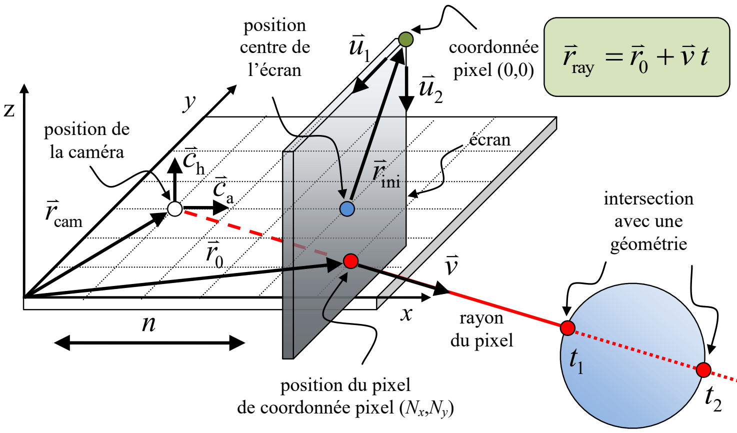
Chapitre 7.2a – L'intersection dans le *ray tracer*

Le calcul de l'intersection

Le calcul de l'intersection consiste à vérifier si un rayon

$$\vec{r}_{\text{ray}} = \vec{r}_0 + \vec{v}\, t$$

partant de la caméra et traversant un pixel de l'écran de projection peut effectuer une intersection avec une géométrie de la scène. Si plusieurs géométries réalisent une intersection avec le rayon, il faut identifier la géométrie la plus près en utilisant le temps t pour ordonner les intersections réalisées.



Rayon lancé par la caméra.

Il y aura intersection si une coordonnée du rayon $\vec{r}_{\text{ray}}$ à un temps t est égale à une coordonnée $\vec{r}_{\text{géo}} = \vec{r}_{\text{géo}}(x, y, z)$ d'une géométrie. Habituellement, nous exprimons la forme des géométries sous forme canonique (surface quadrique[1]) ce qui représente une contrainte aux valeurs admissibles du rayon $\vec{r}_{\text{ray}}$ pour qu'il y ait intersection. Si aucune valeur ne permet de satisfaire la contrainte, alors il n'y a pas d'intersection avec le rayon $\vec{r}_{\text{ray}}$.

Voici quelques exemples de forme géométriques sous forme implicite $G(x, y, z) = 0$:

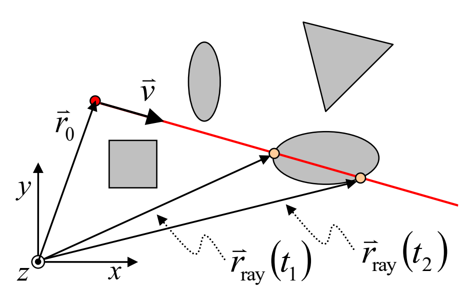
Plan	Triangle	Sphère
$ax + by + cz + d = 0$	$ax + by + cz + d = 0$ (avec contraintes sur x,y et z)	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$

L'analyse des solutions en temps *t*

Puisque le calcul de l'intersection d'un rayon $\vec{r}_{\text{ray}}$ avec une géométrie consiste à évaluer les multiples solutions d'une équation paramétrée selon la variable du temps t, il y aura souvent plusieurs solutions.

Dans le contexte d'un *ray tracer*, la solution physique devra respecter les contraintes suivantes :

1) Le temps t doit être **réel**. Un temps imaginaire ne correspond pas à une intersection dans l'espace réel *xyz*.
2) Le temps t doit être **positif**. Un temps négatif correspond à une intersection dans la direction inverse au rayon (dans le sens de $-\vec{v}$).
3) Le temps t doit être le **plus petit** de l'ensemble des solutions tout en **étant positif** afin de déterminer l'intersection valide la plus près de l'origine du rayon.



Intersections réalisées à deux temps positifs.

