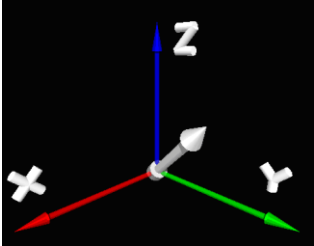


Chapitre 7.5 – Les matrices de transformation dans le *ray tracer*

Le vecteur à 4 dimensions dans un *ray tracer*

Pour bien représenter la position d'un point en trois dimensions, il faut utiliser trois coordonnées. En coordonnée cartésienne, la position $\vec{r}$ d'un point par rapport à l'origine du système d'axe xyz correspond aux représentations suivantes :

Vectorielle algébrique	Vectorielle colonne	Visualisation
$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$	$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$	

Pour des raisons calculatoires, il sera intéressant de représenter le même concept en vecteur à quatre dimensions puisque nous allons effectuer des modifications à nos vecteurs à l'aide du produit matriciel et une représentation matricielle en format 4×4 sera plus polyvalente lors de nos calculs.

Ainsi, nous devons faire correspondre un vecteur 3d sous la forme d'un vecteur 4d à l'aide de la définition suivante :

Vecteur colonne 3d	Vecteur colonne 4d
$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$	$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$

Afin de nous permettre d'effectuer des transformations d'homothétie (changement d'échelle, *scaling* en anglais), de rotation et de translation sur nos vecteurs en utilisant strictement une série de multiplication matricielle de format 4×4 , l'introduction de la 4^{ième} composante¹ égale à « 1 » sera nécessaire. Ce type de choix a été implémenté dans toutes les cartes graphiques afin d'uniformiser les calculs accélérant ainsi l'affichage d'image à l'écran.

La convention du produit entre une matrice et un vecteur

Puisque le produit entre une matrice M et un vecteur $\vec{u}$ n'est pas commutatif ($M\vec{u} \neq \vec{u}^T M$), il faut choisir une convention lors de ces multiplications. Ces notes de cours proposeront l'usage de la convention droite-gauche suivante

$$\vec{v} = M\vec{u} \quad \text{où } \vec{u} \text{ est le vecteur à transformer et } \vec{v} \text{ est le vecteur transformé par } M.$$

¹ Ce choix permettra d'inclure la translation dans le produit des matrices.

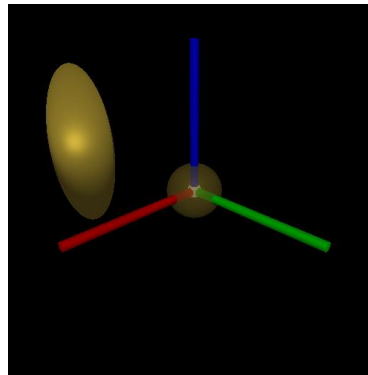
L'usage de la matrice 4×4 dans le *ray tracer*

Une matrice 4×4 M composé des valeurs M_{ij} tel que i correspond au numéro de la ligne et j correspond au numéro de la colonne de l'élément de matrice M est représentée sous la forme

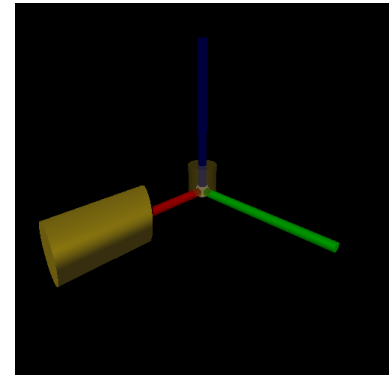
$$M = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}.$$

Cependant, le début de la numérotation dépend habituellement de la discipline qui en fait l'usage. En mathématique, on début traditionnellement par la composante m_{11} , mais en informatique, on débute avec la composante m_{00} puisque l'adressage d'un tableau débute avec l'adresse « 0 » (exemple : `tab[0]`).

Dans le *ray tracer*, nous utiliserons ces matrices pour transformer la représentation mathématique d'une géométrie afin de la déplacer (translation), de la faire tourner autour d'un axe (rotation) et de la déformer (homothétie) dans l'espace de la scène. Par exemple, savoir résoudre l'intersection d'un rayon avec une sphère et utiliser ces matrices de transformation permettra de visualiser des sphères déformée.



