

Chapitre 7.2c – L'intersection de géométrie complexe dans le ray tracer

L'intersection d'un rayon avec un tube infini

L'intersection d'un rayon avec un tube infini (un cylindre infini sans extrémité) de rayon R positionné à un point \vec{r}_T et aligné selon l'axe \hat{s} se calcul grâce à la résolution d'un polynôme du 2^e degré en temps t

$$At^2 + Bt + C = 0$$

tel que $A = \vec{v}_A \cdot \vec{v}_A$, $B = 2\vec{r}_{A0} \cdot \vec{v}_A$ et $C = \vec{r}_{A0} \cdot \vec{r}_{A0} - R^2$

où $\vec{r}_{A0} = \hat{s} \times (\vec{r}_0 - \vec{r}_T) \times \hat{s}$ et $\vec{v}_A = (\hat{s} \times \vec{v} \times \hat{s})$

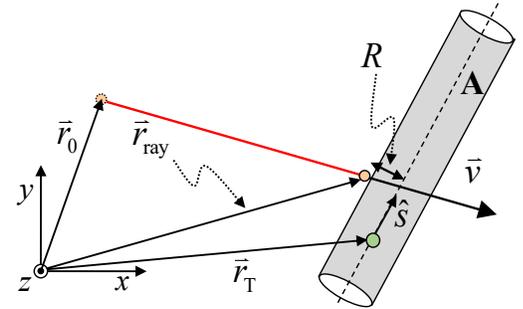
avec¹ \vec{r}_0 : Origine du rayon (position d'émission du rayon).

\vec{v} : Orientation du rayon ($\|\vec{v}\| = 1$, vecteur unitaire).

\vec{r}_T : Position où passe le tube.

\hat{s} : L'axe du tube.

R : Rayon du tube.

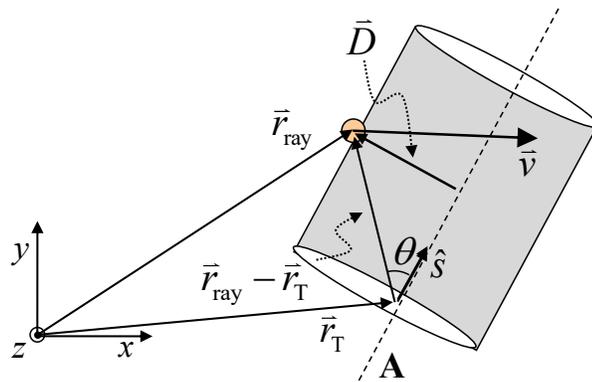


Preuve :

En premier temps, il faut développer une expression nous permettant d'évaluer la distance D entre la position de l'intersection \vec{r}_{ray} et l'axe de référence que forme le tube.

En utilisant le point \vec{r}_T sur l'axe du tube et une projection à l'aide de la fonction trigonométrique sinus, nous obtenons

$$\|\vec{D}\| = \|\vec{r}_{ray} - \vec{r}_T\| \sin(\theta)$$



Cependant, évaluer l'angle θ sera difficile. Pour contourner cette réalité, nous utiliserons le produit vectoriel² avec l'axe du tube \hat{s} .

¹ La lettre **A** faite référence à l'axe du tube.

² Produit vectoriel : $\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin(\theta) \hat{n}$

Par la suite, on peut former le vecteur \vec{D} de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 \vec{D} = \hat{s} \times (\vec{r}_{\text{ray}} - \vec{r}_T) \times \hat{s} &\Rightarrow \vec{D} = \hat{s} \times ((\vec{r}_0 + \vec{v}t) - \vec{r}_T) \times \hat{s} && \text{(Remplacer } \vec{r}_{\text{ray}} = \vec{r}_0 + \vec{v}t \text{)} \\
 &\Rightarrow \vec{D} = \hat{s} \times (\vec{r}_0 - \vec{r}_T + \vec{v}t) \times \hat{s} && \text{(Réécriture)} \\
 &\Rightarrow \vec{D} = \hat{s} \times (\vec{r}_0 - \vec{r}_T) \times \hat{s} + \hat{s} \times \vec{v}t \times \hat{s} && \text{(Distribution)} \\
 &\Rightarrow \vec{D} = \hat{s} \times (\vec{r}_0 - \vec{r}_T) \times \hat{s} + (\hat{s} \times \vec{v} \times \hat{s})t && \text{(Factoriser } t \text{)} \\
 &\Rightarrow \vec{D} = \vec{r}_{A0} + (\hat{s} \times \vec{v} \times \hat{s})t && (\vec{r}_{A0} = \hat{s} \times (\vec{r}_0 - \vec{r}_T) \times \hat{s}) \\
 &\Rightarrow \boxed{\vec{D} = \vec{r}_{A0} + \vec{v}_A t} && (\vec{v}_A = (\hat{s} \times \vec{v} \times \hat{s}))
 \end{aligned}$$