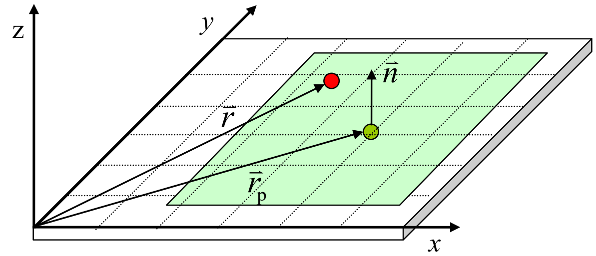
[1] Pour une forme générale, consultez le lien suivant : http://fr.wikipedia.org/wiki/Quadrique

L'équation vectorielle d'un plan

L'équation implicite $P(x, y, z)$ d'un plan position passant par le point (x_P, y_P, z_P) dont la normale à la surface est orientée selon (a, b, c) est sous la forme

$$ax + by + cz + d = 0$$

où $d = -ax_P - by_P - cz_P$ et x,y et z correspond à une coordonnée sur le plan.



Visualisation d'un plan situé dans le plan *xy*.

On peut réécrire cette relation sous forme vectorielle à l'aide de l'équation suivante :

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_P) = 0$$

où $\vec{r}$: Position d'un point sur le plan. ($\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$)

$\vec{r}_P$: Position d'un point de référence sur le plan. ($\vec{r}_S = x_S\vec{i} + y_S\vec{j} + z_S\vec{k}$)

$\vec{n}$: Normale à la surface du plan. ($\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$)

<u>Preuve :</u>

Considérons un plan passant par la coordonnée (x_P, y_P, z_P) ayant une normale à la surface sous forme vectorielle $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$. Réécrivons l'équation implicite du plan sous forme vectoriel où $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ correspond à une coordonnée (x, y, z) située sur le plan :

$ax + by + cz + d = 0$ (Équation implicite du plan)

$\Rightarrow \quad ax + by + cz + (-ax_P - by_P - cz_P) = 0$ ($d = -ax_P - by_P - cz_P$)

$\Rightarrow \quad (a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}) \cdot (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) + (-ax_P - by_P - cz_P) = 0$ ($\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$)

$\Rightarrow \quad \vec{n} \cdot \vec{r} + (-ax_P - by_P - cz_P) = 0$ (Définition de $\vec{n}$ et $\vec{r}$)

$\Rightarrow \quad \vec{n} \cdot \vec{r} - (ax_P + by_P + cz_P) = 0$ (Factoriser signe négatif)

$\Rightarrow \quad \vec{n} \cdot \vec{r} - (a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}) \cdot (x_P\vec{i} + y_P\vec{j} + z_P\vec{k}) = 0$ ($\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$)

$\Rightarrow \quad \vec{n} \cdot \vec{r} - \vec{n} \cdot \vec{r}_P = 0$ (Définition de $\vec{n}$ et $\vec{r}_P$)

$\Rightarrow \quad \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_P) = 0 \quad \blacksquare$ (Factoriser $\vec{n}$)

L'intersection d'un rayon avec un plan

Le temps t requis pour réaliser une intersection entre un rayon $\vec{r}_{\text{ray}}$ et un plan passant par la position $\vec{r}_{\text{P}}$ dont la normale à la surface est orientée selon le vecteur $\vec{n}$ se calcul grâce à la résolution d'un polynôme du 1^er^ degré

$$At + B = 0$$

$$\text{tel que } A = \vec{n} \cdot \vec{v} \text{ et } B = \vec{n} \cdot (\vec{r}_0 - \vec{r}_{\text{P}})$$

avec $\vec{r}_0$: Origine du rayon (position d'émission du rayon).

$\vec{v}$: Orientation du rayon ($\|\vec{v}\| = 1$, vecteur unitaire).

$\vec{r}_{\text{P}}$: Position d'un point de référence sur le plan.

$\vec{n}$: Normale à la surface du plan.

Preuve :

Pour évaluer l'intersection d'un rayon $\vec{r}_{\text{ray}}$ avec un plan, il suffit d'interpréter la forme du plan comme étant une contrainte aux différentes positions pouvant être occupées par le rayon.