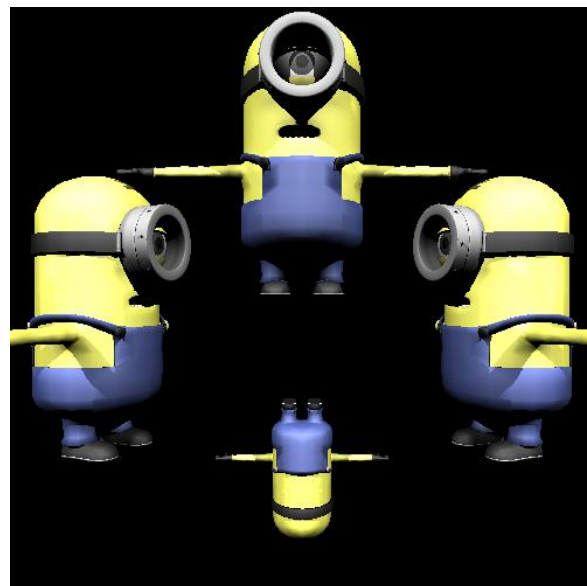
Sphère unitaire déformée en x et z et déplacée en x et z .



Cylindre unitaire déformée en x , y et z , tourné de 90° selon l'axe y et déplacé en x .

De plus, un artiste peut réaliser un modèle 3d comportant un très grand nombre de points regroupés afin de former plusieurs triangles et l'usage des matrices de transformation permettra de copier le modèles 3d à différents endroits, de les tourner et de les déformer sans avoir à modifier la définition du modèle.

C'est un avantage considérable quand on pense qu'un modèle complexe peut être composé de plus de 25 000 triangles et qu'il requière plusieurs heures de travail à un artiste.



Le modèle 3d comprenant 29 014 triangles a été transformé à quatre reprises.

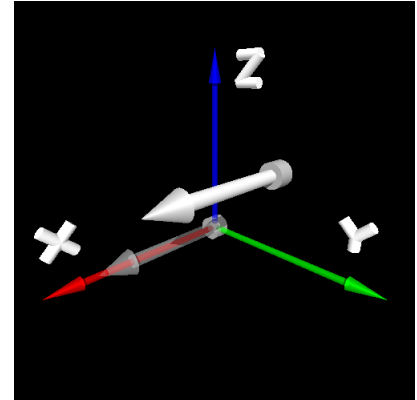
La matrice de translation

La matrice de translation Tr est la matrice de transformation affine permettant de déplacer un point dans un système d'axe xyz . Appliquée à une forme géométrique, elle sera alors déplacée tout en conservant son orientation.

En coordonnée cartésienne xyz , les paramètres de translation tr_x , tr_y et tr_z se retrouvent dans la 4^{ième} colonne de la matrice et elle est construite de la façon suivante :

$$Tr = Tr(tr_x, tr_y, tr_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & tr_x \\ 0 & 1 & 0 & tr_y \\ 0 & 0 & 1 & tr_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où Tr : Matrice de translation. tr_x : Translation selon l'axe x .
 tr_y : Translation selon l'axe y . tr_z : Translation selon l'axe z .



La flèche a subi une translation en $+y$ et $+z$ tout en préservant son orientation

Preuve :

À partir d'un vecteur position $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, effectuons une translation à l'aide d'un produit matriciel avec la matrice Tr et identifions la position des paramètres tr_x , tr_y et tr_z dans la matrice Tr afin de former un vecteur position $\vec{r}_{trans} = (x + tr_x)\vec{i} + (y + tr_y)\vec{j} + (z + tr_z)\vec{k}$ qui correspond à la définition de notre translation du vecteur $\vec{r}$:

$$\vec{r}_{trans} = Tr \vec{r} \Rightarrow \begin{pmatrix} x + tr_x \\ y + tr_y \\ z + tr_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{Remplacer } \vec{r}, \vec{r}_{trans} \text{ et } Tr)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x + tr_x \\ y + tr_y \\ z + tr_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{00}x + m_{01}y + m_{02}z + m_{03} \\ m_{10}x + m_{11}y + m_{12}z + m_{13} \\ m_{20}x + m_{21}y + m_{22}z + m_{23} \\ m_{30} + m_{31} + m_{32} + m_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{Produit entre } Tr \text{ et } \vec{r})$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x + tr_x \\ y + tr_y \\ z + tr_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{00}x + m_{01}y + m_{02}z + m_{03} \\ m_{10}x + m_{11}y + m_{12}z + m_{13} \\ m_{20}x + m_{21}y + m_{22}z + m_{23} \\ m_{30} + m_{31} + m_{32} + m_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{Identifier les termes inutiles})$$

$$\Rightarrow Tr = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & tr_x \\ 0 & 1 & 0 & tr_y \\ 0 & 0 & 1 & tr_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} m_{00} = m_{11} = m_{22} = m_{33} = 1 \\ m_{03} = tr_x, m_{13} = tr_y, m_{23} = tr_z \\ \text{autre} = 0 \end{cases} \quad \blacksquare$$

Situation A : La translation d'une sphère. Une sphère de rayon $R = 1$ est située à la position $\vec{r}_{s0} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 0\vec{k}$ et subit une translation définie par le vecteur $\vec{s} = -5\vec{i} - 2\vec{j}$. Évaluez la position de la sphère $\vec{r}_s$ après la translation en utilisant la matrice de translation pour effectuer le calcul.