En exploitant le calcul du produit scalaire³, nous pouvons formuler un polynôme du 2^e degré selon le temps t qui permettra d'identifier le moment de l'intersection *s'il y a lieu* selon l'expression de D :

$$\begin{aligned}
 D = \|\vec{D}\| &\Rightarrow D = \|\vec{r}_{A0} + \vec{v}_A t\| && \text{(Remplacer } \vec{D} = \vec{r}_{A0} + \vec{v}_A t \text{)} \\
 &\Rightarrow D^2 = \|\vec{r}_{A0} + \vec{v}_A t\|^2 && \text{(Mettre au carré)} \\
 &\Rightarrow D^2 = (\vec{r}_{A0} + \vec{v}_A t) \cdot (\vec{r}_{A0} + \vec{v}_A t) && \text{(Propriété : } \|\vec{A}\|^2 = \vec{A} \cdot \vec{A} \text{)} \\
 &\Rightarrow D^2 = \vec{r}_{A0} \cdot \vec{r}_{A0} + 2\vec{r}_{A0} \cdot \vec{v}_A t + \vec{v}_A \cdot \vec{v}_A t^2 && \text{(Distribution)} \\
 &\Rightarrow \boxed{\vec{v}_A \cdot \vec{v}_A t^2 + 2\vec{r}_{A0} \cdot \vec{v}_A t + \vec{r}_{A0} \cdot \vec{r}_{A0} - D^2 = 0} && \text{(Regrouper les termes)}
 \end{aligned}$$

À partir de notre expression permettant d'évaluer le temps t requis pour effectuer une intersection entre un rayon \vec{r}_{ray} et une distance D à un axe, remplaçons la distance D d'un tube par la valeur R qui est constante et construisons notre polynôme du 2^{ième} degré :

$$\begin{aligned}
 \vec{v}_A \cdot \vec{v}_A t^2 + 2\vec{r}_{A0} \cdot \vec{v}_A t + \vec{r}_{A0} \cdot \vec{r}_{A0} - D^2 &= 0 && \text{(Équation précédente)} \\
 \Rightarrow \vec{v}_A \cdot \vec{v}_A t^2 + 2\vec{r}_{A0} \cdot \vec{v}_A t + \vec{r}_{A0} \cdot \vec{r}_{A0} - (R)^2 &= 0 && \text{(Remplacer } D = R \text{)} \\
 \Rightarrow (\vec{v}_A \cdot \vec{v}_A)t^2 + (2\vec{r}_{A0} \cdot \vec{v}_A)t + (\vec{r}_{A0} \cdot \vec{r}_{A0} - R^2) &= 0 && \text{(Réorganiser les termes)} \\
 \Rightarrow At^2 + Bt + C = 0 & \blacksquare && \text{(Remplacer } A, B \text{ et } C \text{)}
 \end{aligned}$$

³ Produit scalaire : $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(\theta) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

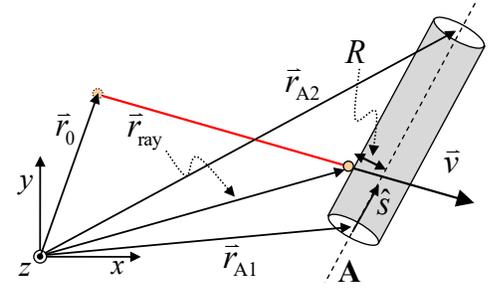
L'intersection d'un rayon avec un tube

L'intersection d'un rayon avec un tube de rayon R délimité par les deux points \vec{r}_{A1} et \vec{r}_{A2} se calcul grâce à la résolution d'un polynôme du 2^e degré en temps t

$$At^2 + Bt + C = 0$$

tel que $A = \vec{v}_A \cdot \vec{v}_A$, $B = 2\vec{r}_{A0} \cdot \vec{v}_A$ et $C = \vec{r}_{A0} \cdot \vec{r}_{A0} - R^2$

$$\text{où } \hat{s} = \frac{\vec{r}_{A2} - \vec{r}_{A1}}{|\vec{r}_{A2} - \vec{r}_{A1}|}, \quad \vec{r}_{A0} = \hat{s} \times (\vec{r}_0 - \vec{r}_{A1}) \times \hat{s}, \quad \vec{v}_A = (\hat{s} \times \vec{v} \times \hat{s})$$



avec⁴ \vec{r}_0 : Origine du rayon (position d'émission du rayon).

\vec{v} : Orientation du rayon ($\|\vec{v}\| = 1$, vecteur unitaire).

\vec{r}_{A1} : Position de l'extrémité 1 du tube.

\vec{r}_{A2} : Position de l'extrémité 2 du tube.

R : Rayon du tube.

En plus de solutionner un temps t **réel** et **positif**, la position de l'intersection \vec{r}_{ray} au temps t doit être située entre les deux extrémités \vec{r}_{A1} et \vec{r}_{A2} de l'axe ce qui correspond à satisfaire les deux contraintes

$$\begin{aligned} (\vec{r}_{\text{ray}} - \vec{r}_{A1}) \cdot \hat{s} > 0 & \quad \text{et} \quad (\vec{r}_{\text{ray}} - \vec{r}_{A2}) \cdot \hat{s} < 0 & \quad \text{avec} \quad \vec{r}_{\text{ray}} = \vec{r}_0 + \vec{v}t. \\ (\text{côté intérieur à } \vec{r}_{A1}) & & (\text{côté intérieur à } \vec{r}_{A2}) \end{aligned}$$

Preuve :

À partir de la démonstration précédente, nous pouvons affirmer que le temps d'intersection d'un tube est un sous ensemble des solutions de l'intersection d'un tube infini.