Rayon	Contrainte de l'intersection avec le plan
$\vec{r}_{\text{ray}} = \vec{r}_0 + \vec{v}t$	$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_{\text{P}}) = 0$

Si l'on impose que la position du rayon $\vec{r}_{\text{ray}}$ intersection une position $\vec{r}$ appartenant au plan, nous obtenons la contrainte

$$\vec{n} \cdot (\vec{r}_{\text{ray}} - \vec{r}_{\text{P}}) = 0 \,.$$

Puisque $\vec{r}_{\text{ray}} = \vec{r}_0 + \vec{v}t$ est paramétré selon t, nous pouvons remplacer cette expression dans la contrainte précédente afin de déterminer l'instant t où il y aura intersection :

$\vec{n} \cdot (\vec{r}_{\text{ray}} - \vec{r}_{\text{P}}) = 0$ (Équation précédente)

$\Rightarrow \quad \vec{n} \cdot ((\vec{r}_0 + \vec{v}t) - \vec{r}_{\text{P}}) = 0$ ($\vec{r}_{\text{ray}} = \vec{r}_0 + \vec{v}t$)

$\Rightarrow \quad \vec{n} \cdot (\vec{r}_0 - \vec{r}_{\text{P}} + \vec{v}t) = 0$ (Réécriture)

$\Rightarrow \quad \vec{n} \cdot (\vec{r}_0 - \vec{r}_{\text{P}}) + \vec{n} \cdot \vec{v}t = 0$ (Distribuer le produit scalaire)

$\Rightarrow \quad \vec{n} \cdot \vec{v}t + \vec{n} \cdot (\vec{r}_0 - \vec{r}_{\text{P}}) = 0$ (Réorganiser les termes)

$\Rightarrow \quad At + B = 0 \quad \blacksquare$ (Remplacer A et B)

En isolant le temps t dans la dernière équation, on obtient ainsi un temps d'intersection t_{int} égal à

$$t_{\text{int}} = -\frac{\vec{n} \cdot (\vec{r}_0 - \vec{r}_{\text{P}})}{\vec{n} \cdot \vec{v}} \quad \Rightarrow \quad t_{\text{int}} = \frac{\vec{n} \cdot (\vec{r}_{\text{P}} - \vec{r}_0)}{\vec{n} \cdot \vec{v}}$$

pour intersecté le rayon $\vec{r}_{\text{ray}}$ avec le plan.

Situation A : ***L'intersection d'un rayon avec un plan.*** Un rayon d'origine $\vec{r}_0 = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ et d'orientation $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ voyage dans une scène 3d où est situé un plan d'origine $\vec{r}_{\mathrm{P}} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ dont la normale à la surface est orientée selon $\vec{N} = 3\vec{i} + 4\vec{k}$. On désire **(a)** évaluer la normale à la surface normalisée, **(b)** évaluer le temps requis afin que le rayon puis intersecter le plan et **(c)** la coordonnée de l'intersection entre le rayon et le plan.

Évaluons la normale à la surface afin qu'elle soit unitaire :

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{\left\|\vec{N}\right\|} \quad\Rightarrow\quad \vec{n} = \frac{\left(3\vec{i} + 4\vec{k}\right)}{\left\|\left(3\vec{i} + 4\vec{k}\right)\right\|}$$

$$\Rightarrow\quad \vec{n} = \frac{\left(3\vec{i} + 4\vec{k}\right)}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\vec{n} = 0{,}6\vec{i} + 0{,}8\vec{k}} \quad \textbf{(a)}$$

Évaluons le temps de l'intersection entre un rayon et un plan à partir de l'expression

$$t_{\mathrm{int}} = \frac{\vec{n}\cdot\left(\vec{r}_{\mathrm{P}} - \vec{r}_0\right)}{\vec{n}\cdot\vec{v}}$$

1) $\vec{r}_{\mathrm{P}} - \vec{r}_0$

$$\Rightarrow\quad \vec{r}_{\mathrm{P}} - \vec{r}_0 = \left(-2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}\right) - \left(2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}\right)$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\vec{r}_{\mathrm{P}} - \vec{r}_0 = -4\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}}$$

2) $\vec{n}\cdot\vec{v}$

$$\Rightarrow\quad \vec{n}\cdot\vec{v} = \left(0{,}6\vec{i} + 0{,}8\vec{k}\right)\cdot\left(-\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}\right)$$

$$\Rightarrow\quad \vec{n}\cdot\vec{v} = (0{,}6)(-1) + (0)(2) + (0{,}8)(-3)$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\vec{n}\cdot\vec{v} = -3}$$

