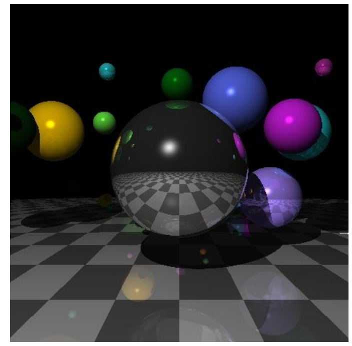
Chapitre 7.6 – Les transformations dans le *ray tracer*

L'espace monde et l'espace objet

L'espace monde est l'espace dans lequel la scène est définie. Ceci comprend la position et l'orientation de la **caméra** ainsi que la position et la forme des **géométries**. Une géométrie définie dans un autre espace devra être transformée préalablement vers l'espace monde avant qu'elle puisse être adéquatement visualisée.



http://mike.newgrounds.com/news/
Scène comprenant plusieurs sphères unitaires transformées permettant à celles-ci d'être visualisées à différentes positions avec des rayons différents.

En infographie, un artiste réalise toujours la construction d'un **modèle 3d** (ensemble de géométries) dans un espace propre au modèle. Cet espace porte le nom **d'espace objet**. Habituellement, le modèle est représenté dans le plan *xy* et il centré avec l'origine.

http://www.deskeng.com/de/seeing-ray-tracing-in-a-different-light/
Logiciel permettant à un artiste de construire un modèle 3d dans un espace objet.

Puisque les dimensions choisies par l'artiste ne coïncident pas toujours avec les dimensions requises en espace monde, il est important de transformer le modèle adéquatement. C'est pour cette raison que l'on applique des matrices de transformation comme **l'homothétie** (agrandir ou rétrécir), la **rotation** (tourner adéquatement) et la **translation** (positionnement adéquat) aux modèles 3d.

La transformation de l'espace objet vers l'espace monde

Puisque le produit matriciel n'est pas commutatif, il est important de choisir un ordre dans lequel nous allons transformer nos géométries. Puisque nos transformations linéaires sont définies par rapport à l'origine, nous allons choisir l'ordre[1] suivant :

1	2	3	4	5
Homothétie Sc	Rotation R_x	Rotation R_y	Rotation R_z	Translation Tr

En raison de notre convention[2] de notre produit entre nos matrices et nos vecteurs, nous devons transformer un vecteur $\vec{r}_\mathrm{o}$ dans l'espace objet en un vecteur $\vec{r}_\mathrm{m}$ dans l'espace monde à l'aide de l'expression

$$\vec{r}_\mathrm{m} = M_{\mathrm{o}\to\mathrm{m}}\ \vec{r}_\mathrm{o} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{r}_\mathrm{m} = Tr \cdot R_z \cdot R_y \cdot R_x \cdot Sc\ \vec{r}_\mathrm{o}$$

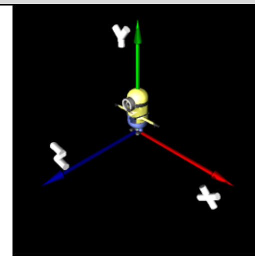
où $M_{\mathrm{o}\to\mathrm{m}} = Tr \cdot R_z \cdot R_y \cdot R_x \cdot Sc$ est la matrice de transformation de l'espace objet vers l'espace monde.

