + \beta x_0}{A_0\omega_a}\right)\right)^2 = 1 \qquad \text{(Remplacer } \cos(\phi) = \frac{x_0}{A_0} \text{ et } \sin(\phi) = -\left(\frac{v_{x0} + \beta x_0}{A_0\omega_a}\right)\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x_0{}^2}{A_0{}^2} + \frac{(v_{x0} + \beta x_0)^2}{A_0{}^2\omega_a{}^2} = 1 \qquad \text{(Appliquer le carré)}$$

$$\Rightarrow \quad A_0{}^2 = x_0{}^2 + \frac{(v_{x0} + \beta x_0)^2}{\omega_a{}^2} \qquad \text{(Isoler } A_0{}^2\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A_0 = \sqrt{x_0{}^2 + \frac{(v_{x0} + \beta x_0)^2}{\omega_a{}^2}}} \quad \blacksquare \qquad \text{(Isoler } A_0\text{)}$$

L'amortissement surcritique (régime apériodique) ($\omega_0 < \beta$)

Le mouvement harmonique amorti surcritique MHAS est la solution particulière de l'oscillateur amorti lorsque la valeur du radial admet deux solutions réelle ($\omega_0 < \beta$).

Le MHAS représente un mouvement qui n'est pas périodique, mais un mouvement qui s'atténue selon le produit d'une fonction exponentielle avec une fonction hyperbolique :

Équation différentielle OHA : $$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \eta \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 x = 0$$

Solution MHAS : $$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cosh(\sigma t + \varphi)$$

Condition : $$\omega_0 < \beta = \eta / 2$$

où $x(t)$: Position de l'objet selon l'axe x (m)
t : Temps écoulé durant le mouvement (s)
A_0 : Amplitude du mouvement à $t = 0$ (m)
η : Constante de résistance au mouvement (s^{-1})
β : Constante de résistance $\beta = \eta / 2$ (s^{-1})
ω_0 : Fréquence angulaire naturelle (rad/s)
σ : Fréquence angulaire surcritique (rad/s)
ϕ : Constante de phase (rad)
x_0 : Position de l'objet à $t = 0$ (m)
v_{x0} : Vitesse de l'objet à $t = 0$ (m)

tel que $\sigma = \sqrt{\beta^2 - {\omega_0}^2}$ (Fréquence angulaire surcritique)

$A_0 = \sqrt{{x_0}^2 - \frac{(v_{x0} + \beta\, x_0)^2}{\sigma^2}}$ (Amplitude du mouvement à $t = 0$)

$\varphi = \operatorname{arccosh}(x_0 / A_0)$ (Constante de phase)

Preuve :

À partir de la solution générale de l'oscillateur harmonique amorti, appliquons la condition $\omega_0 < \beta$ et développons la solution sous la forme d'une fonction cosinus hyperbolique afin d'obtenir le MHAS. Débutons avec l'expression particulière des solutions du polynôme du 2e degré c obtenu précédemment :

$c = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - {\omega_0}^2} \quad \Rightarrow \quad c = -\beta \pm \sigma$ (Remplacer $\sigma = \sqrt{\beta^2 - {\omega_0}^2}$)

À partir de notre solution générale pour $x(t)$, remplaçons les expressions de c_1 et c_2 :

$$x = A_1 e^{c_1 t} + A_2 e^{c_2 t} \qquad \text{(Solution générale)}$$

$$\Rightarrow \quad x = A_1 e^{(-\beta+\sigma)t} + A_2 e^{(-\beta-\sigma)t} \qquad \text{(Remplacer } c_1 \text{ et } c_2\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = e^{-\beta t}\left(A_1 e^{\sigma t} + A_2 e^{-\sigma t}\right)} \qquad \text{(Factoriser } e^{-\beta t}\text{)}$$

La présence d'une exponentielle réelle nous permet d'affirmer que nous pouvons transformer l'expression précédente sous la forme d'une **<u>fonction cosinus hyperbolique</u>**[3]:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Puisque nous avons deux constantes A_1 et A_2 à définir en fonction des conditions initiales x_0 et v_{x0}, nous pouvons les reformuler sous la forme suivante afin d'appliquer plus aisément la fonction cosinus hyperbolique :

$$A_1 = \frac{A_0}{2} e^{\varphi} \qquad \text{et} \qquad A_2 = \frac{A_0}{2} e^{-\varphi}$$

Ce choix est astucieux, car il nous permettra d'introduire dans notre solution finale $x(t)$ un terme d'amplitude initiale A_0 à $x = 0$ et un terme de phase ϕ par analogie avec le MHS.