Pour satisfaire l'intersection entre les deux extrémités du tube \vec{r}_{A1} et \vec{r}_{A2} , on peut construire les deux vecteurs

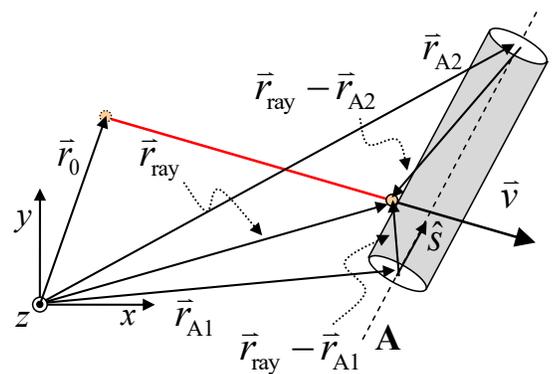
$$\vec{r}_{\text{ray}} - \vec{r}_{A1} \quad \text{et} \quad \vec{r}_{\text{ray}} - \vec{r}_{A2}$$

Avec l'axe du tube \hat{s} et le produit scalaire, une intersection \vec{r}_{ray} sera à l'intérieur du tube par rapport à \vec{r}_{A1} si

$$(\vec{r}_{\text{ray}} - \vec{r}_{A1}) \cdot \hat{s} > 0 \quad (\text{même sens que } \hat{s})$$

et sera à l'intérieur du tube par rapport à \vec{r}_{A2} si

$$(\vec{r}_{\text{ray}} - \vec{r}_{A2}) \cdot \hat{s} < 0 \quad (\text{sens contraire à } \hat{s}) \quad \blacksquare$$



⁴ La lettre **A** faite référence à l'axe du tube.

L'intersection d'un rayon avec un cône

L'intersection d'un rayon avec un cône dont le centre de la base de rayon R est situé au point \vec{r}_{A1} et la pointe du cône est située au point \vec{r}_{A2} se calcule grâce à la résolution d'un polynôme du 2^e degré en temps t

$$At^2 + Bt + C = 0$$

tel que

$$A = \vec{v}_A \cdot \vec{v}_A - v_s^2 \frac{R^2}{H^2}, \quad B = 2\vec{r}_{A0} \cdot \vec{v}_A + 2Wv_s \frac{R^2}{H^2}$$

$$\text{et} \quad C = \vec{r}_{A0} \cdot \vec{r}_{A0} - W^2 \frac{R^2}{H^2}$$

$$\text{où} \quad \hat{s} = \frac{\vec{r}_{A2} - \vec{r}_{A1}}{|\vec{r}_{A2} - \vec{r}_{A1}|}, \quad \vec{r}_{A0} = \hat{s} \times (\vec{r}_0 - \vec{r}_{A1}) \times \hat{s}, \quad \vec{v}_A = (\hat{s} \times \vec{v} \times \hat{s}), \quad h = (\vec{r}_{\text{ray}} - \vec{r}_{A1}) \cdot \hat{s}, \quad H = |\vec{r}_{A2} - \vec{r}_{A1}|,$$

$$h_0 = (\vec{r}_0 - \vec{r}_{A1}) \cdot \hat{s}, \quad v_s = \vec{v} \cdot \hat{s} \quad \text{et} \quad W = h_{\text{max}} - h_0$$

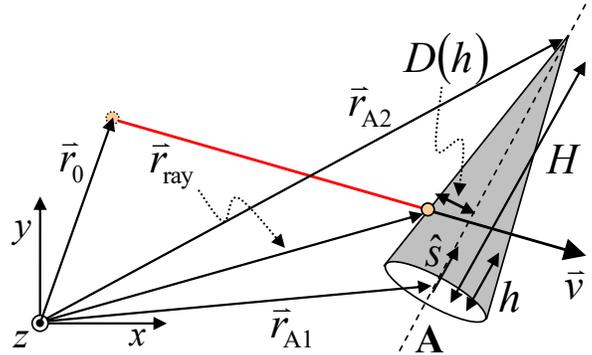
avec⁵ \vec{r}_0 : Origine du rayon (position d'émission du rayon).

\vec{v} : Orientation du rayon ($\|\vec{v}\| = 1$, vecteur unitaire).

\vec{r}_{A1} : Position centrale de la base du cône.

\vec{r}_{A2} : Position de la pointe du cône.

R : Rayon de la base du cône.



En plus de solutionner un temps t **réel** et **positif**, la position de l'intersection \vec{r}_{ray} au temps t doit être située entre les deux extrémités \vec{r}_{A1} et \vec{r}_{A2} de l'axe ce qui correspond à satisfaire les deux contraintes

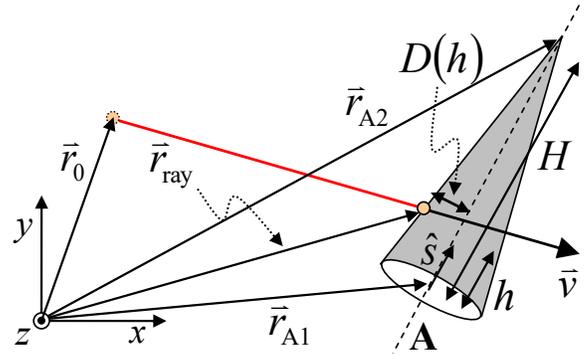
$$\begin{aligned} (\vec{r}_{\text{ray}} - \vec{r}_{A1}) \cdot \hat{s} > 0 & \quad \text{et} \quad (\vec{r}_{\text{ray}} - \vec{r}_{A2}) \cdot \hat{s} < 0 & \quad \text{avec} \quad \vec{r}_{\text{ray}} = \vec{r}_0 + \vec{v}t. \\ (\text{côté intérieur à } \vec{r}_{A1}) & & (\text{côté intérieur à } \vec{r}_{A2}) \end{aligned}$$

⁵ La lettre **A** faite référence à l'axe du tube.