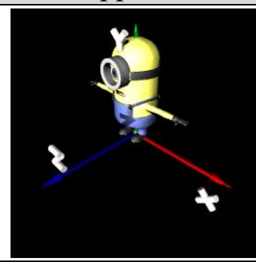
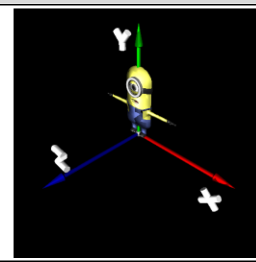
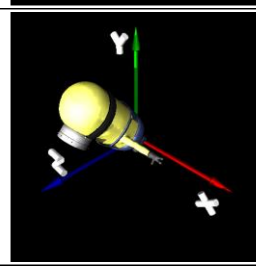
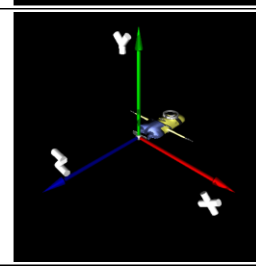
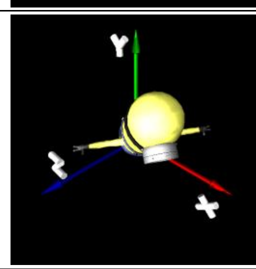
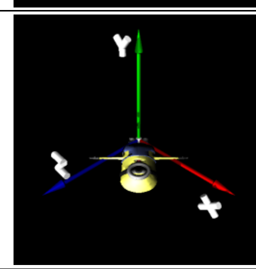
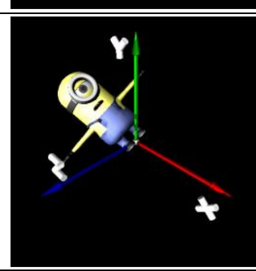
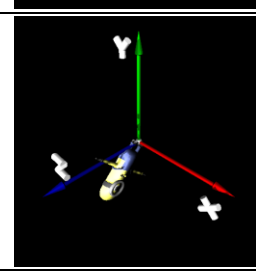
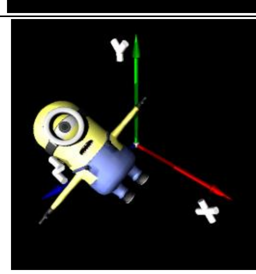
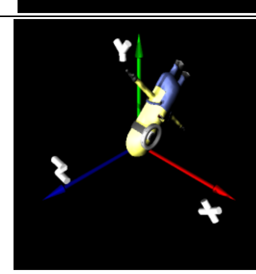
---

[1] Cet ordre est traditionnel, mais il est possible de changer l'ordre des matrices de rotation.

[2] Convention droite-gauche : $\vec{v} = M\,\vec{u}$

Exemple :

<table>
<tr><th colspan="3">Dans l'espace monde</th></tr>
<tr>
<td>Caméra en position :
$\vec{r}_{\text{cam}} = 15\vec{i} + 15\vec{j} + 15\vec{k}$</td>
<td>Position de l'observation :
$\vec{r}_{\text{regard}} = 0$ (origine)</td>
<td>
Géométrie unitaire visualisée dans l'espace monde sans transformation.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Matrices de transformation</th><th colspan="2">Visualisation dans l'espace monde après l'application des transformations</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Homothétie Sc
Exemple de gauche :
$Sc = (2,2,2)$
Exemple de droite :
$Sc = (1.5\ ,1.5,\ 0.5)$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>Rotation R_x
Exemple de gauche :
$\theta_x = 45°$
Exemple de droite :
$\theta_x = -90°$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>Rotation R_y
Exemple de gauche :
$\theta_y = 60°$
Exemple de droite :
$\theta_y = -135$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>Rotation R_z
Exemple de gauche :
$\theta_z = 90°$
Exemple de droite :
$\theta_z = -90°$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>Translation Tr
Exemple de gauche :
$Tr = (5,\ 0,\ 5)$
Exemple de droite :
$Tr = (5,\ 10,\ 0)$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">P.S. La géométrie semble plus grosse, car elle est plus près de la caméra.</td></tr>
</table>

La transformation de l'espace monde vers l'espace objet

En raison de l'ordre précédent dans la transformation de l'espace objet vers l'espace monde, nous pouvons réaliser une transformation inverse afin de passer de l'espace monde vers l'espace objet si l'on respecte l'ordre de matrice suivante avec les valeurs numériques appropriées :

1	2	3	4	5
Translation Tr^{-1}	Rotation R_z^{-1}	Rotation R_y^{-1}	Rotation R_x^{-1}	Homothétie Sc^{-1}

Avec cette transformation, nous pouvons transformer un vecteur $\vec{r}_{\mathrm{m}}$ dans l'espace monde en un vecteur $\vec{r}_{\mathrm{o}}$ dans l'espace objet à l'aide de l'expression

$$\vec{r}_{\mathrm{o}} = M_{\mathrm{m}\to\mathrm{o}}\ \vec{r}_{\mathrm{m}} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{r}_{\mathrm{o}} = Sc^{-1} \cdot R_x^{-1} \cdot R_y^{-1} \cdot R_z^{-1} \cdot Tr^{-1}\,\vec{r}_{\mathrm{m}}$$

où $M_{\mathrm{m}\to\mathrm{o}} = Sc^{-1} \cdot R_x^{-1} \cdot R_y^{-1} \cdot R_z^{-1} \cdot Tr^{-1}$ est la matrice de transformation de l'espace monde vers l'espace objet.

