

# Chapitre 1.1a – Les oscillations

## La cinématique

La cinématique est l'étude du mouvement d'un objet en fonction du temps. Pour ce faire, nous avons recours aux concepts de position, vitesse et accélération :

Position :	$x(t)$	unité : m
Vitesse :	$v_x(t)$	unité : m/s
Accélération :	$a_x(t)$	unité : m/s <sup>2</sup>

L'objectif de la **cinématique** est de **définir** ces **trois fonctions du temps**. Ces équations forment ensemble les **équations du mouvement**. Grâce au calcul différentiel et intégral, il existe les relations mathématiques entre ces fonctions<sup>1</sup> :

Relation avec la dérivée :  $v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt}$  et  $a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$

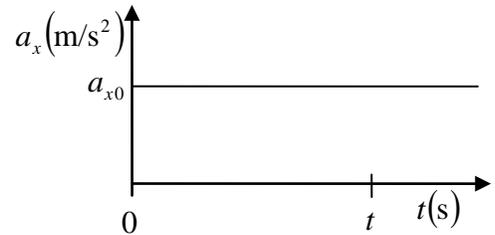
Relation intégrale :  $v_x(t) - v_{xi} = \int_{t_i}^t a_x(t) dt$  et  $x(t) - x_i = \int_{t_i}^t v_x(t) dt$

## La cinématique avec une accélération constante

Considérons une accélération constante de la forme  $a_x(t) = a_{x0}$ . Nous pouvons reconstruire toutes les équations du MUA<sup>2</sup> à partir de l'équation différentielle suivante :

$$a_x(t) = a_{x0} \quad \text{et} \quad \frac{d^2x(t)}{dt^2} = a_{x0}$$

(accélération constante)



$$1) \quad v_x(t) - v_{xi} = \int_{t_i}^t a_x(t) dt \quad \Rightarrow \quad v_x(t) - v_{x0} = \int_{t=0}^t a_{x0} dt$$

(Remplacer  $a_x(t)$ )

$$\Rightarrow v_x(t) - v_{x0} = a_{x0} [t]_0^t$$

(Résoudre l'intégrale)

$$\Rightarrow \boxed{v_x(t) = v_{x0} + a_{x0}t}$$

(Évaluer l'intégrale)

$$2) \quad x(t) - x_i = \int_{t_i}^t v_x(t) dt \quad \Rightarrow \quad x(t) - x_0 = \int_{t=0}^t (v_{x0} + a_{x0}t) dt$$

(Remplacer  $v_x(t)$ )

$$\Rightarrow x(t) - x_0 = v_{x0} [t]_0^t + a_{x0} \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^t$$

(Résoudre l'intégrale)

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_{x0}t^2}$$

(Évaluer l'intégrale)

<sup>1</sup> Rappel de mécanique : Physique XXI Volume A, chapitre 1.13 et 1.14

<sup>2</sup> Rappel de mécanique : Physique XXI Volume A, chapitre 1.6

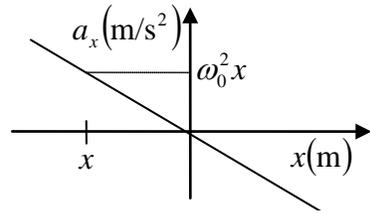
Référence : Marc Séguin, Physique XXI Tome C

Note de cours rédigée par Simon Vézina

## L'oscillateur harmonique simple (OHS)

L'oscillateur harmonique simple OHS est une équation différentielle<sup>3</sup> reliant la position  $x$  à l'accélération  $a_x$  de la façon suivante :

$$a_x = -\omega^2 x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$



Preuve :

À l'aide des relations différentielles reliant  $x(t)$ ,  $v_x(t)$  et  $a_x(t)$  entre elles, nous pouvons développer l'OHS de la façon suivante :

$$\begin{aligned} a_x = -\omega^2 x &\Rightarrow \frac{dv_x}{dt} = -\omega^2 x && \text{(Définition de l'accélération, } a_x = dv_x / dt \text{)} \\ &\Rightarrow \frac{d(dx/dt)}{dt} = -\omega^2 x && \text{(Définition de la vitesse, } v_x = dx/dt \text{)} \\ &\Rightarrow \boxed{\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0} && \blacksquare \text{ (Dérivée seconde, } d(dx/dt)/dt = d^2 x/dt^2 \text{)} \end{aligned}$$

## La solution intuitive de l'OHS

La solution à une équation différentielle

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad \text{que l'on peut écrire sous la forme} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

est une équation du mouvement  $x(t)$  particulière. Pour la déterminer, il faut :

*Trouver une équation  $x(t)$  telle que « dérivée deux fois » par rapport à  $t$ , elle est égale à elle-même multipliée par la constante  $-\omega^2$ .*

Hypothèse #1 :  $x = e^{\omega t}$

Vérification : 
$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2(e^{\omega t})}{dt^2} = \frac{d(\omega e^{\omega t})}{dt} = \omega^2 e^{\omega t} = \omega^2 x$$

Conclusion : Ce choix n'est **pas valide**, car  $\frac{d^2 x}{dt^2} = \omega^2 x \neq -\omega^2 x$ .

Hypothèse #2 :  $x = A \sin(\omega t + \phi)$

Vérification : 
$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2(A \sin(\omega t + \phi))}{dt^2} = \frac{d(A \omega \cos(\omega t + \phi))}{dt} = -A \omega^2 \sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 x$$

Conclusion : L'hypothèse #2 est adéquate. La fonction  $x(t)$  est **une solution particulière** de l'OHS et porte le nom de mouvement harmonique simple (MHS).

<sup>3</sup>Une **équation différentielle** est une relation mathématique entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées.

## Le mouvement harmonique simple (MHS)

L'équation du mouvement harmonique simple MHS est la solution à l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique simple OHS et elle est représentée mathématiquement à l'aide d'une fonction sinusoïdale. Les conditions de position initiale  $x_0$  et de vitesse initiale  $v_{x0}$  nécessaire à la description complète du mouvement  $x(t)$  sont décrites à l'intérieur des paramètres d'amplitude  $A$  et de constante de phase  $\phi$  :

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

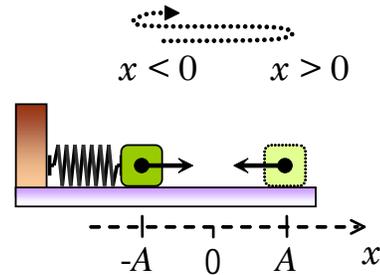
où  $x(t)$  : Position de l'objet selon l'axe  $x$  (m)

$A$  : Amplitude du mouvement (m)

$\omega$  : Fréquence angulaire (rad/s)

$t$  : Temps (s)

$\phi$  : Constante de phase (rad)



Le système masse-ressort est un OHS, le mouvement est donc un MHS.