À partir du vecteur $\vec{s}$, nous pouvons définir les paramètres de la matrice de translation :

$$\vec{s} = -5\vec{i} - 2\vec{j}$$

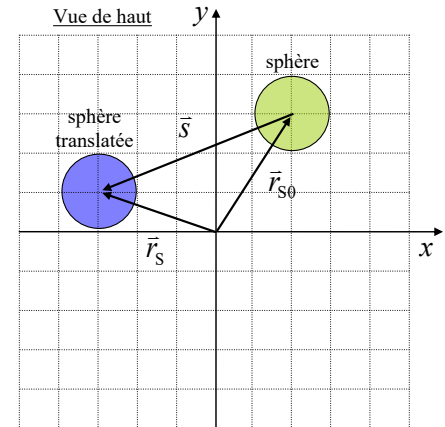
$$\text{donc } tr_x = -5, \quad tr_y = -2 \quad \text{et } tr_z = 0$$

Appliquons le produit du vecteur $\vec{r}_{s0}$ à la matrice Tr en utilisant un vecteur $\vec{r}_{s0}$ en 4 dimensions :

$$\vec{r}_s = Tr \vec{r}_{s0}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_s = \begin{pmatrix} 2+0+0-5 \\ 3+0+0-2 \\ 0+0+0+0 \\ 0+0+0+1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{r}_s = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{r}_s = -3\vec{i} + \vec{j}}$$



Représentation graphique de la translation de la sphère.

La matrice de translation appliquée à un vecteur orientation

Lorsque l'on transforme un **vecteur orientation** $\vec{v}$ avec une matrice de translation Tr , il est important de **préserver** son **orientation** et son **module**. Puisqu'un vecteur orientation $\vec{v}$ est toujours défini à l'aide de deux points dont l'un est l'origine, il faudra :

- 1) Transformer l'origine tel que $\vec{r}_{O\text{trans}} = Tr \vec{r}_O$ et $\vec{r}_O = 0$.

Ce calcul donne le résultat

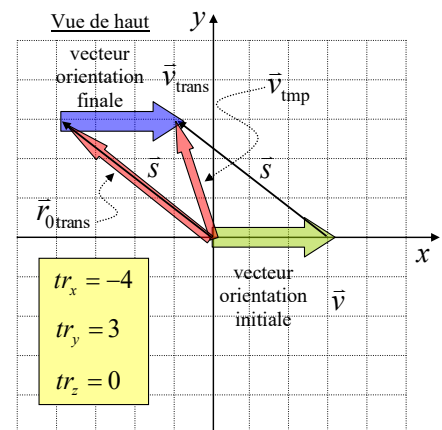
$$\vec{r}_{O\text{trans}} = tr_x \vec{i} + tr_y \vec{j} + tr_z \vec{k}.$$

- 2) Transformer l'orientation initiale $\vec{v}$ du vecteur orientation en vecteur temporaire tel que

$$\vec{v}_{\text{tmp}} = Tr \vec{v}.$$

- 3) L'orientation du vecteur transformé $\vec{v}_{\text{trans}}$ sera égale à l'expression $\vec{v}_{\text{trans}} = \vec{v}_{\text{tmp}} - \vec{r}_{O\text{trans}}$ ce qui correspond au calcul

$$\vec{v}_{\text{trans}} = Tr \vec{v} - Tr \vec{r}_O.$$



Représentation d'un vecteur orientation en vert translaté et représenté en bleu (deux points) dont la construction nécessite la présence d'un vecteur orientation temporaire et d'un origine translaté représenté en rouge.

La matrice d'homothétie

La matrice d'homothétie Sc est la matrice de transformation linéaire permettant de déformer les dimensions d'un système d'axe. Appliquée à une forme géométrique, elle sera agrandie ou rétrécie.