L'algorithme du calcul de l'intersection dans un *ray tracer* avec l'usage des matrice de transformation

Dans le *ray tracer*, on utiliser les matrices de transformations pour déformer des géométries de base (sphère, cylindre, cône), mais réaliser le calcul de l'intersection sur ces nouvelles géométries devient théoriquement très difficile. Ainsi, on utilise la transformation monde vers objet pour transformer un rayon afin de réaliser un calcul d'intersection dans l'espace objet ce qui a été préalablement implémenté. Cette transformation permet de contourner une difficulté théorique.

Voici ce qui est connu avant de réaliser les calculs appropriés :

Espace monde	Espace objet
$\vec{o}$: Origine de l'espace monde ($\vec{o} = 0$). $\vec{r}_0$: Position initiale du rayon dans l'espace monde. $\vec{v}$: Orientation du rayon dans l'espace monde. $M_{\mathrm{m}\to\mathrm{o}}$: Transformation de l'espace monde à l'espace objet.	$\vec{o}$: Origine de l'espace objet ($\vec{o} = 0$). $M_{\mathrm{o}\to\mathrm{m}}$: Transformation de l'espace objet à l'espace monde.
➢ Rayon : $\vec{r}_{\mathrm{ray}} = \vec{r}_0 + \vec{v}\,t$ ➢ Calcul de l'intersection : non implémenté	➢ Rayon : $\vec{r}_{\mathrm{ray(o)}}$ à obtenir par transformation ➢ Calcul de l'intersection : implémenté

Voici ce que l'on désire déterminer :

- t_{int} : Temps afin que le rayon réalise l'intersection avec la géométrie (invariant).
- $\vec{n}_{\mathrm{int}}$: Normale à la surface de la géométrie à l'endroit de l'intersection dans l'espace monde.

Voici un algorithme de calcul d'intersection entre un rayon $\vec{r}_{\text{ray}}$ et une géométrie en utilisant les matrices de transformation :

Étape #1 : Transformation du rayon $\vec{r}_{\text{ray}} = \vec{r}_0 + \vec{v}\,t$ de l'espace monde vers l'espace objet

a) Transformer de l'origine du rayon $\vec{r}_0$ de l'espace monde vers l'espace objet :

$$\vec{r}_{0\text{o}} = M_{\text{m}\to\text{o}}\vec{r}_0$$

b) Transformer de l'orientation du rayon $\vec{v}$ de l'espace monde vers l'espace objet :

$$\vec{o}_{\text{m}\to\text{o}} = M_{\text{m}\to\text{o}}\vec{o} \qquad \text{(origine)}$$
$$\vec{v}_{\text{m}\to\text{o}} = M_{\text{m}\to\text{o}}\vec{v} \qquad \text{(direction à transformer)}$$
$$\vec{v}_{\text{o}} = \vec{v}_{\text{m}\to\text{o}} - \vec{o}_{\text{m}\to\text{o}} \qquad \text{(nouvelle direction)}$$

P.S. Il est important **de ne pas normaliser** $\vec{v}_{\text{o}}$, car c'est ce qui permet d'avoir *t* comme invariant.

Étape #2 : Réalisation du test de l'intersection

a) Construire le rayon transformé $\vec{r}_{\text{ray(o)}} = \vec{r}_{0\text{o}} + \vec{v}_{\text{o}}t$.

b) Tester l'intersection entre le rayon transformé $\vec{r}_{\text{ray(o)}}$ et la géométrie dans l'espace objet.

c) Obtenir le temps d'intersection approprié $t = t_{\text{int}}$.

d) S'il y a eu intersection, évaluer la normale à la surface $\vec{n}$ à l'endroit de l'intersection. Sinon, il n'y a pas eu d'intersection.