### Preuve :

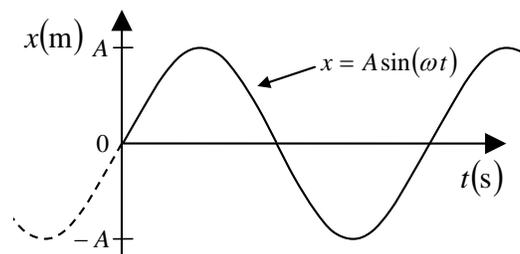
La preuve détaillée reliant le MHS  $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$  comme étant **la solution la plus générale** à l'OHS  $a_x = -\omega^2 x$  est réalisée au chapitre 1.1c. On y trouve également les relations reliant  $x_0$  et  $v_{x0}$  aux paramètres  $A$  et  $\phi$ .

## Les paramètres de l'équation du mouvement harmonique simple

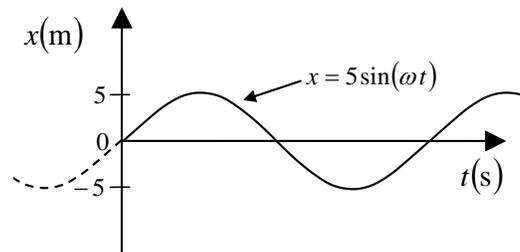
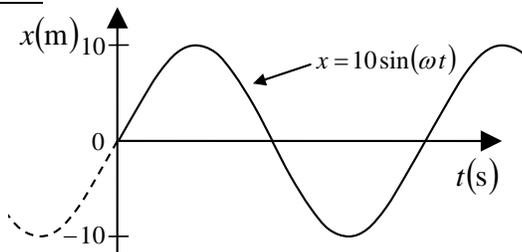
Le mouvement harmonique simple utilise la fonction sinus pour exprimer la position en fonction du temps. Essayons de mieux comprendre les paramètres utilisés pour décrire ce mouvement.

### Amplitude $A$ :

L'amplitude est la position maximale atteinte durant le mouvement. Cette position oscille sinusoïdalement entre  $-A$  et  $+A$ .

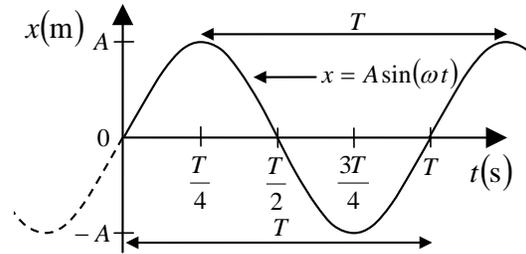


### Ex :

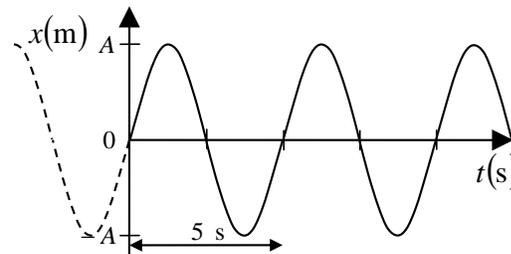
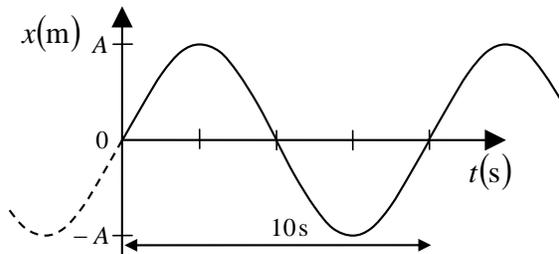


### Période $T$ :

La période représente le temps requis pour effectuer une oscillation complète. Cette condition est vérifiée lorsque l'objet revient à sa position initiale avec la même vitesse (module et orientation).



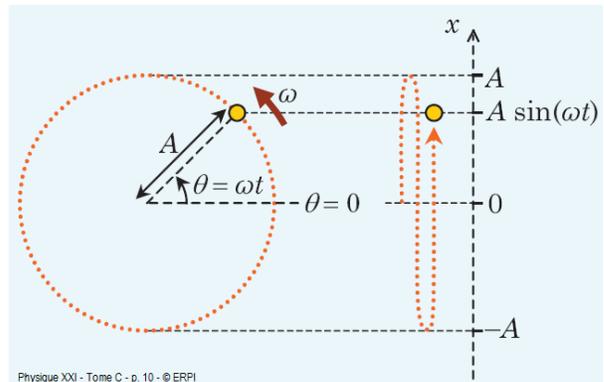
Ex :



### Fréquence angulaire $\omega$ :

La fréquence angulaire  $\omega$  représente la vitesse à laquelle une oscillation complète peut être effectuée. Une oscillation est complétée après  $2\pi$  radians parcourus dans la fonction sinus durant une période complète  $T$ . Ainsi, on peut relier la fréquence angulaire  $\omega$  et la période  $T$  grâce à l'expression suivante :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{ou} \quad \omega T = 2\pi$$

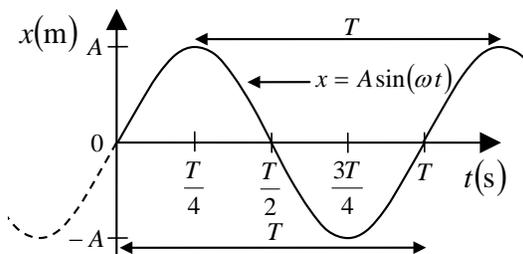


où  $\omega$  : Fréquence angulaire (rad/s)