Preuve :

En premier temps, il faut définir la fonction D représentant la distance entre la position de l'intersection \vec{r}_{ray} sur le cône et l'axe du cône. Puisque la distance débute avec une valeur R étant le rayon de la base du cône situé au point \vec{r}_{A1} et que cette distance varie linéairement jusqu'à une valeur nulle à la point du cône au point \vec{r}_{A2} , l'équation D sera égale à l'expression suivante :

$$D = D(h) = \left(1 - \frac{h}{H}\right)R$$



où $h = (\vec{r}_{\text{ray}} - \vec{r}_{A1}) \cdot \hat{s}$: Distance parallèle à l'axe du cône entre le point \vec{r}_{A1} et la position de l'intersection \vec{r}_{ray} .

$H = |\vec{r}_{A2} - \vec{r}_{A1}|$: La hauteur du cône.

Développons la fonction D afin d'évaluer une expression pour D^2 :

$$D = \left(1 - \frac{h}{H}\right)R \quad \text{(Expression de } D\text{)}$$

$$\Rightarrow D = \left(1 - \frac{(\vec{r}_{\text{ray}} - \vec{r}_{A1}) \cdot \hat{s}}{H}\right)R \quad (h = (\vec{r}_{\text{ray}} - \vec{r}_{A1}) \cdot \hat{s})$$

$$\Rightarrow D = \left(1 - \frac{(\vec{r}_0 + \vec{v}t - \vec{r}_{A1}) \cdot \hat{s}}{H}\right)R \quad (\vec{r}_{\text{ray}} = \vec{r}_0 + \vec{v}t)$$

$$\Rightarrow D = \left(1 - \frac{(\vec{r}_0 - \vec{r}_{A1}) \cdot \hat{s} + \vec{v} \cdot \hat{s}t}{H}\right)R \quad \text{(Réécriture)}$$

$$\Rightarrow D = \left(1 - \frac{h_0 + \vec{v} \cdot \hat{s}t}{H}\right)R \quad (h_0 = (\vec{r}_0 - \vec{r}_{A1}) \cdot \hat{s})$$

$$\Rightarrow D = \left(1 - \frac{h_0 + v_s t}{H}\right)R \quad (v_s = \vec{v} \cdot \hat{s})$$

$$\Rightarrow D = (H - h_0 - v_s t) \frac{R}{H} \quad \text{(Dénominateur commun)}$$

$$\Rightarrow D = (W - v_s t) \frac{R}{H} \quad (W = h_{\text{max}} - h_0)$$

$$\Rightarrow D^2 = (W - v_s t)^2 \frac{R^2}{H^2} \quad \text{(Mettre au carré)}$$

$$\Rightarrow D^2 = (W^2 - 2Wv_s t + v_s^2 t^2) \frac{R^2}{H^2} \quad \text{(Calcul)}$$

À partir de l'expression

$$\vec{v}_A \cdot \vec{v}_A t^2 + 2\vec{r}_{A0} \cdot \vec{v}_A t + \vec{r}_{A0} \cdot \vec{r}_{A0} - D^2 = 0$$

développée précédemment pour évaluer l'intersection d'un rayon avec un tube infini, remplaçons D^2 dans l'expression afin de formuler notre polynôme du 2^{ième} degré pour l'intersection avec le cône :

$$\vec{v}_A \cdot \vec{v}_A t^2 + 2\vec{r}_{A0} \cdot \vec{v}_A t + \vec{r}_{A0} \cdot \vec{r}_{A0} - D^2 = 0 \quad (\text{Expression})$$

$$\Rightarrow \vec{v}_A \cdot \vec{v}_A t^2 + 2\vec{r}_{A0} \cdot \vec{v}_A t + \vec{r}_{A0} \cdot \vec{r}_{A0} - \left((W^2 - 2Wv_s t + v_s^2 t^2) \frac{R^2}{H^2} \right) = 0 \quad (\text{Remplacer } D)$$

$$\Rightarrow \left(\vec{v}_A \cdot \vec{v}_A - v_s^2 \frac{R^2}{H^2} \right) t^2 + \left(2\vec{r}_{A0} \cdot \vec{v}_A + 2Wv_s \frac{R^2}{H^2} \right) t + \left(\vec{r}_{A0} \cdot \vec{r}_{A0} - W^2 \frac{R^2}{H^2} \right) = 0 \quad (\text{Réorganisation})$$

$$\Rightarrow At^2 + Bt + C = 0 \quad \blacksquare \quad (\text{Rempl. } A, B \text{ et } C)$$

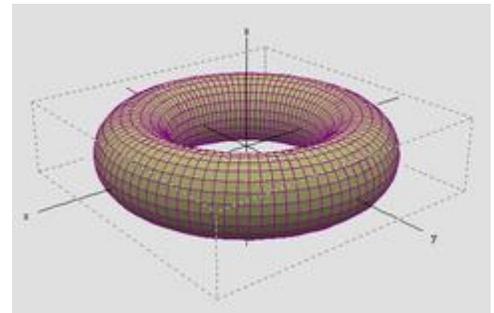
Pour s'assurer que l'intersection au temps t est située entre les deux extrémités \vec{r}_{A1} et \vec{r}_{A2} du cône, il faut utiliser la même démarche que pour le tube ce qui a déjà été démontré.