Étape #3 : Transformation de la normale à la surface

a) Transformer la normale à la surface $\vec{n}$ de l'espace objet vers l'espace monde :

$$\vec{o}_{\text{o}\to\text{m}} = M_{\text{o}\to\text{m}}\vec{o} \qquad \text{(origine)}$$
$$\vec{n}_{\text{o}\to\text{m}} = M_{\text{o}\to\text{m}}\vec{n} \qquad \text{(direction à transformer)}$$
$$\vec{n}_{\text{m}} = \vec{n}_{\text{o}\to\text{m}} - \vec{o}_{\text{o}\to\text{m}} \qquad \text{(nouvelle direction)}$$

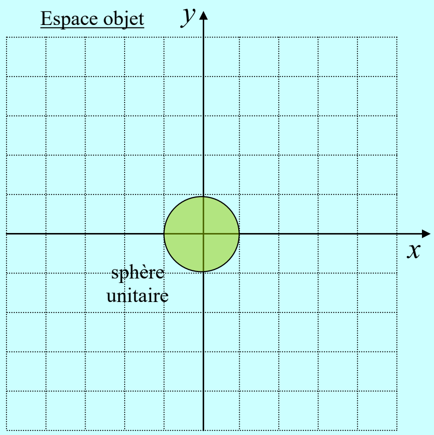
b) Normaliser la normale à la surface :

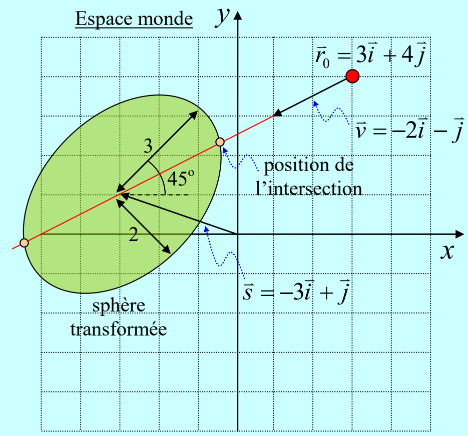
$$\vec{n}_{\text{int}} = \frac{\vec{n}_{\text{m}}}{\left|\vec{n}_{\text{m}}\right|}$$

Conclusion :

Nous obtenons le temps d'intersection t_{int} dans les deux espaces avec une normale à la surface $\vec{n}_{\text{int}}$ dans l'espace monde.

Situation A : ***L'intersection d'une sphère transformée.*** Une sphère unitaire possède un rayon égal à 1 et est centré à l'origine de son espace objet. On désire faire l'intersection de cette sphère dans un espace monde après avoir effectué une transformation d'homothétie $Sc = (3,\, 2,\, 1)$, une rotation autour de l'axe z tel que $\theta_z = 45°$ et une translation $Tr = (-3,\, 1,\, 0)$. Le rayon qui réalisera l'intersection aura une origine $\vec{r}_0 = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ et une orientation $\vec{v} = -2\vec{i} - \vec{j}$.





On désire **(a)** évaluer la matrice de transformation de l'espace objet-monde et la matrice de transformation monde-objet, **(b)** évaluer le temps t_{int} requis pour réaliser l'intersection et **(c)** vérifier que le temps t_{int} est un invariant dans les deux espaces.

Évaluons les expressions $c_z(\theta_z)$, $s_z(\theta_z)$ pour la matrice de rotation R_z selon z ainsi que $c_z(-\theta_z)$ et $s_z(-\theta_z)$ pour la matrice de rotation inverse R_z^{-1} selon z :

- $c_z(\theta_z) = \cos(\theta_z) \quad \Rightarrow \quad c_z(\theta_z) = \cos(45°) \quad \Rightarrow \quad c_z(\theta_z) = \sqrt{2}/2$
- $s_z(\theta_z) = \sin(\theta_z) \quad \Rightarrow \quad s_z(\theta_z) = \sin(45°) \quad \Rightarrow \quad s_z(\theta_z) = \sqrt{2}/2$
- $c_z(-\theta_z) = \cos(-\theta_z) \quad \Rightarrow \quad c_z(-\theta_z) = \cos(-45°) \quad \Rightarrow \quad c_z(-\theta_z) = \sqrt{2}/2$
- $s_z(-\theta_z) = \sin(-\theta_z) \quad \Rightarrow \quad s_z(-\theta_z) = \sin(-45°) \quad \Rightarrow \quad s_z(-\theta_z) = -\sqrt{2}/2$