En coordonnée cartésienne xyz , les paramètres de déformation sc_x , sc_y et sc_z se retrouvent sur la diagonale de la matrice Sc et elle est construite de la façon suivante :

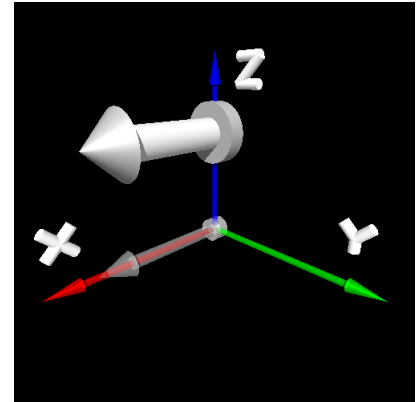
$$Sc = Sc(sc_x, sc_y, sc_z) = \begin{pmatrix} sc_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sc_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sc_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où Sc : Matrice d'homothétie.

sc_y : Déformation selon l'axe y .

sc_x : Déformation selon l'axe x .

sc_z : Déformation selon l'axe z .



La flèche a subi un agrandissement en y et z suivit d'une translation en z .

Preuve :

À partir d'un vecteur position $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, effectuons une homothétie à l'aide d'un produit matriciel avec la matrice Sc et identifions la position des paramètres sc_x , sc_y et sc_z dans la matrice Sc afin de former un vecteur position $\vec{r}_{\text{homo}} = (sc_x x)\vec{i} + (sc_y y)\vec{j} + (sc_z z)\vec{k}$ qui correspond à la définition de notre homothétie du vecteur $\vec{r}$:

$$\vec{r}_{\text{homo}} = Sc \vec{r} \Rightarrow \begin{pmatrix} sc_x x \\ sc_y y \\ sc_z z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{Remplacer } \vec{r}, \vec{r}_{\text{homo}} \text{ et } Sc)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} sc_x x \\ sc_y y \\ sc_z z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{00}x + m_{01}y + m_{02}z + m_{03} \\ m_{10}x + m_{11}y + m_{12}z + m_{13} \\ m_{20}x + m_{21}y + m_{22}z + m_{23} \\ m_{30} + m_{31} + m_{32} + m_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{Produit entre } Sc \text{ et } \vec{r})$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} sc_x x \\ sc_y y \\ sc_z z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{00}x + \cancel{m_{01}y} + \cancel{m_{02}z} + \cancel{m_{03}} \\ \cancel{m_{10}x} + m_{11}y + \cancel{m_{12}z} + \cancel{m_{13}} \\ \cancel{m_{20}x} + \cancel{m_{21}y} + m_{22}z + \cancel{m_{23}} \\ \cancel{m_{30}} + \cancel{m_{31}} + \cancel{m_{32}} + m_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{Identifier les termes inutiles})$$

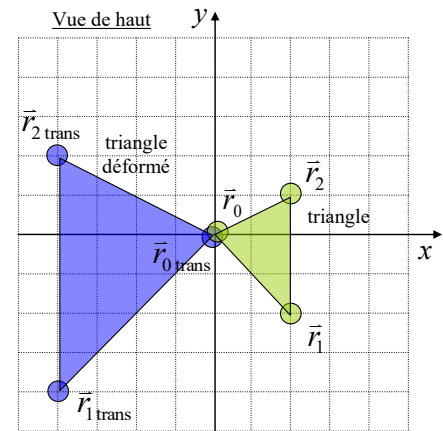
$$\Rightarrow Sc = \begin{pmatrix} sc_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sc_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sc_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} m_{00} = sc_x, m_{11} = sc_y, m_{22} = sc_z \\ m_{33} = 1 \\ \text{autre} = 0 \end{cases} \quad \blacksquare$$

Situation B : L'homothétie sur un triangle. Un triangle est construit à l'aide des trois vecteurs positions $\vec{r}_0 = 0$, $\vec{r}_1 = 2\vec{i} - 2\vec{j}$ et $\vec{r}_2 = 2\vec{i} + 1\vec{j}$. Évaluez la forme du triangle après avoir subi une homothétie définie par $sc_x = -2$, $sc_y = 2$ et $sc_z = 1$.