Développons notre équation précédente avec ces nouveaux éléments :

$$x = e^{-\beta t}\left(A_1 e^{\sigma t} + A_2 e^{-\sigma t}\right) \qquad \text{(Équation précédente)}$$

$$\Rightarrow \quad x = e^{-\beta t}\left(\left(\frac{A_0}{2} e^{\varphi}\right) e^{\sigma t} + \left(\frac{A_0}{2} e^{-\varphi}\right) e^{-\sigma t}\right) \qquad \text{(Remplacer } A_1 = \frac{A_0}{2} e^{\varphi} \text{ et } A_2 = \frac{A_0}{2} e^{-\varphi}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{A_0}{2} e^{-\beta t}\left(e^{\varphi} e^{\sigma t} + e^{-\varphi} e^{-\sigma t}\right) \qquad \text{(Factoriser } \frac{A_0}{2}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{A_0}{2} e^{-\beta t}\left(e^{\sigma t+\varphi} + e^{-\sigma t+\varphi}\right) \qquad \text{(Distribuer } e^{\varphi}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = A_0 e^{-\beta t} \cosh(\sigma t + \varphi)} \quad \blacksquare \qquad \left(\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$$

[3] Les fonctions trigonométriques sont basées sur la relation suivante : $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

Nous pouvons maintenant passer à l'évaluation de l'amplitude A_0 et la constante de phase ϕ en fonction des conditions initiales x_0 et v_{x0}. Pour réaliser cette tâche, évaluons l'expression de la vitesse $v_x(t)$ à partir de sa définition :

$$v_x = \frac{\mathrm{d}\, x(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(Définition de la vitesse } v_x(t)\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad v_x = \frac{\mathrm{d}\left(A_0 e^{-\beta t}\cosh(\sigma t + \varphi)\right)}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(Remplacer } x(t)\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad v_x = A_0 \frac{\mathrm{d}\left(e^{-\beta t}\cosh(\sigma t + \varphi)\right)}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(Factoriser } A_0\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad v_x = A_0\left[\cosh(\sigma t + \varphi)\frac{\mathrm{d}\left(e^{-\beta t}\right)}{\mathrm{d}t} + e^{-\beta t}\frac{\mathrm{d}\left(\cosh(\sigma t + \varphi)\right)}{\mathrm{d}t}\right] \qquad \left(\frac{\mathrm{d}(fg)}{\mathrm{d}x} = f\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} + g\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)$$

$$\Rightarrow \quad v_x = A_0\left[\cosh(\sigma t + \varphi)\left(-\beta e^{-\beta t}\right) + e^{-\beta t}(-\sigma)\sinh(\sigma t + \varphi)\right] \qquad \left(\frac{\mathrm{d}e^{ax}}{\mathrm{d}x} = ae^x, \frac{\mathrm{d}\cosh(ax)}{\mathrm{d}x} = -a\sinh(ax)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_x = A_0 e^{-\beta t}\left[-\beta\cosh(\sigma t + \varphi) - \sigma\sinh(\sigma t + \varphi)\right]} \qquad \text{(Factoriser } e^{-\beta t}\text{)}$$

Pour évaluer l'expression de nos constantes A_0 et ϕ, nous devons poser nos conditions initiales à nos équations de position et de vitesse :

<u>Position initiale :</u>

$$x(t=0) = x_0 \qquad \text{(Position à } t = 0\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad x_0 = A_0 e^{-\beta(0)}\cosh(\sigma(0) + \varphi) \qquad \text{(Remplacer } t = 0 \text{ dans } x(t)\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad x_0 = A_0\cosh(\varphi) \qquad \text{(Simplifier)}$$

$$\Rightarrow \quad \cosh(\varphi) = \frac{x_0}{A_0} \qquad \text{(Isoler } \cos(\phi)\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\varphi = \operatorname{arcosh}\left(\frac{x_0}{A_0}\right)} \quad \blacksquare \qquad \text{(Isoler } \phi,\ \operatorname{arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)\text{)}$$