L'intersection d'un rayon avec un tore

Un tore est une forme géométrique qui a l'apparence d'un beignet. L'équation implicite d'un tore situé dans le plan xy et centré à l'origine est égale à l'expression

$$\left(x^2 + y^2 + z^2 + R_{\text{maj}}^2 - R_{\text{min}}^2 \right)^2 = 4R_{\text{maj}}^2 (x^2 + y^2)$$

où R_{maj} est la distance entre le centre du tore et le centre de la partie cylindrique du tore (*major radius*) et R_{min} est le rayon du cylindre appartenant au tore (*minor radius*).



<https://fr.wikipedia.org/wiki/Tore>
Un tore dans le plan xy centré à l'origine où $R_{\text{maj}} = 3R_{\text{min}}$

Pour réaliser l'intersection du tore avec un rayon \vec{r}_{ray} , nous pouvons décrire nos concepts à l'aide des paramètres suivants :

\vec{r}_0 : Origine du rayon (position d'émission du rayon).

\vec{v} : Orientation du rayon ($\|\vec{v}\| = 1$, vecteur unitaire).

\vec{r}_T : Position centrale du tore.

\vec{n} : L'orientation de la normale au plan du tore.

R_{max} : Rayon du tore .

R_{min} : Rayon du cylindre du tore.

L'intersection d'un rayon avec un tore centré à la position \bar{r}_T dont l'axe de la normale au plan du tore est alignée selon \bar{n} se calcul grâce à la résolution d'un polynôme du 4^e degré en temps t

$$At^4 + Bt^3 + Ct^2 + Dt + E = 0$$

tel que

$$\begin{aligned} A &= \delta_1^2 & B &= 2\delta_1\eta_2 & C &= (2\delta_1\beta_3 + \eta_2^2 - 4R_{\text{maj}}^2\gamma_1) \\ D &= 2\eta_2\beta_3 - 4R_{\text{maj}}^2\mu_2 & E &= \beta_3^2 - 4R_{\text{maj}}^2\alpha_3 \end{aligned}$$

et avec les changements de variable suivant :

Changement de base avec $\bar{k}_T \neq \bar{i}$ (sinon, on peut prendre \bar{j} comme référence dans le calcul de \bar{i}_T)		
$\bar{k}_T = \frac{\bar{n}}{ \bar{n} }$	$\bar{i}_T = \frac{\bar{i} \times \bar{k}_T}{ \bar{i} \times \bar{k}_T }$	$\bar{j}_T = \bar{k}_T \times \bar{i}_T$ (pour avoir $\bar{i}_T \times \bar{j}_T = \bar{k}_T$)

Projection des vecteurs dans la nouvelle base		
$r_{xT} = \bar{r}_T \cdot \bar{i}_T$	$r_{yT} = \bar{r}_T \cdot \bar{j}_T$	$r_{zT} = \bar{r}_T \cdot \bar{k}_T$
$r_{x0} = \bar{r}_0 \cdot \bar{i}_T$	$r_{y0} = \bar{r}_0 \cdot \bar{j}_T$	$r_{z0} = \bar{r}_0 \cdot \bar{k}_T$
$v_x = \bar{v} \cdot \bar{i}_T$	$v_y = \bar{v} \cdot \bar{j}_T$	$v_z = \bar{v} \cdot \bar{k}_T$

Changement de variable en lien avec les coefficients A, B, C, D et E		
$\alpha_1 = r_{xT}^2 + r_{yT}^2$	$\alpha_2 = \alpha_1 + r_{x0}^2 + r_{y0}^2$	$\alpha_3 = \alpha_2 - 2r_{x0}r_{xT} - 2r_{y0}r_{yT}$
$\beta_1 = R_{\text{maj}}^2 - R_{\text{min}}^2 + \alpha_1 + r_{zT}^2$	$\beta_2 = \beta_1 + r_{x0}^2 + r_{y0}^2 + r_{z0}^2$	$\beta_3 = \beta_2 - 2r_{x0}r_{xT} - 2r_{y0}r_{yT} - 2r_{z0}r_{zT}$
$\gamma_1 = v_x^2 + v_y^2$	$\delta_1 = \gamma_1 + v_z^2$	
$\mu_1 = r_{x0}v_x + r_{y0}v_y$	$\mu_2 = 2(\mu_1 - v_xr_{xT} - v_yr_{yT})$	
$\eta_1 = \mu_1 + r_{z0}v_z$	$\eta_2 = 2(\eta_1 - v_xr_{xT} - v_yr_{yT} - v_zr_{zT})$	

Preuve :

L'équation d'un tore centré à l'origine dans le plan xy est

$$(x^2 + y^2 + z^2 + R_{\text{maj}}^2 - R_{\text{min}}^2)^2 = 4R_{\text{maj}}^2(x^2 + y^2) .$$