À partir de nos paramètres décrivant la matrice d'homothétie, nous obtenons la matrice

$$Sc = \begin{pmatrix} sc_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sc_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sc_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Appliquons le produit des vecteurs $\vec{r}_0$, $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ à la matrice Sc en utilisant des vecteurs à 4 dimensions :



$$\bullet \quad \vec{r}_{0\text{trans}} = Sr \vec{r}_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_{0\text{trans}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{r}_{0\text{trans}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{r}_{1\text{trans}} = Sr \vec{r}_1 \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_{1\text{trans}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{r}_{1\text{trans}} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{r}_{2\text{trans}} = Sr \vec{r}_2 \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_{2\text{trans}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{r}_{2\text{trans}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

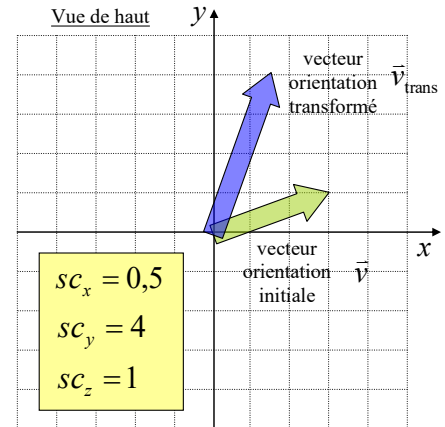
La matrice d'homothétie appliquée à un vecteur orientation

Lorsque l'on transforme un **vecteur orientation** $\vec{v}$ avec une matrice de d'homothétie Sc , **l'orientation** ainsi que son **module** seront **changés**. Bien qu'un vecteur orientation soit constitué de deux points dont un situé à l'origine, l'homothétie n'a pas d'effet sur un point à l'origine car

$$\vec{r}_O = Sc \vec{r}_O \quad \text{si} \quad \vec{r}_O = 0.$$

Ainsi, le résultat de la transformation du vecteur orientation $\vec{v}$ est directement égal au calcul

$$\vec{v}_{\text{trans}} = Sc \vec{v}.$$



Représentation d'un vecteur orientation vert ayant subi une transformation d'homothétie représenté en bleu.

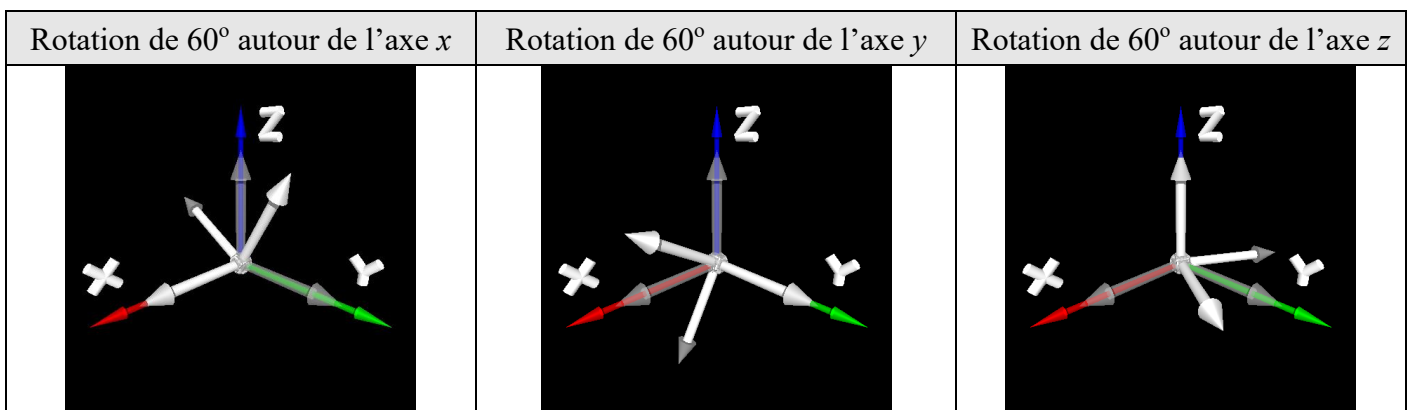
La rotation autour d'un axe x, y et z

Pour définir des matrices de rotation autour des axes x , y et z , nous devons utiliser trois angles de rotation θ_x , θ_y et θ_z . La construction de ces matrices de rotation R nécessite les fonctions trigonométriques cosinus et sinus. Afin d'alléger l'écriture, nous allons utiliser les expressions suivantes :

Rotation autour de l'axe x avec un angle θ_x	Autour de l'axe y avec un angle θ_y	Autour de l'axe z avec un angle θ_z
$c_x = \cos(\theta_x)$	$c_y = \cos(\theta_y)$	$c_z = \cos(\theta_z)$
$s_x = \sin(\theta_x)$	$s_y = \sin(\theta_y)$	$s_z = \sin(\theta_z)$

La matrice de rotation autour de l'axe x, y et z

Les matrices de rotation R_x , R_y et R_z autour des axes x , y et z sont des matrices de transformation linéaire permettant de tourner un vecteur position ou une forme géométrique autour des axes d'un système d'axe xyz .