Vitesse initiale :

$$v_x(t=0)=v_{x0} \qquad \text{(Vitesse à } t=0\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad v_{x0}=A_0 e^{-\beta(0)}\left[-\beta\cosh\left(\sigma(0)+\varphi\right)-\sigma\sinh\left(\sigma(0)+\varphi\right)\right] \qquad \text{(Remplacer } t=0 \text{ dans } v_x(t)\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad v_{x0}=A_0\left[-\beta\cosh(\varphi)-\sigma\sinh(\varphi)\right] \qquad \text{(Simplifier)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v_{x0}}{A_0}=-\beta\cosh(\varphi)-\sigma\sinh(\varphi) \qquad \text{(Diviser par } A_0\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \sinh(\varphi)=-\left(\frac{v_{x0}}{A_0\sigma}+\frac{\beta\cosh(\varphi)}{\sigma}\right) \qquad \text{(Isoler } \sin(\phi)\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \sinh(\varphi)=-\left(\frac{v_{x0}}{A_0\sigma}+\frac{\beta(x_0/A_0)}{\sigma}\right) \qquad \text{(Remplacer } \cosh(\varphi)=\frac{x_0}{A_0}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sinh(\varphi)=-\left(\frac{v_{x0}+\beta x_0}{A_0\sigma}\right)} \qquad \text{(Réécriture)}$$

Afin d'isoler l'amplitude A_0, appliquons l'identité hyperbolique suivante :

$$\cosh^2(\varphi)-\sinh^2(\varphi)=1 \qquad \text{(Identité hyperbolique)}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{x_0}{A_0}\right)^2-\left(-\left(\frac{v_{x0}+\beta x_0}{A_0\sigma}\right)\right)^2=1 \qquad \text{(Remplacer } \cosh(\varphi)=\frac{x_0}{A_0} \text{ et } \sinh(\varphi)=-\left(\frac{v_{x0}+\beta x_0}{A_0\sigma}\right)\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x_0^{\,2}}{A_0^{\,2}}-\frac{\left(v_{x0}+\beta x_0\right)^2}{A_0^{\,2}\sigma^2}=1 \qquad \text{(Appliquer le carré)}$$

$$\Rightarrow \quad A_0^{\,2}=x_0^{\,2}-\frac{\left(v_{x0}+\beta x_0\right)^2}{\sigma^2} \qquad \text{(Isoler } A_0^{\,2}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A_0=\sqrt{x_0^{\,2}-\frac{\left(v_{x0}+\beta x_0\right)^2}{\sigma^2}}} \quad \blacksquare \qquad \text{(Isoler } A_0\text{)}$$

L'amortissement critique ($\omega_0 = \beta$)

Le mouvement harmonique amorti critique MHAC est la solution particulière de l'oscillateur amorti lorsque la valeur du radial admet une solution réelle ($\omega_0 = \beta$).

Le MHAC représente un mouvement qui n'est pas périodique, mais un mouvement qui s'atténue selon le produit d'une fonction exponentielle avec une fonction linéaire :

Équation différentielle OHA : $$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \eta \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}t} + \omega_0{}^2 x = 0$$

Solution MHAC : $$x = e^{-\beta t}\left(x_0 + \left(\beta\, x_0 + v_{x0}\right)t\right)$$

Condition : $$\omega_0 = \beta = \eta / 2$$

où $x(t)$: Position de l'objet selon l'axe x (m)
t : Temps écoulé durant le mouvement (s)
η : Constante de résistance au mouvement (s^{-1})
β : Constante de résistance $\beta = \eta / 2$ (s^{-1})
ω_0 : Fréquence angulaire naturelle (rad/s)
x_0 : Position de l'objet à $t = 0$ (m)
v_{x0} : Vitesse de l'objet à $t = 0$ (m)

Preuve :

À partir de la solution générale de l'oscillateur harmonique amorti, appliquons la condition $\omega_0 = \beta$ et développons la solution sous la forme d'une fonction d'une fonction linéaire avec décroissance exponentiel.

Débutons avec l'expression particulière des solutions du polynôme du 2e degré c obtenu précédemment :

$c = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0{}^2} \quad \Rightarrow \quad c = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - (\beta)^2}$ (Remplacer $\omega_0 = \beta$)

$\Rightarrow \quad c = -\beta$

À partir de notre solution générale pour $x(t)$, remplaçons les expressions de c_1 et c_2 :

$x = A_1 e^{c_1 t} + A_2 e^{c_2 t}$ (Solution générale)

$\Rightarrow \quad x = A_1 e^{(-\beta)t} + A_2 e^{(-\beta)t}$ (Remplacer c_1 et c_2 qui sont identique)

$\Rightarrow \quad \boxed{x = e^{-\beta t}\left(A_1 + A_2\right)}$ (Factoriser $e^{-\beta t}$)