Pour développer une expression d'un tore centré en \bar{r}_T avec une normale au plan du tore \bar{n} , nous devons définir une nouvelles base \bar{i}_T, \bar{j}_T et \bar{k}_T tel que

$$\bar{k}_T = \frac{\bar{n}}{|\bar{n}|} \quad \text{et} \quad \bar{i}_T = \frac{\bar{i} \times \bar{k}_T}{|\bar{i} \times \bar{k}_T|} \quad \bar{j}_T = \bar{k}_T \times \bar{i}_T$$

ce qui assure $\vec{i}_T \times \vec{j}_T = \vec{k}_T$. Ce choix impose cependant que $\vec{k}_T \neq \vec{i}$. On peut mesurer la distance x, y et z dans notre nouvelle base avec les équations

$$x = (\vec{r} - \vec{r}_T) \cdot \vec{i}_T, \quad y = (\vec{r} - \vec{r}_T) \cdot \vec{j}_T \quad \text{et} \quad z = (\vec{r} - \vec{r}_T) \cdot \vec{k}_T$$

où \vec{r} correspond à un vecteur position d'un point sur le tore.

Effectuons le produit scalaire afin d'obtenir une notation plus compacte :

$$\begin{aligned} x = (\vec{r} - \vec{r}_T) \cdot \vec{i}_T &\Rightarrow x = \vec{r} \cdot \vec{i}_T - \vec{r}_T \cdot \vec{i}_T \\ &\Rightarrow \boxed{x = r_x - r_{xT}} \end{aligned}$$

Nous pouvons généraliser l'ensemble des calculs à l'axe y et z dans le tableau suivant :

Selon l'axe x	Selon l'axe y	Selon l'axe z
$x = r_x - r_{xT}$	$y = r_y - r_{yT}$	$z = r_z - r_{zT}$
$r_x = \vec{r} \cdot \vec{i}_T$	$r_y = \vec{r} \cdot \vec{j}_T$	$r_z = \vec{r} \cdot \vec{k}_T$
$r_{xT} = \vec{r}_T \cdot \vec{i}_T$	$r_{yT} = \vec{r}_T \cdot \vec{j}_T$	$r_{zT} = \vec{r}_T \cdot \vec{k}_T$

Développons l'expression de $x^2 = (r_x - r_{xT})^2$ ce qui donne

$$x^2 = r_x^2 - 2r_x r_{xT} + r_{xT}^2.$$

Nous pouvons généraliser l'ensemble des calculs à l'axe y et z dans le tableau suivant :

Selon l'axe x	Selon l'axe y	Selon l'axe z
$x^2 = r_x^2 - 2r_x r_{xT} + r_{xT}^2$	$y^2 = r_y^2 - 2r_y r_{yT} + r_{yT}^2$	$z^2 = r_z^2 - 2r_z r_{zT} + r_{zT}^2$

Puisque $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t$, nous aurons à développer r_x :

$$\begin{aligned} r_x = \vec{r} \cdot \vec{i}_T &\Rightarrow r_x = (\vec{r}_0 + \vec{v}t) \cdot \vec{i}_T \\ &\Rightarrow r_x = \vec{r}_0 \cdot \vec{i}_T + \vec{v} \cdot \vec{i}_T t \\ &\Rightarrow \boxed{r_x = r_{x0} + v_x t} \quad (r_{x0} = \vec{r}_0 \cdot \vec{i}_T \text{ et } v_x = \vec{v} \cdot \vec{i}_T) \end{aligned}$$

Nous pouvons généraliser l'ensemble des calculs à l'axe y et z dans le tableau suivant :

Selon l'axe x	Selon l'axe y	Selon l'axe z
$r_x = r_{x0} + v_x t$	$r_y = r_{y0} + v_y t$	$r_z = r_{z0} + v_z t$
$r_{x0} = \vec{r}_0 \cdot \vec{i}_T$	$r_{y0} = \vec{r}_0 \cdot \vec{j}_T$	$r_{z0} = \vec{r}_0 \cdot \vec{k}_T$
$v_x = \vec{v} \cdot \vec{i}_T$	$v_y = \vec{v} \cdot \vec{j}_T$	$v_z = \vec{v} \cdot \vec{k}_T$

Développons maintenant l'expression de $r_x^2 = (r_{x0} + v_x t)^2$ ce qui donne

$$r_x^2 = r_{x0}^2 + 2r_{x0}v_x t + v_x^2 t^2 .$$

Nous pouvons généraliser l'ensemble des calculs à l'axe y et z dans le tableau suivant :

Selon l'axe x	Selon l'axe y	Selon l'axe z
$r_x^2 = r_{x0}^2 + 2r_{x0}v_x t + v_x^2 t^2$	$r_y^2 = r_{y0}^2 + 2r_{y0}v_y t + v_y^2 t^2$	$r_z^2 = r_{z0}^2 + 2r_{z0}v_z t + v_z^2 t^2$