Les paramètres θ_x , θ_y et θ_z caractérisent successivement les matrices de rotations R_x , R_y et R_z et déterminent les angles de rotation autour des axes. Un angle $\theta = 360^\circ$ (ou 2π radians) ne procure aucun changement :

Axe de rotation	Matrice de rotation (forme détaillée)	Matrice de rotation (forme compacte)
x (plan yz)	$R_x = R_x(\theta_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_x) & -\sin(\theta_x) & 0 \\ 0 & \sin(\theta_x) & \cos(\theta_x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$R_x = R_x(\theta_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_x & -s_x & 0 \\ 0 & s_x & c_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
y (plan xz)	$R_y = R_y(\theta_y) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_y) & 0 & \sin(\theta_y) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta_y) & 0 & \cos(\theta_y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$R_y = R_y(\theta_y) = \begin{pmatrix} c_y & 0 & s_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_y & 0 & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
z (plan xy)	$R_z = R_z(\theta_z) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_z) & -\sin(\theta_z) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_z) & \cos(\theta_z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$R_z = R_z(\theta_z) = \begin{pmatrix} c_z & -s_z & 0 & 0 \\ s_z & c_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Preuve : (selon l'axe z)

À partir d'un vecteur position $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, réécrivons le sous une forme polaire dans le plan xy tel que

$$\vec{r} = R \cos(\theta_0) \vec{i} + R \sin(\theta_0) \vec{j} + z \vec{k} \quad \text{où} \quad R = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \theta_0 = \arctan(y/x).$$

Si on fait tourner ce vecteur d'un angle θ_z autour de l'axe z afin de satisfaire notre définition de rotation autour de l'axe z , nous obtenons alors le vecteur

$$\vec{r}_{\text{rot } z} = R \cos(\theta_0 + \theta_z) \vec{i} + R \sin(\theta_0 + \theta_z) \vec{j} + z \vec{k}.$$

Avec les identités trigonométriques

$$\cos(\theta + \phi) = \cos(\theta) \cdot \cos(\phi) - \sin(\theta) \cdot \sin(\phi) \quad \text{et} \quad \sin(\theta + \phi) = \sin(\theta) \cdot \cos(\phi) + \cos(\theta) \cdot \sin(\phi),$$

nous pouvons réécrire notre vecteur $\vec{r}_{\text{rot } z}$ sous la forme compacte suivante :

$$\vec{r}_{\text{rot } z} = \begin{pmatrix} R \cos(\theta_0 + \theta_z) \\ R \sin(\theta_0 + \theta_z) \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(\cos(\theta_0) \cdot \cos(\theta_z) - \sin(\theta_0) \cdot \sin(\theta_z)) \\ R(\sin(\theta_0) \cdot \cos(\theta_z) + \cos(\theta_0) \cdot \sin(\theta_z)) \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(c_0 c_z - s_0 s_z) \\ R(s_0 c_z + c_0 s_z) \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

À partir du vecteur position $\vec{r}$, effectuons une rotation autour de l'axe z (dans le plan xy) à l'aide d'un produit matriciel avec la matrice R_z et identifions la position des paramètres θ_z sous la forme des équations trigonométriques $c_z = \cos(\theta_z)$ et $s_z = \sin(\theta_z)$ dans la matrice R_z afin de former le vecteur position $\vec{r}_{\text{rot } z}$ qui correspond à la définition de notre rotation du vecteur $\vec{r}$:

$$\begin{aligned}
 \vec{r}_{\text{rot } z} = R_z \vec{r} &\Rightarrow \begin{pmatrix} R(c_0 c_z - s_0 s_z) \\ R(s_0 c_z + c_0 s_z) \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &\Rightarrow \begin{pmatrix} R(c_0 c_z - s_0 s_z) \\ R(s_0 c_z + c_0 s_z) \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{00}x + m_{01}y + m_{02}z + m_{03} \\ m_{10}x + m_{11}y + m_{12}z + m_{13} \\ m_{20}x + m_{21}y + m_{22}z + m_{23} \\ m_{30} + m_{31} + m_{32} + m_{33} \end{pmatrix} \\
 &\Rightarrow \begin{pmatrix} Rc_0 c_z - Rs_0 s_z \\ Rs_0 c_z + Rc_0 s_z \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{00}Rc_0 + m_{01}Rs_0 + m_{02}z + m_{03} \\ m_{10}Rc_0 + m_{11}Rs_0 + m_{12}z + m_{13} \\ m_{20}Rc_0 + m_{21}Rs_0 + m_{22}z + m_{23} \\ m_{30} + m_{31} + m_{32} + m_{33} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x = R \cos(\theta_0) = Rc_0 \\ y = R \sin(\theta_0) = Rs_0 \end{pmatrix} \\
 &\Rightarrow \begin{pmatrix} Rc_0 c_z - Rs_0 s_z \\ Rs_0 c_z + Rc_0 s_z \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{00}Rc_0 + m_{01}Rs_0 + \cancel{m_{02}z} + \cancel{m_{03}} \\ m_{10}Rc_0 + m_{11}Rs_0 + \cancel{m_{12}z} + \cancel{m_{13}} \\ \cancel{m_{20}}Rc_0 + \cancel{m_{21}}Rs_0 + m_{22}z + \cancel{m_{23}} \\ \cancel{m_{30}} + \cancel{m_{31}} + \cancel{m_{32}} + m_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{Iden. les termes inutiles}) \\
 &\Rightarrow R_z = R_z(\theta_z) = \begin{pmatrix} c_z & -s_z & 0 & 0 \\ s_z & c_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} m_{00} = c_z, m_{01} = -s_z \\ m_{10} = s_z, m_{11} = c_z \\ m_{22} = m_{33} = 1 \\ \text{autre} = 0 \end{cases} \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

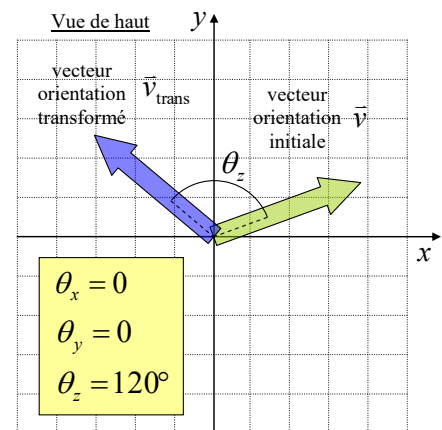
La matrice de rotation appliquée à un vecteur orientation

Lorsque l'on transforme un **vecteur orientation** $\vec{v}$ avec une matrice de rotation R selon x , y ou z , seule **l'orientation** sera **changée** (pas le module). Bien qu'un vecteur orientation soit constitué de deux points dont un situé à l'origine, la rotation n'a pas d'effet sur un point à l'origine car

$$\vec{r}_O = R \vec{r}_O \quad \text{si} \quad \vec{r}_O = 0 \quad .$$

Ainsi, le résultat de la transformation du vecteur orientation $\vec{v}$ est directement égal aux calculs suivant :

$$\vec{v}_{\text{trans}} = R \vec{v} \quad .$$



Représentation d'un vecteur orientation vert ayant subi une rotation selon l'axe z et représenté en bleu.

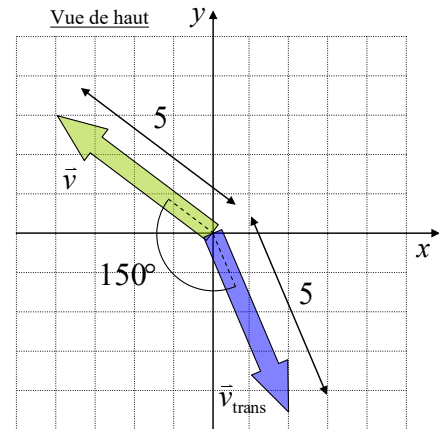
Situation C : La rotation d'un vecteur orientation autour de l'axe z. Un vecteur orientation $\vec{v} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$ subit une rotation autour de l'axe z de 150° . Évaluez **(a)** le vecteur orientation transformé $\vec{v}_{\text{trans}}$, **(b)** vérifiez que le module du vecteur demeure inchangé et **(c)** vérifiez que l'angle entre $\vec{v}$ et $\vec{v}_{\text{trans}}$ est bien de 150° .