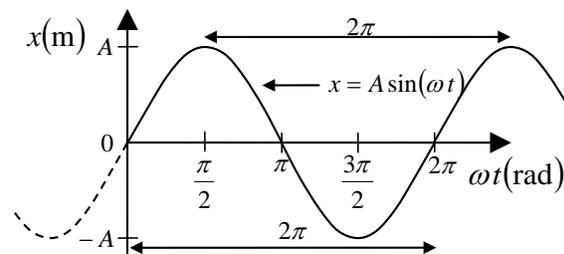
$2\pi$  : Cycle complet en radian de la fonction sinus de l'oscillation (rad)

$T$  : Cycle complet temporel de l'oscillation, période (s)

Position en fonction de  $t$  : (seconde)

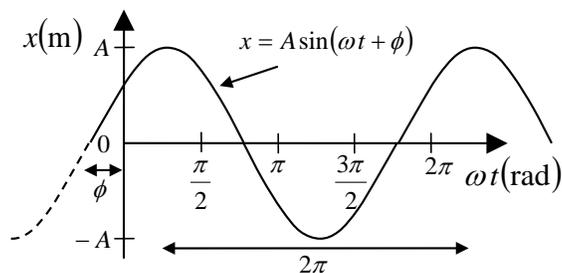


Position en fonction de  $\omega t$  : (radian)

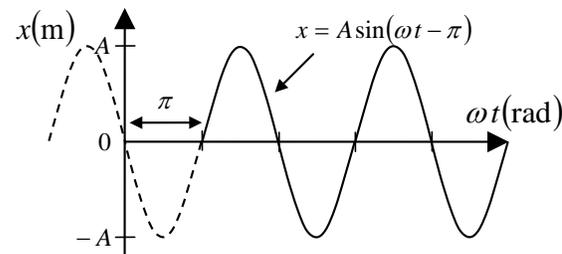
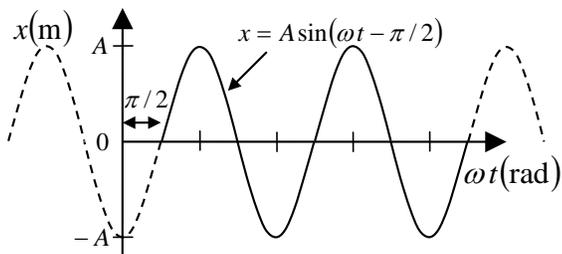
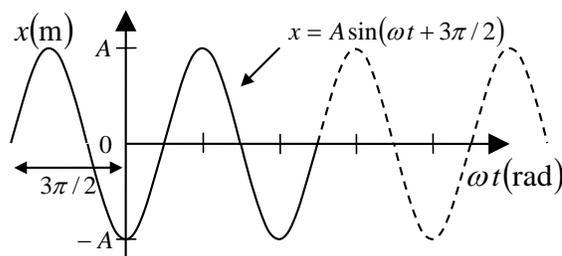
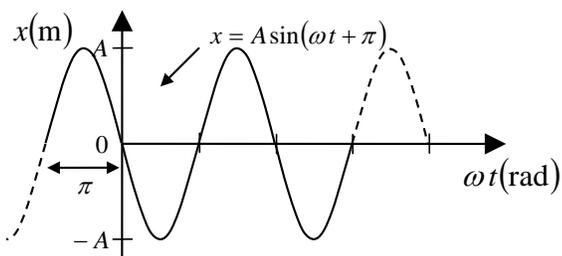
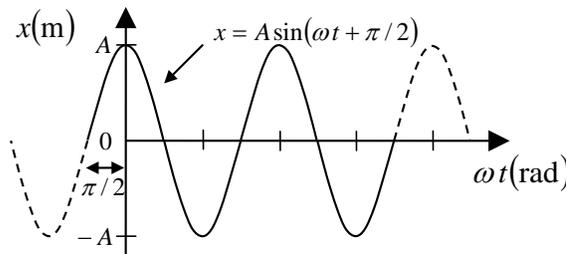
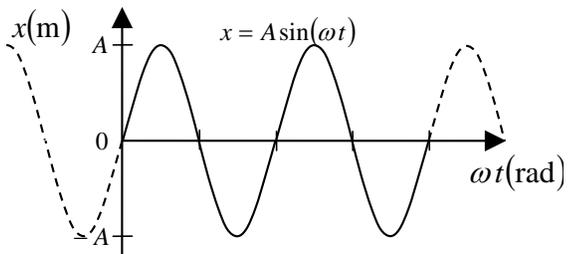


### Constante de phase $\phi$ :

La constante de phase joue le rôle de condition initiale sur la position à  $t = 0$ . On utilise la constante de phase pour ajuster l'argument de la fonction sinus afin de bien faire correspondre  $x_0$  et  $v_{x0}$  à  $t = 0$ .

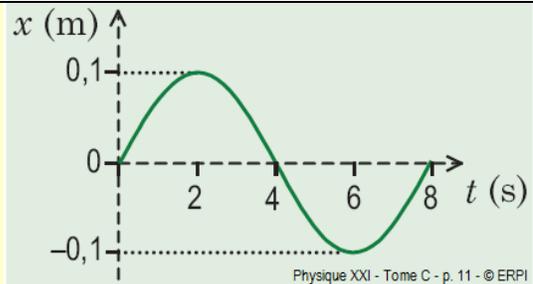


Ex :



**Situation 1 : Du graphique à l'équation.** Dans un système bloc-ressort, la position du bloc est donnée par le graphique ci-contre. On désire déterminer la valeur des paramètres qui permettent de décrire le mouvement du bloc à l'aide de la fonction

$$x = A \sin(\omega t).$$



À partir du graphique, on peut lire l'amplitude et la période de l'oscillation :

$$A = 0,1 \text{ m} \quad \text{et} \quad T = 8 \text{ s}$$

On peut maintenant évaluer la fréquence angulaire :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{(8)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \frac{\pi}{4} \text{ rad/s}}$$

Nous avons ainsi l'équation du mouvement suivante :

$$x = A \sin(\omega t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 0,1 \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)}$$

**Situation 2 : De l'équation au graphique.** La position d'un mobile en fonction du temps est donnée par l'équation

$$x = 0,5 \sin(0,982t + 3\pi/2)$$

où  $x$  est en mètres,  $t$  est en secondes et la phase du sinus (la parenthèse) est en radians. On désire tracer le graphique  $x(t)$  pour  $0 \leq t \leq 10 \text{ s}$ .