Évaluons la matrice de transformation $M_{\text{o}\to\text{m}}$ de l'espace objet à l'espace monde :

$$M_{\text{o}\to\text{m}} = Tr \cdot R_z \cdot Sc$$

$$\Rightarrow \quad M_{\text{o}\to\text{m}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & tr_x \\ 0 & 1 & 0 & tr_y \\ 0 & 0 & 1 & tr_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_z(\theta_z) & -s_z(\theta_z) & 0 & 0 \\ s_z(\theta_z) & c_z(\theta_z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sc_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sc_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sc_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad M_{\text{o}\to\text{m}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad M_{\mathrm{o}\to\mathrm{m}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 3\sqrt{2}/2 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{M_{\mathrm{o}\to\mathrm{m}} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2} & 0 & -3 \\ 3\sqrt{2}/2 & \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad \textbf{(a) partie 1}$$

En utilisant les expressions des matrices inverses tel que

$$Sc^{-1} = Sc\left(1/sc_x, 1/sc_y, 1/sc_z\right) \quad , \quad R_z^{-1} = R_z\left(-\theta_z\right) \quad \text{et} \quad Tr^{-1} = Tr\left(-tr_x, -tr_y, -tr_z\right) \quad ,$$

évaluons la matrice de transformation $M_{\mathrm{m}\to\mathrm{o}}$ de l'espace monde à l'espace objet :

$$M_{\mathrm{m}\to\mathrm{o}} = Sc^{-1} \cdot R_z^{-1} \cdot Tr^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad M_{\mathrm{m}\to\mathrm{o}} = \begin{pmatrix} 1/sc_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/sc_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/sc_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_z(-\theta_z) & -s_z(-\theta_z) & 0 & 0 \\ s_z(-\theta_z) & c_z(-\theta_z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -tr_x \\ 0 & 1 & 0 & -tr_y \\ 0 & 0 & 1 & -tr_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad M_{\mathrm{m}\to\mathrm{o}} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad M_{\mathrm{m}\to\mathrm{o}} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 3\sqrt{2}/2 - \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & -3\sqrt{2}/2 - \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad M_{\mathrm{m}\to\mathrm{o}} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{M_{\mathrm{m}\to\mathrm{o}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/6 & \sqrt{2}/6 & 0 & \sqrt{2}/3 \\ -\sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/4 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad \textbf{(a) partie 2}$$

Représentons le rayon $\vec{r}_{\text{ray(o)}}$ dans l'espace objet en transformant l'origine $\vec{r}_0 = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ du rayon ainsi que son orientation $\vec{v} = -2\vec{i} - \vec{j}$:

<u>Transformation de l'origine du rayon :</u>

$$\vec{r}_{0\text{o}} = M_{\text{m}\to\text{o}}\vec{r}_0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}_{0\text{o}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/6 & \sqrt{2}/6 & 0 & \sqrt{2}/3 \\ -\sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/4 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 + 2\sqrt{2}/3 + 0 + \sqrt{2}/3 \\ -3\sqrt{2}/4 + \sqrt{2} + 0 - \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}_{0\text{o}} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2}/2 \\ -3\sqrt{2}/4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ce qui donne} \quad \boxed{\vec{r}_{0\text{o}} = \begin{pmatrix} 2{,}121 \\ -1{,}061 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

<u>Transformation de l'orientation :</u>

$$\vec{o}_{\text{m}\to\text{o}} = M_{\text{m}\to\text{o}}\vec{o}_{\text{m}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{o}_{\text{m}\to\text{o}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/6 & \sqrt{2}/6 & 0 & \sqrt{2}/3 \\ -\sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/4 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{o}_{\text{m}\to\text{o}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/3 \\ -\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ce qui donne} \quad \vec{o}_{\text{m}\to\text{o}} = \begin{pmatrix} 0{,}471 \\ -1{,}414 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_{\text{m}\to\text{o}} = M_{\text{m}\to\text{o}}\vec{v}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_{\text{m}\to\text{o}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/6 & \sqrt{2}/6 & 0 & \sqrt{2}/3 \\ -\sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/4 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2}/6 - \sqrt{2}/6 + 0 + \sqrt{2}/3 \\ 2\sqrt{2}/4 - \sqrt{2}/4 + 0 - \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_{\text{m}\to\text{o}} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/6 \\ -3\sqrt{2}/4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ce qui donne} \quad \vec{v}_{\text{m}\to\text{o}} = \begin{pmatrix} -0{,}2357 \\ -1{,}0607 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