À partir de nos paramètres décrivant la matrice de rotation autour de l'axe z, nous obtenons la matrice

$$R_z = R_z(\theta_z) = \begin{pmatrix} c_z & -s_z & 0 & 0 \\ s_z & c_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,866 & -0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & -0,866 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{car } c_z = \cos(\theta_z) = \cos(150^\circ) = -0,866$$

$$s_z = \sin(\theta_z) = \sin(150^\circ) = 0,5$$



a) Appliquons notre matrice de rotation à notre vecteur $\vec{v}$ afin d'évaluer $\vec{v}_{\text{trans}}$:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{\text{trans}} = R_z \vec{v} &\Rightarrow \vec{v}_{\text{trans}} = \begin{pmatrix} -0,866 & -0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & -0,866 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \vec{v}_{\text{trans}} = \begin{pmatrix} (-4)(-0,866) + (-0,5)(3) + (0)(0) + (0)(1) \\ (0,5)(-4) + (-0,866)(3) + (0)(0) + (0)(1) \\ (0)(-4) + (0)(3) + (1)(0) + (0)(1) \\ (0)(-4) + (0)(3) + (0)(0) + (1)(1) \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_{\text{trans}} = \begin{pmatrix} 1,964 \\ -4,598 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Évaluons le module de nos deux vecteurs orientations et vérifions qu'ils sont égaux :

$$\begin{aligned} |\vec{v}| &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{(-4)^2 + (3)^2 + (0)^2} \Rightarrow |\vec{v}| = 5 \\ |\vec{v}_{\text{trans}}| &= \sqrt{v_{x\text{trans}}^2 + v_{y\text{trans}}^2 + v_{z\text{trans}}^2} \Rightarrow |\vec{v}_{\text{trans}}| = \sqrt{(1,964)^2 + (-4,598)^2 + (0)^2} \Rightarrow |\vec{v}_{\text{trans}}| = 5 \end{aligned}$$

c) Vérifions que l'angle entre nos deux vecteurs est de 150° à l'aide du produit scalaire et de la représentation de nos vecteurs en trois dimensions :

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{v}_{\text{trans}} &= |\vec{v}| |\vec{v}_{\text{trans}}| \cos(\theta) \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}_{\text{trans}}}{|\vec{v}| |\vec{v}_{\text{trans}}|} \\ &\Rightarrow \cos(\theta) = \frac{v_x v_{x\text{trans}} + v_y v_{y\text{trans}} + v_z v_{z\text{trans}}}{|\vec{v}| |\vec{v}_{\text{trans}}|} \\ &\Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{(-4)(1,964) + (3)(-4,598) + (0)(0)}{(5)(5)}\right) \Rightarrow \theta = 150^\circ \end{aligned}$$

Les matrices de transformation inverse

Toutes les matrices de transformation M possèdent une matrice de transformation inverse M^{-1} permettant de retrouver les positions des vecteurs et les formes des géométries d'origine. Leur définition respect la propriété tel que

$$M M^{-1} = M^{-1} M = 1 \quad \text{où} \quad 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ est la matrice identité.}$$

En raison de leur forme, on peut toujours construire une matrice de transformation linéaire inverse M^{-1} à partir de la matrice de transformation linéaire M en changeant judicieusement les paramètres de la matrice M .

Matrice de transformation	Matrice de transformation inverse
$Tr = Tr(tr_x, tr_y, tr_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & tr_x \\ 0 & 1 & 0 & tr_y \\ 0 & 0 & 1 & tr_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$Tr^{-1} = Tr(-tr_x, -tr_y, -tr_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -tr_x \\ 0 & 1 & 0 & -tr_y \\ 0 & 0 & 1 & -tr_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$Sc = Sc(sc_x, sc_y, sc_z) = \begin{pmatrix} sc_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sc_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sc_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$Sc^{-1} = Sc\left(\frac{1}{sc_x}, \frac{1}{sc_y}, \frac{1}{sc_z}\right) = \begin{pmatrix} 1/sc_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/sc_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/sc_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$R_x = R_x(\theta_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_x) & -\sin(\theta_x) & 0 \\ 0 & \sin(\theta_x) & \cos(\theta_x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$R_x^{-1} = R_x(-\theta_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\theta_x) & -\sin(-\theta_x) & 0 \\ 0 & \sin(-\theta_x) & \cos(-\theta_x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$R_y = R_y(\theta_y) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_y) & 0 & \sin(\theta_y) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta_y) & 0 & \cos(\theta_y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$R_y^{-1} = R_y(-\theta_y) = \begin{pmatrix} \cos(-\theta_y) & 0 & \sin(-\theta_y) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-\theta_y) & 0 & \cos(-\theta_y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$R_z = R_z(\theta_z) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_z) & -\sin(\theta_z) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_z) & \cos(\theta_z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$R_z^{-1} = R_z(-\theta_z) = \begin{pmatrix} \cos(-\theta_z) & -\sin(-\theta_z) & 0 & 0 \\ \sin(-\theta_z) & \cos(-\theta_z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Preuve : Les preuves sont laissées en exercice au lecteur.