Évaluons l'expression de la vitesse $v_x(t)$ à partir de la forme de l'équation de la position $x(t)$:

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad v_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{-\beta t}\left(A_1 + A_2\right)\right)$$

$$\Rightarrow \quad v_x = \left(A_1 + A_2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{-\beta t}\right) + e^{-\beta t}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(A_1 + A_2\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_x = -\beta\left(A_1 + A_2\right)e^{-\beta t} + e^{-\beta t}\left(\frac{\mathrm{d}\,A_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\,A_2}{\mathrm{d}t}\right)}$$

En appliquant la condition initiale x_0, nous pouvons déterminer la relation suivante :

$$x(t=0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = e^{-\beta(0)}\left(A_1\big|_{t=0} + A_2\big|_{t=0}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x_0 = \left(A_1\big|_{t=0} + A_2\big|_{t=0}\right)}$$

En appliquant la condition initiale v_{x0}, nous pouvons déterminer la relation suivante :

$$v_x(t=0) = v_{x0} \quad \Rightarrow \quad v_{x0} = -\beta\left(A_1\big|_{t=0} + A_2\big|_{t=0}\right)e^{-\beta(0)} + e^{-\beta(0)}\left(\frac{\mathrm{d}\,A_1}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} + \frac{\mathrm{d}\,A_2}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}\right)$$

$$\Rightarrow \quad v_{x0} = -\beta\left(A_1\big|_{t=0} + A_2\big|_{t=0}\right) + \left(\frac{\mathrm{d}\,A_1}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} + \frac{\mathrm{d}\,A_2}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_{x0} = -\beta x_0 + \left(\frac{\mathrm{d}\,A_1}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} + \frac{\mathrm{d}\,A_2}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}\right)} \qquad \text{(Remplacer } x_0 = \left(A_1\big|_{t=0} + A_2\big|_{t=0}\right)\text{)}$$

Pour solutionner les deux relations en lien avec x_0 et v_{x0}, proposons

$$A_1 = x_0 \quad \text{et} \quad A_2 = \left(\beta x_0 + v_{x0}\right)t$$

et vérifions que ces deux choix satisfaits nous deux relations :

$$x_0 = \left(A_1\big|_{t=0} + A_2\big|_{t=0}\right)$$

$$\Rightarrow \quad x_0 = \left(x_0\right) + \left(\left(\beta x_0 + v_{x0}\right)(0)\right)$$

$$\Rightarrow \quad x_0 = x_0$$

$$v_{x0} = -\beta x_0 + \left(\frac{\mathrm{d}\,A_1}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} + \frac{\mathrm{d}\,A_2}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}\right)$$

$$\Rightarrow \quad v_{x0} = -\beta x_0 + \left(\frac{\mathrm{d}\left(x_0\right)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} + \frac{\mathrm{d}\left(\left(\beta x_0 + v_{x0}\right)t\right)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}\right)$$

$$\Rightarrow \quad v_{x0} = -\beta x_0 + \left((0) + \left(\beta x_0 + v_{x0}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \quad v_{x0} = v_{x0}$$

Puisque nos définitions de $A_1 = x_0$ et $A_2 = (\beta x_0 + v_{x0})t$ sont adéquate, nous arrivons à la conclusion que l'équation de la position

$$x = e^{-\beta t}\left(x_0 + (\beta x_0 + v_{x0})t\right)$$

est une solution adéquate pour notre mouvement harmonique amorti critique. ■

Autres formulations des solutions de l'oscillateur harmonique amorti

À partir d'identité trigonométrique, il est possible d'exprimer nos équations du mouvement MHA et MHAS sous différente : formes :

	Équation du mouvement	Expression de la fréquence
Oscillation Amortie ($\omega_0 > \beta$)	$x = e^{-\beta t}\left(x_0 \cos(\omega_a t) + \dfrac{\beta x_0 + v_{x0}}{\omega_a}\sin(\omega_a t)\right)$	$\omega_a = \sqrt{\omega_0^{\,2} - \beta^2}$
Amortissement surcritique ($\omega_0 < \beta$)	$x = e^{-\beta t}\left(x_0 \cosh(\sigma t) + \dfrac{\beta x_0 + v_{x0}}{\sigma}\sinh(\sigma t)\right)$	$\sigma = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^{\,2}}$
Amortissement Critique ($\omega_0 = \beta$)	$x = e^{-\beta t}\left(x_0 + (\beta x_0 + v_{x0})t\right)$	$\omega_0 = \beta$