3) $t_{\mathrm{int}} = \dfrac{\vec{n}\cdot\left(\vec{r}_{\mathrm{P}} - \vec{r}_0\right)}{\vec{n}\cdot\vec{v}}$

$$\Rightarrow\quad t_{\mathrm{int}} = \frac{\left(0{,}6\vec{i} + 0{,}8\vec{k}\right)\cdot\left(-4\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}\right)}{(-3)}$$

$$\Rightarrow\quad t_{\mathrm{int}} = \frac{(0{,}6)(-4) + (0)(5) + (0{,}8)(1)}{(-3)}$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{t_{\mathrm{int}} = 0{,}5333} \quad \textbf{(b)}$$

Évaluons la position de l'intersection avec l'expression du rayon :

$$\vec{r}_{\mathrm{ray}} = \vec{r}_0 + \vec{v}\,t \quad\Rightarrow\quad \vec{r}_{\mathrm{int}} = \vec{r}_0 + \vec{v}\,t_{\mathrm{int}}$$

$$\Rightarrow\quad \vec{r}_{\mathrm{int}} = \left(2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}\right) + \left(-\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}\right)(0{,}5333)$$

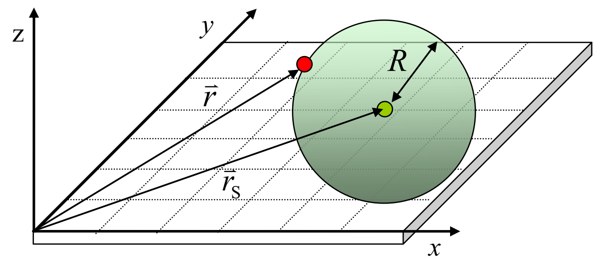
$$\Rightarrow\quad \boxed{\vec{r}_{\mathrm{int}} = 1{,}467\vec{i} - 1{,}933\vec{j} - 0{,}6\vec{k}} \quad \textbf{(c)}$$

L'équation vectorielle d'une sphère

L'équation implicite $S(x, y, z)$ d'une sphère de rayon R centrée à la position (x_S, y_S, z_S) est sous la forme

$$(x - x_S)^2 + (y - y_S)^2 + (z - z_S)^2 = R^2$$

où x,y et z correspond à une coordonnée sur la sphère.



Visualisation d'une sphère située dans lier cadran d'un espace *xyz*.

On peut réécrire cette relation sous forme vectorielle à l'aide de l'équation suivante :

$$\vec{r} \cdot \vec{r} - 2\vec{r} \cdot \vec{r}_S + \vec{r}_S \cdot \vec{r}_S = R^2$$

où $\vec{r}$: Position d'un point sur la sphère. ($\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$)

$\vec{r}_S$: Position du centre de la sphère. ($\vec{r}_S = x_S\vec{i} + y_S\vec{j} + z_S\vec{k}$)

R : Rayon de la sphère.

<u>Preuve :</u>

Considérons une sphère centrée en coordonnée (x_S, y_S, z_S) de rayon R. Réécrivons l'équation implicite de cette sphère sous forme vectoriel où $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ correspond à une coordonnée (x, y, z) située sur la sphère :

$(x - x_S)^2 + (y - y_S)^2 + (z - z_S)^2 = R^2$ (Équation implicite de la sphère)

$\Rightarrow$ $(d_x)^2 + (d_y)^2 + (d_z)^2 = R^2$ ($d_x = x - x_S, d_y = y - y_S, d_z = z - z_S$)

$\Rightarrow$ $d^2 = R^2$ ($d^2 = {d_x}^2 + {d_y}^2 + {d_z}^2$)

$\Rightarrow$ $\|\vec{d}\|^2 = R^2$ ($\|\vec{d}\| = d$)

$\Rightarrow$ $\vec{d} \cdot \vec{d} = R^2$ ($\|\vec{d}\|^2 = \vec{d} \cdot \vec{d}$)

$\Rightarrow$ $(\vec{r} - \vec{r}_S) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_S) = R^2$ ($\vec{d} = \vec{r} - \vec{r}_S$)

$\Rightarrow$ $\vec{r} \cdot \vec{r} - 2\vec{r} \cdot \vec{r}_S + \vec{r}_S \cdot \vec{r}_S = R^2$ ■ (Distribuer le produit scalaire)