À partir de l'équation, nous pouvons définir l'amplitude, la fréquence angulaire et la constante de phase :

$$A = 0,5 \text{ m} \quad \omega = 0,982 \text{ rad/s} \quad \phi = 3\pi/2$$

Nous pouvons évaluer maintenant la période de l'oscillation :

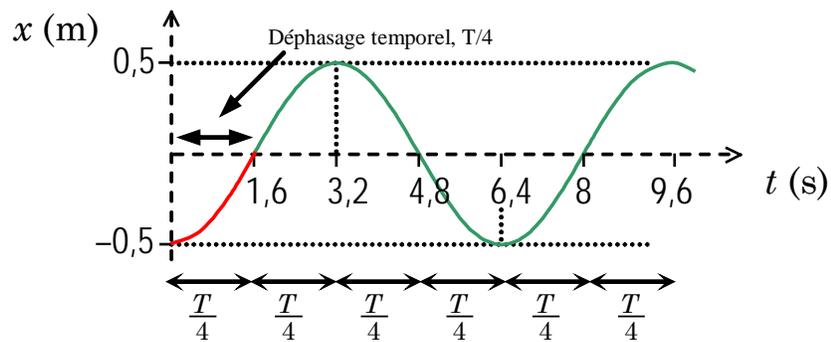
$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{(0,982)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = 6,4 \text{ s}}$$

Évaluons la position à  $t = 0$  :

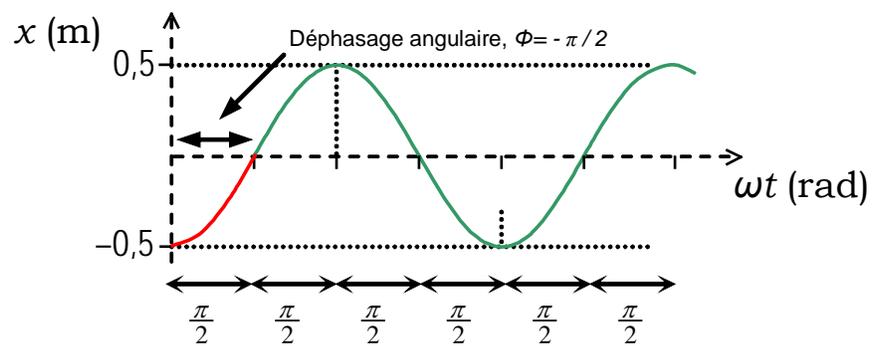
$$x = 0,5 \sin(0,982(0) + 3\pi/2) \Rightarrow x = 0,5 \sin(3\pi/2)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = -0,5 \text{ m}}$$

Ainsi, nous pouvons représenter cette fonction grâce au graphique suivant : ( $\frac{T}{4} = 1,6 \text{ s}$ )



Remarque : Un déphasage de  $\phi = 3\pi/2$  est équivalent à un déphasage de  $\phi = -\pi/2$





# Chapitre 1.1b – La dérivée et le mouvement harmonique simple

## Les équations du mouvement harmonique simple (MHS)

La solution complète à l'oscillateur harmonique simple OHS est composée du mouvement harmonique simple et de ses dérivées. La position peut être une fonction sinus ou cosinus, car ce sont des fonctions identiques à une constante de phase  $\phi$  près :

Oscillateur harmonique simple	Mouvement harmonique simple
$a_x = -\omega^2 x$ <p style="text-align: center;">ou</p> $\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$	$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ $v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \phi)$ $a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi)$

où  $x(t)$  : Position selon l'axe  $x$  (m)       $A$  : Amplitude du mouvement (m)  
 $v_x(t)$  : Vitesse selon l'axe  $x$  (m/s)       $\omega$  : Fréquence angulaire (rad/s)  
 $a_x(t)$  : Accélération selon l'axe  $x$  (m/s<sup>2</sup>)       $\phi$  : Constante de phase (rad)  
 $t$  : Temps (s)

### Preuve :

Appliquons la dérivée de l'équation  $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$  par rapport au temps  $t$  pour obtenir l'équation de la vitesse  $v_x(t)$  :

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow v_x(t) = \frac{d(A \sin(\omega t + \phi))}{dt}$$

$$\Rightarrow v_x(t) = A \frac{d(\sin(\omega t + \phi))}{dt}$$

$$\Rightarrow v_x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \frac{d}{dt}(\omega t + \phi) \quad \left( \frac{d \sin(x)}{dx} = \cos(x) \right)$$

$$\Rightarrow v_x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \left( \frac{d}{dt}(\omega t) + \frac{d}{dt}(\phi) \right)$$

$$\Rightarrow v_x(t) = A \omega \cos(\omega t + \phi) \quad \blacksquare \quad \left( \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} \right)$$