Nous allons maintenant remplacer les expressions de x^2 , y^2 et z^2 dans l'équation du tore :

$$\begin{aligned} & (x^2 + y^2 + z^2 + R_{\text{maj}}^2 - R_{\text{min}}^2)^2 = 4R_{\text{maj}}^2(x^2 + y^2) \\ \Rightarrow & \left((r_x^2 - 2r_x r_{xT} + r_{xT}^2) + (r_y^2 - 2r_y r_{yT} + r_{yT}^2) + (r_z^2 - 2r_z r_{zT} + r_{zT}^2) + R_{\text{maj}}^2 - R_{\text{min}}^2 \right)^2 \\ & = 4R_{\text{maj}}^2 \left((r_x^2 - 2r_x r_{xT} + r_{xT}^2) + (r_y^2 - 2r_y r_{yT} + r_{yT}^2) \right) \\ \Rightarrow & \left(r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 - 2r_x r_{xT} - 2r_y r_{yT} - 2r_z r_{zT} + R_{\text{maj}}^2 - R_{\text{min}}^2 + r_{xT}^2 + r_{yT}^2 + r_{zT}^2 \right)^2 \\ & = 4R_{\text{maj}}^2 \left(r_x^2 + r_y^2 - 2r_x r_{xT} - 2r_y r_{yT} + r_{xT}^2 + r_{yT}^2 \right) \end{aligned}$$

Effectuons les changements de variable

$$\alpha_1 = r_{xT}^2 + r_{yT}^2 \quad \text{et} \quad \beta_1 = R_{\text{maj}}^2 - R_{\text{min}}^2 + \alpha_1 + r_{zT}^2$$

ce qui donne l'expression simplifiée

$$\left(r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 - 2r_x r_{xT} - 2r_y r_{yT} - 2r_z r_{zT} + \beta_1 \right)^2 = 4R_{\text{maj}}^2 \left(r_x^2 + r_y^2 - 2r_x r_{xT} - 2r_y r_{yT} + \alpha_1 \right) .$$

Nous allons maintenant remplacer les expressions de r_x^2 , r_y^2 et r_z^2 dans l'équation du tore :

$$\begin{aligned} & \left(r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 - 2r_x r_{xT} - 2r_y r_{yT} - 2r_z r_{zT} + \beta_1 \right)^2 = 4R_{\text{maj}}^2 \left(r_x^2 + r_y^2 - 2r_x r_{xT} - 2r_y r_{yT} + \alpha_1 \right) \\ \Rightarrow & \left((r_{x0}^2 + 2r_{x0}v_x t + v_x^2 t^2) + (r_{y0}^2 + 2r_{y0}v_y t + v_y^2 t^2) + (r_{z0}^2 + 2r_{z0}v_z t + v_z^2 t^2) - 2r_x r_{xT} - 2r_y r_{yT} - 2r_z r_{zT} + \beta_1 \right)^2 \\ & = 4R_{\text{maj}}^2 \left((r_{x0}^2 + 2r_{x0}v_x t + v_x^2 t^2) + (r_{y0}^2 + 2r_{y0}v_y t + v_y^2 t^2) - 2r_x r_{xT} - 2r_y r_{yT} + \alpha_1 \right) \\ \Rightarrow & \left(v_x^2 t^2 + v_y^2 t^2 + v_z^2 t^2 + 2r_{x0}v_x t + 2r_{y0}v_y t + 2r_{z0}v_z t - 2r_x r_{xT} - 2r_y r_{yT} - 2r_z r_{zT} + \beta_1 + r_{x0}^2 + r_{y0}^2 + r_{z0}^2 \right)^2 \\ & = 4R_{\text{maj}}^2 \left(v_x^2 t^2 + v_y^2 t^2 + 2r_{x0}v_x t + 2r_{y0}v_y t - 2r_x r_{xT} - 2r_y r_{yT} + \alpha_1 + r_{x0}^2 + r_{y0}^2 \right) \\ \Rightarrow & \left((v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) t^2 + 2(r_{x0}v_x + r_{y0}v_y + r_{z0}v_z) t - 2r_x r_{xT} - 2r_y r_{yT} - 2r_z r_{zT} + \beta_1 + r_{x0}^2 + r_{y0}^2 + r_{z0}^2 \right)^2 \\ & = 4R_{\text{maj}}^2 \left((v_x^2 + v_y^2) t^2 + 2(r_{x0}v_x + r_{y0}v_y) t - 2r_x r_{xT} - 2r_y r_{yT} + \alpha_1 + r_{x0}^2 + r_{y0}^2 \right) \end{aligned}$$

Effectuons l'ensemble des changements de variable suivant :

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= \alpha_1 + r_{x0}^2 + r_{y0}^2 & \beta_2 &= \beta_1 + r_{x0}^2 + r_{y0}^2 + r_{z0}^2 \\ \gamma_1 &= v_x^2 + v_y^2 & \delta_1 &= \gamma_1 + v_z^2 \\ \mu_1 &= r_{x0}v_x + r_{y0}v_y & \eta_1 &= \mu_1 + r_{z0}v_z\end{aligned}$$

Ces changements nous donnent l'expression

$$\left(\delta_1 t^2 + 2\eta_1 t - 2r_x r_{xT} - 2r_y r_{yT} - 2r_z r_{zT} + \beta_2\right)^2 = 4R_{\text{maj}}^2 \left(\gamma_1 t^2 + 2\mu_1 t - 2r_x r_{xT} - 2r_y r_{yT} + \alpha_2\right) .$$