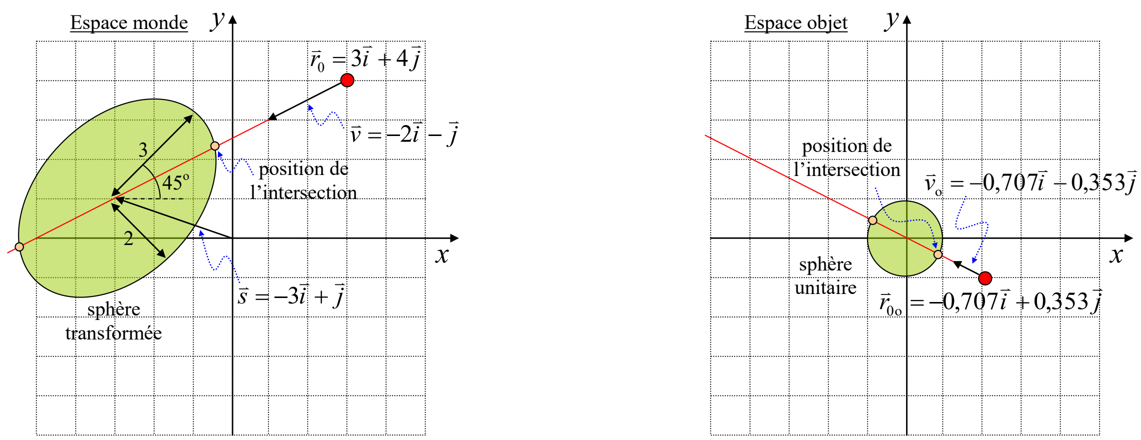
Pour obtenir la direction transformée :

$$\vec{v}_{\text{o}} = \vec{v}_{\text{m}\to\text{o}} - \vec{o}_{\text{m}\to\text{o}} \qquad \text{(nouvelle direction)}$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{v}_{\text{o}} = \left(-0{,}2357\,\vec{i} - 1{,}0607\,\vec{j}\right) - \left(0{,}471\,\vec{i} - 1{,}414\,\vec{j}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\vec{v}_{\text{o}} = -0{,}707\,\vec{i} + 0{,}353\,\vec{j}}$$

Voici une représentation de la transformation du rayon $\vec{r}_{\text{ray}}$ dans l'espace monde en rayon $\vec{r}_{\text{ray(o)}}$ dans l'espace objet :



Évaluons le temps de l'intersection t_{int} à l'aide de l'équation de l'intersection de la sphère :

$$At^2 + Bt + C = 0 \qquad \text{où} \qquad A = \vec{v}\cdot\vec{v} \;,\; B = 2\,\vec{r}_{\text{S0}}\cdot\vec{v} \;\text{ et }\; C = \vec{r}_{\text{S0}}\cdot\vec{r}_{\text{S0}} - R^2 \;\text{ où }\; \vec{r}_{\text{S0}} = \vec{r}_0 - \vec{r}_{\text{S}}$$

Voici les valeurs particulières de notre calcul dans un contexte de calcul d'intersection dans l'espace objet de la sphère :

Orientation du rayon ($\vec{v} = \vec{v}_{\text{o}}$)	Origine du rayon ($\vec{r}_0 = \vec{r}_{0\text{o}}$)	Origine de la sphère	$\vec{r}_{\text{S0}} = \vec{r}_0 - \vec{r}_{\text{S}}$
$\vec{v} = -0{,}707\vec{i} + 0{,}353\vec{j}$	$\vec{r}_0 = 2{,}121\vec{i} - 1{,}061\vec{j}$	$\vec{r}_{\text{S}} = 0$	$\vec{r}_{\text{S0}} = 2{,}121\vec{i} - 1{,}061\vec{j}$

Évaluons nos paramètres A, B et C :

$$A = \vec{v}\cdot\vec{v} \qquad \Rightarrow \qquad A = \left(-0{,}707\,\vec{i} + 0{,}353\,\vec{j}\right)\cdot\left(-0{,}707\,\vec{i} + 0{,}353\,\vec{j}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad A = (-0{,}707)(-0{,}707) + (0{,}353)(0{,}353)$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{A = 0{,}6245}$$