L'intersection d'un rayon avec une sphère

Le temps t requis pour réaliser une intersection entre un rayon $\vec{r}_{\text{ray}}$ et une sphère de rayon R centrée à la position $\vec{r}_{\text{S}}$ se calcul grâce à la résolution d'un polynôme du 2ième degré

$$At^2 + Bt + C = 0$$

$$\text{tel que } A = \vec{v} \cdot \vec{v} \quad , \quad B = 2\vec{r}_{\text{S0}} \cdot \vec{v} \quad \text{et} \quad C = \vec{r}_{\text{S0}} \cdot \vec{r}_{\text{S0}} - R^2 \quad \text{où} \quad \vec{r}_{\text{S0}} = \vec{r}_0 - \vec{r}_{\text{S}} \; .$$

avec $\vec{r}_0$: Origine du rayon (position d'émission du rayon).
$\vec{v}$: Orientation du rayon ($\|\vec{v}\| = 1$, vecteur unitaire).
$\vec{r}_{\text{S}}$: Position du centre de la sphère.
R : Rayon de la sphère.

Preuve :

Pour évaluer l'intersection d'un rayon $\vec{r}_{\text{ray}}$ avec une sphère, il suffit d'interpréter la forme de la sphère comme étant une contrainte aux différentes positions pouvant être occupées par le rayon.

Rayon	Contrainte de l'intersection avec la sphère
$\vec{r}_{\text{ray}} = \vec{r}_0 + \vec{v}t$	$\vec{r} \cdot \vec{r} - 2\vec{r} \cdot \vec{r}_{\text{S}} + \vec{r}_{\text{S}} \cdot \vec{r}_{\text{S}} = R^2$

Si l'on impose que la position du rayon $\vec{r}_{\text{ray}}$ intersection une position $\vec{r}$ appartenant à la sphère, nous obtenons la contrainte

$$\vec{r}_{\text{ray}} \cdot \vec{r}_{\text{ray}} - 2\vec{r}_{\text{ray}} \cdot \vec{r}_{\text{S}} + \vec{r}_{\text{S}} \cdot \vec{r}_{\text{S}} = R^2$$

et puisque le rayon $\vec{r}_{\text{ray}} = \vec{r}_0 + \vec{v}t$ est paramétrisé selon *t*, nous pouvons remplacer cette expression dans la contrainte afin de déterminer l'instant *t* où il y aura intersection :

$$\vec{r}_{\text{ray}} \cdot \vec{r}_{\text{ray}} - 2\vec{r}_{\text{ray}} \cdot \vec{r}_{\text{S}} + \vec{r}_{\text{S}} \cdot \vec{r}_{\text{S}} = R^2 \qquad \text{(Équation précédente)}$$

$$\Rightarrow \quad (\vec{r}_0 + \vec{v}t) \cdot (\vec{r}_0 + \vec{v}t) - 2(\vec{r}_0 + \vec{v}t) \cdot \vec{r}_{\text{S}} + \vec{r}_{\text{S}} \cdot \vec{r}_{\text{S}} = R^2 \qquad (\vec{r}_{\text{ray}} = \vec{r}_0 + \vec{v}t)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}_0 \cdot \vec{r}_0 + 2\vec{r}_0 \cdot \vec{v}t + \vec{v} \cdot \vec{v}\,t^2 - 2\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_{\text{S}} - 2\vec{r}_{\text{S}} \cdot \vec{v}t + \vec{r}_{\text{S}} \cdot \vec{r}_{\text{S}} - R^2 = 0 \qquad \text{(Distribuer produit scalaire)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v} \cdot \vec{v}\,t^2 + 2(\vec{r}_0 \cdot \vec{v} - \vec{r}_{\text{S}} \cdot \vec{v})t + \vec{r}_0 \cdot \vec{r}_0 - 2\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_{\text{S}} + \vec{r}_{\text{S}} \cdot \vec{r}_{\text{S}} - R^2 = 0 \qquad \text{(Regrouper termes en } t\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v} \cdot \vec{v}\,t^2 + 2(\vec{r}_0 - \vec{r}_{\text{S}}) \cdot \vec{v}\,t + (\vec{r}_0 - \vec{r}_{\text{S}}) \cdot (\vec{r}_0 - \vec{r}_{\text{S}}) - R^2 = 0 \qquad \text{(Factorier } \vec{v}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v} \cdot \vec{v}\,t^2 + 2\vec{r}_{\text{S0}} \cdot \vec{v}\,t + \vec{r}_{\text{S0}} \cdot \vec{r}_{\text{S0}} - R^2 = 0 \qquad (\vec{r}_{\text{S0}} = \vec{r}_0 - \vec{r}_{\text{S}})$$

$$\Rightarrow \quad At^2 + Bt + C = 0 \quad \blacksquare \qquad \text{(Remplacer } A\text{, } B \text{ et } C\text{)}$$