Remplaçons maintenant les termes r_x , r_y et r_z

$$\begin{aligned}\left(\delta_1 t^2 + 2\eta_1 t - 2r_x r_{xT} - 2r_y r_{yT} - 2r_z r_{zT} + \beta_2\right)^2 &= 4R_{\text{maj}}^2 \left(\gamma_1 t^2 + 2\mu_1 t - 2r_x r_{xT} - 2r_y r_{yT} + \alpha_2\right) \\ \Rightarrow \left(\delta_1 t^2 + 2\eta_1 t - 2(r_{x0} + v_x t)r_{xT} - 2(r_{y0} + v_y t)r_{yT} - 2(r_{z0} + v_z t)r_{zT} + \beta_2\right)^2 & \\ = 4R_{\text{maj}}^2 \left(\gamma_1 t^2 + 2\mu_1 t - 2(r_{x0} + v_x t)r_{xT} - 2(r_{y0} + v_y t)r_{yT} + \alpha_2\right) & \\ \Rightarrow \left(\delta_1 t^2 + 2\eta_1 t - 2r_{x0}r_{xT} - 2v_x r_{xT} t - 2r_{y0}r_{yT} - 2v_y r_{yT} t - 2r_{z0}r_{zT} - 2v_z r_{zT} t + \beta_2\right)^2 & \\ = 4R_{\text{maj}}^2 \left(\gamma_1 t^2 + 2\mu_1 t - 2r_{x0}r_{xT} - 2v_x r_{xT} t - 2r_{y0}r_{yT} - 2v_y r_{yT} t + \alpha_2\right) & \\ \Rightarrow \left(\delta_1 t^2 + 2(\eta_1 - v_x r_{xT} - v_y r_{yT} - v_z r_{zT})t + \beta_2 - 2r_{x0}r_{xT} - 2r_{y0}r_{yT} - 2r_{z0}r_{zT}\right)^2 & \\ = 4R_{\text{maj}}^2 \left(\gamma_1 t^2 + 2(\mu_1 - v_x r_{xT} - v_y r_{yT})t + \alpha_2 - 2r_{x0}r_{xT} - 2r_{y0}r_{yT}\right) &\end{aligned}$$

Nous allons faire le changement de variable suivant :

$$\begin{aligned}\alpha_3 &= \alpha_2 - 2r_{x0}r_{xT} - 2r_{y0}r_{yT} & \beta_3 &= \beta_2 - 2r_{x0}r_{xT} - 2r_{y0}r_{yT} - 2r_{z0}r_{zT} \\ \mu_2 &= 2(\mu_1 - v_x r_{xT} - v_y r_{yT}) & \eta_2 &= 2(\eta_1 - v_x r_{xT} - v_y r_{yT} - v_z r_{zT})\end{aligned}$$

Ces changements nous donnent l'expression

$$\left(\delta_1 t^2 + \eta_2 t + \beta_3\right)^2 = 4R_{\text{maj}}^2 \left(\gamma_1 t^2 + \mu_2 t + \alpha_3\right) .$$

Développons maintenant le carré du côté gauche et réécrivons le tout sous la forme d'un polynôme du 4^{ième} degré :

$$\begin{aligned}\left(\delta_1 t^2 + \eta_2 t + \beta_3\right)^2 &= 4R_{\text{maj}}^2 \left(\gamma_1 t^2 + \mu_2 t + \alpha_3\right) \\ \Rightarrow \left(\delta_1 t^2 + \eta_2 t + \beta_3\right)\left(\delta_1 t^2 + \eta_2 t + \beta_3\right) &= 4R_{\text{maj}}^2 \left(\gamma_1 t^2 + \mu_2 t + \alpha_3\right) \\ \Rightarrow \delta_1^2 t^4 + \delta_1 \eta_2 t^3 + \delta_1 \beta_3 t^2 + \eta_2 \delta_1 t^3 + \eta_2^2 t^2 + \eta_2 \beta_3 t + \beta_3 \delta_1 t^2 + \beta_3 \eta_2 t + \beta_3^2 &= 4R_{\text{maj}}^2 \left(\gamma_1 t^2 + \mu_2 t + \alpha_3\right) \\ \Rightarrow \delta_1^2 t^4 + 2\delta_1 \eta_2 t^3 + 2\delta_1 \beta_3 t^2 + \eta_2^2 t^2 + 2\eta_2 \beta_3 t + \beta_3^2 &= 4R_{\text{maj}}^2 \left(\gamma_1 t^2 + \mu_2 t + \alpha_3\right) \\ \Rightarrow \delta_1^2 t^4 + 2\delta_1 \eta_2 t^3 + \left(2\delta_1 \beta_3 + \eta_2^2 - 4R_{\text{maj}}^2 \gamma_1\right)t^2 + \left(2\eta_2 \beta_3 - 4R_{\text{maj}}^2 \mu_2\right)t + \beta_3^2 - 4R_{\text{maj}}^2 \alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

La dernière équation se déduit à un polynôme du 4^e degré

$$At^4 + Bt^3 + Ct^2 + Dt + E = 0$$

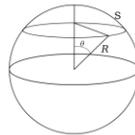
tel que

$$\begin{aligned} A &= \delta_1^2 & B &= 2\delta_1\eta_2 & C &= (2\delta_1\beta_3 + \eta_2^2 - 4R_{\text{maj}}^2\gamma_1) \\ D &= 2\eta_2\beta_3 - 4R_{\text{maj}}^2\mu_2 & E &= \beta_3^2 - 4R_{\text{maj}}^2\alpha_3 \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. ■

L'intersection d'une calotte sphérique

En construction ...



https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Calotte_spherique.svg