$$B = 2\,\vec{r}_{\text{S0}}\cdot\vec{v} \qquad \Rightarrow \qquad B = 2\left(2{,}121\vec{i} - 1{,}061\vec{j}\right)\cdot\left(-0{,}707\,\vec{i} + 0{,}353\,\vec{j}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad B = 2\left((2{,}121)(-0{,}707) + (-1{,}061)(0{,}353)\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{B = -3{,}7482}$$

$$C = \vec{r}_{S0} \cdot \vec{r}_{S0} - R^2 \qquad \Rightarrow \qquad C = \left(\left(2{,}121\vec{i} - 1{,}061\vec{j}\right) \cdot \left(2{,}121\vec{i} - 1{,}061\vec{j}\right) \right) - (1)^2$$

$$\Rightarrow \qquad C = \left((2{,}121)(2{,}121) + (-1{,}061)(-1{,}061) \right) - (1)^2$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{C = 4{,}6244}$$

Nous pouvons évaluer le temps t où il y aura une intersection (nommé t_{int}) en résolvant notre polynôme du 2[ième] degré $At^2 + Bt + C = 0$:

$$t_{\text{int}} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \qquad \Rightarrow \qquad t_{\text{int}} = \frac{-(-3{,}748) \pm \sqrt{(-3{,}748)^2 - 4(0{,}6245)(4{,}6244)}}{2(0{,}6245)}$$

$$\Rightarrow \qquad t_{\text{int}} = \frac{3{,}748 \pm \sqrt{2{,}4957}}{1{,}249}$$

$$\Rightarrow \qquad t_{\text{int}} = \{1{,}7360\ ,\ 4{,}2656\}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{t_{\text{int}} = 1{,}7360} \quad \textbf{(b)}$$

Afin de vérifier que le temps t_{int} est un invariant dans nos deux espaces, évaluer la position de l'intersection dans les deux espaces et vérifions qu'elles sont égales après une transformation.

Débutons en évaluant la position de l'intersection $\vec{r}_{\text{int(o)}}$ dans l'espace objet :

$$\vec{r}_{\text{int(o)}} = \vec{r}_{0\text{o}} + \vec{v}_{\text{o}} t_{\text{int}} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{r}_{\text{int(o)}} = \left(2{,}121\vec{i} - 1{,}061\vec{j}\right) + \left(-0{,}707\vec{i} + 0{,}353\vec{j}\right)(1{,}7360)$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\vec{r}_{\text{int(o)}} = 0{,}8906\vec{i} - 0{,}4482\vec{j}}$$

Transformons la position de l'intersection $\vec{r}_{\text{int o}}$ vers l'espace monde :

$$\vec{r}_{\text{int}} = M_{\text{o}\to\text{m}}\, \vec{r}_{\text{int(o)}}$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{r}_{\text{int}} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2} & 0 & -3 \\ 3\sqrt{2}/2 & \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}8906 \\ -0{,}4482 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}8892 + 0{,}6339 + 0 - 3 \\ 1{,}8892 - 0{,}6339 + 0 + 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{r}_{\text{int}} = \begin{pmatrix} -0{,}4769 \\ 2{,}2553 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ ce qui donne $\boxed{\vec{r}_{\text{int}} = -0{,}477\vec{i} + 2{,}26\vec{j}}$

Évaluons la position de l'intersection dans l'espace monde avec le temps de l'intersection t_{int} :

$$\vec{r}_{\text{int}} = \vec{r}_0 + \vec{v}\,t_{\text{int}} \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_{\text{int}} = \left(3\vec{i} + 4\vec{j}\right) + \left(-2\vec{i} - \vec{j}\right)(1{,}7360)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{r}_{\text{int}} = -0{,}472\vec{i} + 2{,}264\vec{j}}$$

En raison des <u>précisions numériques</u>, nous obtenons des coordonnées pour l'intersection <u>une légère différence</u> :

$$\vec{r}_{\text{int}} = -0{,}477\vec{i} + 2{,}26\vec{j} \qquad \text{versus} \qquad \vec{r}_{\text{int}} = -0{,}472\vec{i} + 2{,}264\vec{j}$$

(par transformation objet-monde) (par évaluation de temps dans l'espace monde)

Cependant, nous pouvons affirmer que le **<u>temps pour réaliser l'intersection</u>** t_{int} est **<u>un invariant</u>** dans les deux espaces puisque nos deux positions peuvent être calculées à l'aide de la même valeur de t_{int} dans les deux espaces.

Voici une représentation de la position de l'intersection dans les deux espaces :