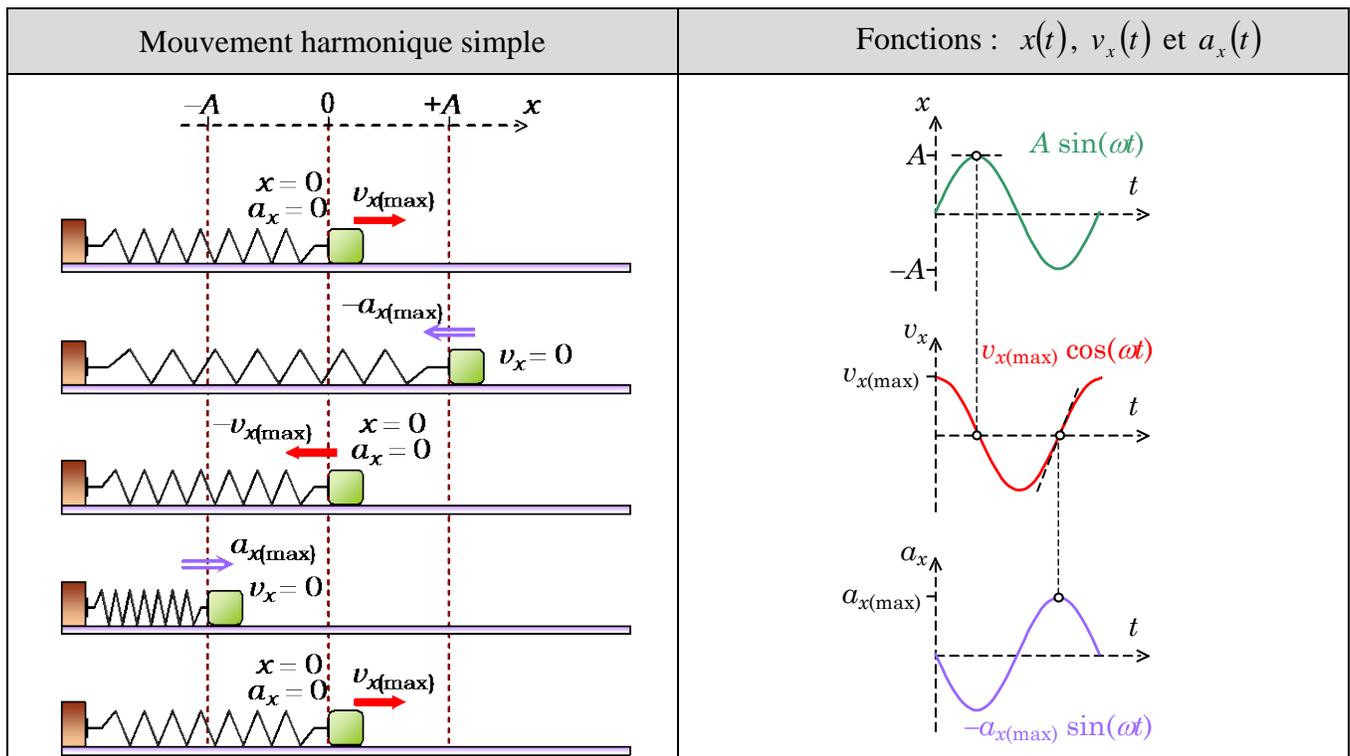
Appliquons la dérivée de l'équation  $v_x(t) = A\omega \cos(\omega t + \phi)$  par rapport au temps  $t$  pour obtenir l'équation de l'accélération vitesse  $a_x(t)$  :

$$\begin{aligned}
 a_x(t) &= \frac{dv_x(t)}{dt} &\Rightarrow & a_x(t) = \frac{d(A\omega \cos(\omega t + \phi))}{dt} \\
 & &\Rightarrow & a_x(t) = A\omega \frac{d(\cos(\omega t + \phi))}{dt} \\
 & &\Rightarrow & a_x(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi) \frac{d(\omega t + \phi)}{dt} && \left(\frac{d\cos(x)}{dx} = -\sin(x)\right) \\
 & &\Rightarrow & a_x(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi) \left(\frac{d(\omega t)}{dt} + \frac{d(\phi)}{dt}\right) \\
 & &\Rightarrow & a_x(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi) \quad \blacksquare && \left(\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}\right)
 \end{aligned}$$

## Représentation graphique du MHS

La représentation graphique du mouvement harmonique simple MHS se fait à partir de fonctions sinus et cosinus. Voici une représentation possible à l'aide d'une constante de phase  $\phi = 0$  et d'une fonction de position en sinus :

- Position :  $x = A \sin(\omega t)$
- Vitesse :  $v_x = A\omega \cos(\omega t) = v_{x(\max)} \cos(\omega t)$
- Accélération :  $a_x = -A\omega^2 \sin(\omega t) = -a_{x(\max)} \sin(\omega t)$



**Situation 4 : La vitesse et l'accélération dans un MHS, prise 2.** Un mobile est animé d'un MHS le long de l'axe  $x$  ; sa position en fonction du temps est donnée par

$$x = 0,2 \cos(3t + 5)$$

où  $x$  est en mètres et  $t$  est en secondes et la phase est en radians. On désire déterminer la position, la vitesse et l'accélération du mobile à  $t = 5$  s .

Nous avons l'équation de la position suivante :

$$x = 0,2 \cos(3t + 5)$$

Avec la dérivée de la position, évaluons l'équation de la vitesse :

$$\begin{aligned} v_x = \frac{dx}{dt} &\Rightarrow v_x = \frac{d(0,2 \cos(3t + 5))}{dt} && \text{(Remplacer la fonction } x) \\ &\Rightarrow v_x = 0,2 \frac{d(\cos(3t + 5))}{dt} && \text{(Sortir la constante)} \\ &\Rightarrow v_x = 0,2[-\sin(3t + 5)] \frac{d(3t)}{dt} && \left( \frac{d \cos(f(x))}{dx} = -\sin(f(x)) \frac{df(x)}{dx} \right) \\ &\Rightarrow \boxed{v_x = -0,6 \sin(3t + 5)} && \text{(Dérivée d'un polynôme : } \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}) \end{aligned}$$

Avec la dérivée de la vitesse, évaluons l'équation de l'accélération :

$$\begin{aligned} a_x = \frac{dv_x}{dt} &\Rightarrow a_x = \frac{d(-0,6 \sin(3t + 5))}{dt} && \text{(Remplacer la fonction } v_x) \\ &\Rightarrow a_x = -0,6 \frac{d(\sin(3t + 5))}{dt} && \text{(Sortir la constante)} \\ &\Rightarrow a_x = -0,6[\cos(3t + 5)] \frac{d(3t)}{dt} && \left( \frac{d \sin(f(x))}{dx} = \cos(f(x)) \frac{df(x)}{dx} \right) \\ &\Rightarrow \boxed{a_x = -1,8 \cos(3t + 5)} && \text{(Dérivée d'un polynôme : } \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}) \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons les informations suivantes à  $t = 5$  s :

Position :  $x(t = 5) = 0,2 \cos(3(5) + 5) \Rightarrow \boxed{x(t = 5) = 0,0816 \text{ m}}$

Vitesse :  $v_x(t = 5) = -0,6 \sin(3(5) + 5) \Rightarrow \boxed{v_x(t = 5) = -0,548 \text{ m/s}}$

Accélération :  $a_x(t = 5) = -1,8 \cos(3(5) + 5) \Rightarrow \boxed{a_x(t = 5) = -0,735 \text{ m/s}^2}$











# Chapitre 1.1c – L'équation différentielle de l'oscillateur harmonique simple

## La solution générale à l'oscillateur harmonique simple

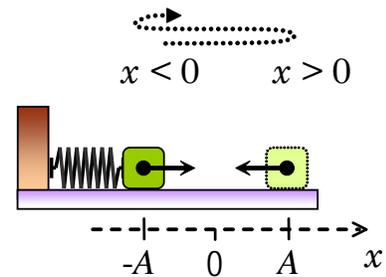
L'oscillateur harmonique simple OHS est une équation différentielle dont la solution est l'équation du mouvement harmonique simple MHS. Les conditions de position initiale  $x_0$  et de vitesse initiale  $v_{x0}$  nécessaire à la description complète du mouvement  $x(t)$  sont décrites à l'intérieur des paramètres d'amplitude  $A$  et de constante de phase  $\phi$ . Il est à noter qu'il existe plusieurs autres formes de solutions à cette équation différentielle qui sont équivalentes :

Équation différentielle OHS :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Solution MHS :

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$



Le système masse-ressort est un OHS, le mouvement est donc un MHS.