En isolant le temps t dans la dernière équation, on obtient ainsi les temps d'intersection t_{int} égaux à

$$t_{\text{int}} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

ce qui nous donne les interprétations suivantes :

$B^2 - 4AC < 0$	$B^2 - 4AC = 0$	$B^2 - 4AC > 0$
0 solution (aucune intersection)	1 solution (une intersection)	2 solutions (deux intersections)

Dans le cas de **deux solutions**, il faut choisir la solution qui propose **le plus petit temps positif** étant le 1$^{\text{er}}$ contact valide avec la sphère.

Situation B : ***L'intersection d'un rayon avec une sphère.*** Un rayon d'origine $\vec{r}_0 = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ et d'orientation $\vec{v} = -3\vec{j} + 5\vec{k}$ voyage dans une scène 3d où est située une sphère de rayon $R = 3$ centrée à la coordonnée $\vec{r}_{\text{S}} = \vec{i} - 3\vec{k}$. On désire évaluer les temps d'intersection entre le rayon et la sphère s'il y a intersection.

À partir de l'expression

$$At^2 + Bt + C = 0 \qquad \text{où} \qquad t = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

tel que

$$A = \vec{v} \cdot \vec{v} \quad , \quad B = 2\vec{r}_{\text{S0}} \cdot \vec{v} \quad , \quad C = \vec{r}_{\text{S0}} \cdot \vec{r}_{\text{S0}} - R^2 \quad \text{et} \quad \vec{r}_{\text{S0}} = \vec{r}_0 - \vec{r}_{\text{S}} \quad ,$$

évaluons quelques termes puis évaluons les racines réelles du polynôme du 2$^{\text{ième}}$ degré afin d'évaluer le temps des intersections entre un rayon et une sphère :

1) $\vec{r}_{\text{S0}} = \vec{r}_0 - \vec{r}_{\text{S}} \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_{\text{S0}} = \left(3\vec{i} + 2\vec{j}\right) - \left(\vec{i} - 3\vec{k}\right)$

$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{r}_{\text{S0}} = 2\vec{i} + 5\vec{j}}$

2) $A = \vec{v} \cdot \vec{v} \quad \Rightarrow \quad A = \left(-3\vec{j} + 5\vec{k}\right) \cdot \left(-3\vec{j} + 5\vec{k}\right)$

$\Rightarrow \quad A = (0)(0) + (-3)(-3) + (5)(5)$

$\Rightarrow \quad \boxed{A = 34}$

3) $B = 2\vec{r}_{\text{S0}} \cdot \vec{v} \quad \Rightarrow \quad B = 2\left(2\vec{i} + 5\vec{j}\right) \cdot \left(-3\vec{j} + 5\vec{k}\right)$

$\Rightarrow \quad B = 2\left((2)(0) + (5)(-3) + (0)(5)\right)$

$\Rightarrow \quad \boxed{B = -30}$

4) $C = \vec{r}_{\text{S0}} \cdot \vec{r}_{\text{S0}} - R^2 \quad \Rightarrow \quad C = \left(2\vec{i} + 5\vec{j}\right) \cdot \left(2\vec{i} + 5\vec{j}\right) - (3)^2$

$\Rightarrow \quad C = \left((2)(2) + (5)(5) + (0)(0)\right) - 9$

$\Rightarrow \quad \boxed{C = 20}$

5) $At^2 + Bt + C = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{\text{int}} = \dfrac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$

$\Rightarrow \quad t_{\text{int}} = \dfrac{-(-30) \pm \sqrt{(-30)^2 - 4(34)(20)}}{2(34)}$

$\Rightarrow \quad t_{\text{int}} = \dfrac{30 \pm \sqrt{-1820}}{68}$

$\Rightarrow$ Il n'y a pas de racine réelle, donc **il n'y a pas d'intersection**.