- où
- $x(t)$  : Position de l'objet selon l'axe  $x$  (m)
  - $A$  : Amplitude des oscillations (m)
  - $\omega$  : Fréquence angulaire naturelle (rad/s)
  - $t$  : Temps écoulé durant le mouvement (s)
  - $\phi$  : Constante de phase (rad)
  - $x_0$  : Position de l'objet à  $t = 0$  (m)
  - $v_{x0}$  : Vitesse de l'objet à  $t = 0$  (m/s)

tel que

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_{x0}^2}{\omega^2}} \quad (\text{Amplitude des oscillations})$$

$$\phi = \arcsin(x_0 / A) \quad (\text{Constante de phase})$$

### Conditions :

- $A^2 - x^2 > 0$

(La position  $x$  ne peut pas être supérieure à l'amplitude  $A$ .)

- $x(t) = 0 \Leftrightarrow a_x(t) = 0$

(La position  $x = 0$  correspond à la position d'équilibre tel que  $a_x = 0$ )

### Preuve :

À partir de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique simple OHS, trouvons une fonction du temps  $x(t)$  générale qui solutionne l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad (\text{Séparer les termes})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv_x}{dt} = -\omega^2 x \quad (\text{Remplacer } d^2 x / dt^2 = dv_x / dt)$$

Séparons les termes  $dv_x$  et  $dt$  et multiplions par  $dx/dx$  afin d'effectuer une intégrale sur  $v_x$  et sur  $x$  :

$$\frac{dv_x}{dt} = -\omega^2 x \quad (\text{Équation précédente})$$

$$\Rightarrow dv_x = -\omega^2 x dt \quad (\text{Isoler } dv_x)$$

$$\Rightarrow dv_x = -\omega^2 x dt \frac{dx}{dx} \quad (\text{Multiplier par } \frac{dx}{dx})$$

$$\Rightarrow dv_x = -\omega^2 x dx \frac{dt}{dx} \quad (\text{Manipulation})$$

$$\Rightarrow dv_x = -\omega^2 x dx \frac{1}{v_x} \quad (\text{Remplacer } v_x = \frac{dx}{dt} \text{ donc } \frac{1}{v_x} = \frac{dt}{dx})$$

$$\Rightarrow v_x dv_x = -\omega^2 x dx \quad (\text{Multiplier par } v_x \text{ deux côtés})$$

$$\Rightarrow \int_{v_x=v_{x0}}^{v_x} v_x dv_x = \int_{x=x_0}^x -\omega^2 x dx \quad (\text{Effectuer l'intégrale entre } t=0 \text{ et } t, x=x_0 \text{ et } x)$$

$$\Rightarrow \int_{v_x=v_{x0}}^{v_x} v_x dv_x = -\omega^2 \int_{x=x_0}^x x dx \quad (\text{Factoriser les constantes})$$

$$\Rightarrow \left[ \frac{v_x^2}{2} \right]_{v_{x0}}^{v_x} = -\omega^2 \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{x_0}^x \quad (\text{Résoudre l'intégrale})$$

$$\Rightarrow \left( \frac{v_x^2}{2} - \frac{v_{x0}^2}{2} \right) = -\omega^2 \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} \right) \quad (\text{Évaluer l'intégrale})$$

$$\Rightarrow v_x^2 - v_{x0}^2 = -\omega^2 (x^2 - x_0^2) \quad (\text{Simplifier } 1/2)$$

$$\Rightarrow v_x^2 = -\omega^2 (x^2 - x_0^2) + v_{x0}^2 \quad (\text{Isoler } v_x^2)$$

$$\Rightarrow v_x^2 = -\omega^2 \left( x^2 - x_0^2 - \frac{v_{x0}^2}{\omega^2} \right) \quad (\text{Mettre } v_{x0}^2 \text{ dans la parenthèse})$$

$$\Rightarrow v_x^2 = -\omega^2 \left( x^2 - \left( x_0^2 + \frac{v_{x0}^2}{\omega^2} \right) \right) \quad (\text{Factoriser signe négatif})$$

$$\Rightarrow v_x^2 = -\omega^2 (x^2 - A^2) \quad (\text{Remplacer } A^2 = x_0^2 + \frac{v_{x0}^2}{\omega^2}, \text{ amplitude})$$

Afin d'éviter les nombres complexes ( $i = \sqrt{-1}$ ) lorsqu'on appliquera la racine carré pour isoler  $v_x$ , il faudra entrer le signe négatif devant l'expression de droite dans la parenthèse :

$$v_x^2 = -\omega^2(x^2 - A^2) \quad (\text{Expression précédente})$$

$$\Rightarrow v_x^2 = \omega^2(A^2 - x^2) \quad (\text{Distribuer le négatif afin d'éviter } i = \sqrt{-1})$$

$$\Rightarrow \boxed{v_x = \omega\sqrt{A^2 - x^2}} \quad (\text{Effectuer la racine carrée, on obtient } v_x(x))$$

Remarque :

Afin de ne pas avoir une vitesse imaginaire et non physique, la contrainte suivante est respectée :

$$A^2 - x^2 > 0$$

(Contrainte de l'amplitude)

Respectant la contrainte précédente, évaluer l'expression  $x(t)$  qui solutionne l'équation différentielle :

$$v_x = \omega\sqrt{A^2 - x^2} \quad (\text{Équation précédente})$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \omega\sqrt{A^2 - x^2} \quad (\text{Remplacer } v_x = \frac{dx}{dt})$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \omega dt \quad (\text{Mettre les termes en } x \text{ ensemble})$$

$$\Rightarrow \int_{x=x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \int_{t=0}^t \omega dt \quad (\text{Effectuer l'intégrale entre } t = 0 \text{ et } t)$$

$$\Rightarrow [\arcsin(x/A)]_{x_0}^x = \omega[t]_0^t \quad (\text{Résoudre l'intégrale : } \int \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \sin^{-1}(x/A))$$

$$\Rightarrow \arcsin(x/A) - \arcsin(x_0/A) = \omega t \quad (\text{Évaluer l'intégrale})$$

$$\Rightarrow \arcsin(x/A) = \omega t + \arcsin(x_0/A) \quad (\text{Isoler le terme } \arcsin(x/A))$$

$$\Rightarrow \arcsin(x/A) = \omega t + \phi \quad (\text{Remplacer } \phi = \arcsin(x_0/A), \text{ phase})$$

$$\Rightarrow x/A = \sin(\omega t + \phi) \quad (\text{Appliquer le sinus : } \sin(\sin^{-1}(x)) = x)$$

$$\Rightarrow \boxed{x = A \sin(\omega t + \phi)} \quad \blacksquare \quad (\text{Isoler } x)$$

## Une équation alternative au mouvement harmonique simple

Dans certaine situation, il est préférable d'exprimer l'équation du mouvement harmonique simple sous la forme suivante :

Équation différentielle OHS	Le mouvement harmonique simple
$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$	$x = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$ <p>où <math>A = \sqrt{a^2 + b^2}</math> , <math>a = A \sin \phi</math> , <math>b = A \cos \phi</math></p>

Preuve :

À partir du mouvement harmonique simple exprimé à l'aide de la phase  $\phi$ , modifions cette expression en deux termes à l'aide de l'identité trigonométrique suivante :

$$\sin(\theta \pm \phi) = \sin(\theta) \cdot \cos(\phi) \pm \cos(\theta) \cdot \sin(\phi)$$

$$\begin{aligned}
 x = A \sin(\omega t + \phi) &\Rightarrow x = A(\cos(\omega t)\sin(\phi) + \sin(\omega t)\cos(\phi)) && \text{(Usage identité)} \\
 &\Rightarrow x = A \cos(\omega t)\sin(\phi) + A \sin(\omega t)\cos(\phi) && \text{(Distribution)} \\
 &\Rightarrow x = A \sin(\phi)\cos(\omega t) + A \cos(\phi)\sin(\omega t) && \text{(Réorganisation)} \\
 &\Rightarrow x = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) \quad \blacksquare && \text{(} a = A \sin \phi \text{ et } b = A \cos \phi \text{)}
 \end{aligned}$$









# Chapitre 1.2a – La dynamique du mouvement harmonique simple : le ressort

## La force d'un ressort idéal

Dans le cours de physique mécanique<sup>1</sup>, nous avons défini vectoriellement que la force appliquée par un ressort idéal<sup>2</sup>  $\vec{F}_r$  est proportionnel au produit de la constante de rappel  $k$  du ressort avec la déformation  $e$  du ressort (étirement ou compression) :

- $\vec{F}_r = -k\vec{e}$  (Définition vectorielle)
- $F_r = ke$  (Définition scalaire)



Un ressort de compression.

où  $\vec{F}_r$  : Force appliquée par le ressort (N).  
 $k$  : Constante de rappel du ressort (N/m).  
 $\vec{e}$  : Vecteur étirement ou compression du ressort (m).  
 $e$  : Module de l'étirement ou de la compression du ressort (m).

Schéma des forces pour une compression :

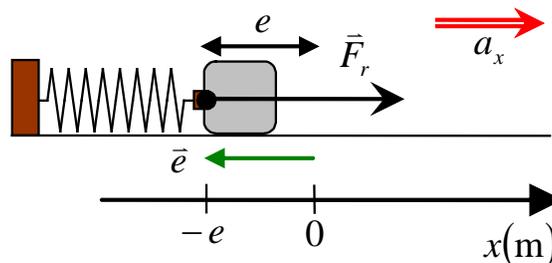
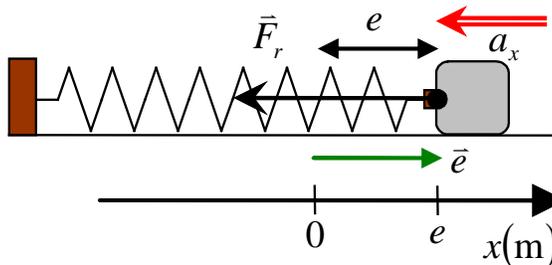


Schéma des forces pour un étirement :

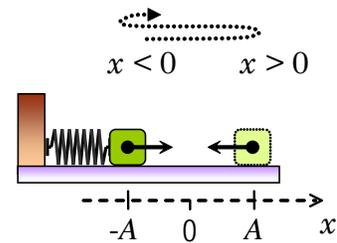


<sup>1</sup> Rappel de mécanique : Physique XXI Volume A, chapitre 2.2

<sup>2</sup> Un ressort idéal applique des forces  $F_r$  uniquement proportionnellement à la déformation  $e$  du ressort et la masse du ressort est négligeable.

# La dynamique d'un système masse-ressort à l'horizontale

L'application de la 2<sup>e</sup> loi de Newton à un système masse-ressort oscillant à l'horizontale sans frottement génère une équation différentielle égale à l'oscillateur harmonique simple OHS dont la solution est le mouvement harmonique simple MHS. La fréquence naturelle d'oscillation  $\omega_0$  associée au système masse-ressort dépend de la racine carrée du rapport entre la constante de rappel  $k$  du ressort et de la masse  $m$  de l'objet :



$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi) \quad \text{tel que} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

où  $x(t)$  : Position de la masse selon l'axe  $x$  ( $x = 0$  est à l'équilibre) (m)

$A$  : Amplitude du mouvement (m)

$\omega_0$  : Fréquence angulaire naturelle d'oscillation du système masse-ressort (rad/s)

$k$  : Constante de rappel du ressort (N/m)

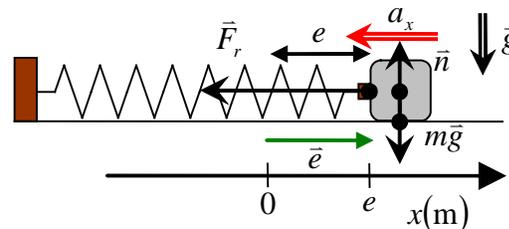
$m$  : Masse de l'objet en oscillation (kg)

$t$  : Temps écoulé durant l'oscillation (s)

$\phi$  : Constante de phase (rad)

## Preuve :

À partir de la 2<sup>ième</sup> loi de Newton, développons l'équation différentielle associée à un système masse-ressort oscillant à l'horizontale afin de retrouver l'équation de l'OHS et d'utiliser la solution du MHS avec fréquence angulaire  $\omega_0$  :



$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_r + m\vec{g} + \vec{n} = m\vec{a}$$

(Identifier toutes les forces)

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_r = m\vec{a}$$

( $m\vec{g} + \vec{n} = 0$ , car mouvement à l'horizontale)

$$\Rightarrow \quad -k\vec{e} = m\vec{a}$$

(Remplacer  $\vec{F}_r = -k\vec{e}$ )

$$\Rightarrow \quad -k\vec{x} = m\vec{a}$$

(Remplacer  $\vec{e} = \vec{x}$ , car étirement  $\equiv$  position)

$$\Rightarrow \quad -kx = ma_x$$

(Décomposer selon l'axe  $x$ )

$$\Rightarrow \quad a_x = -\frac{k}{m}x$$

(Isoler  $a_x$ )

$$\Rightarrow \quad a_x = -\omega_0^2 x$$

(Remplacer  $\omega_0^2 = k/m$ , forme de l'OHS)

$$\Rightarrow \quad x = A \sin(\omega_0 t + \phi) \quad \blacksquare$$

(Solution de l'OHS : MHS)

**Situation 3 : Un pèse-astronaute.** Une navette spatiale en orbite est en chute libre : la gravité *apparente* à l'intérieur de la navette est nulle. Par conséquent, les balances ordinaires sont inopérantes. Pour suivre l'évolution de leur masse pendant la mission, les astronautes s'assoient dans un dispositif qui contient un ressort dont la constante de rappel est connue, se donnent une poussée, se laissent osciller et mesurent la période naturelle d'oscillation. Assise dans un dispositif dont la constante de rappel est de 500 N/m, une astronaute prend 2,31 s pour effectuer une oscillation complète : on désire déterminer sa masse, sachant que le dispositif lui-même a une masse de 10 kg.

Voici les informations que l'énoncé nous apporte :

- $T_0 = 2,31$  s (Période naturelle d'oscillation)
- $k = 500$  N/m (Constante de rappel du ressort)
- $m_D = 10$  kg (Masse du dispositif)

À partir de la période naturelle d'oscillation, évaluons la fréquence angulaire naturelle à partir de la définition fondamentale de celle-ci :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{(2,31)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega_0 = 2,720 \text{ rad/s}}$$

À partir de l'expression de la fréquence angulaire naturelle d'oscillation d'un système masse-ressort, évaluons la masse totale  $m$  en oscillation :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \text{(Mettre au carré)}$$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{k}{\omega_0^2} \quad \text{(Isoler } m)$$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{(500)}{(2,720)^2} \quad \text{(Remplacer valeurs numériques)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{m = 67,58 \text{ kg}} \quad \text{(Évaluer } m)$$

Évaluons la masse de l'astronaute  $m_A$  à partir de la masse totale  $m$  et la masse du dispositif  $m_D$  :

$$m = m_A + m_D \quad \Rightarrow \quad (67,58) = m_A + (10)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{m_A = 57,58 \text{ kg}}$$

**Situation A : Lâcher ou lancer ?** Un système bloc-ressort composé d'un bloc de 3 kg et d'un ressort de 12 N/m repose à l'horizontale. Déterminez (a) l'équation du mouvement du bloc si l'on lance le bloc depuis la position d'équilibre avec une vitesse de 0,6 m/s dans le sens négatif de l'axe des  $x$  et (b) l'équation du mouvement du bloc si l'on lâche le bloc à une distance 8 dm de la position d'équilibre du côté positif de l'axe des  $x$ .

Déterminons la fréquence angulaire des oscillations du bloc :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{(12)}{(3)}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_0 = 2 \text{ rad/s}}$$

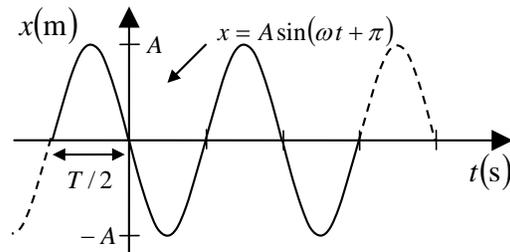
Pour déterminer l'équation du mouvement en (a), nous devons évaluer l'amplitude des oscillations en utilisant le fait qu'à  $t = 0$ , le bloc aura atteint sa vitesse maximale, car il passera par la position d'équilibre :

$$v_{x \max} = A\omega \quad \Rightarrow \quad (0,6) = A(2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = 0,3 \text{ m}}$$

Puisque le bloc est lancé dans le sens négatif de l'axe  $x$  à  $t = 0$ , ce mouvement correspond à la constante de phase

$$\phi = \pi \quad .$$

(rappel :  $\phi = \pi \leftrightarrow \Delta t = T/2$ )



Ainsi, nous obtenons en (a) l'équation suivante :

$$x = 0,3 \sin(2t + \pi)$$

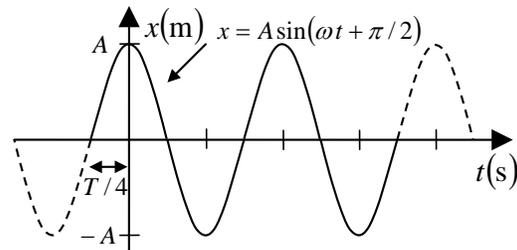
Pour déterminer le mouvement en (b), nous devons évaluer l'amplitude des oscillations en utilisant le fait qu'à  $t = 0$ , le bloc sera immobile et aura atteint la plus grande distance par rapport à la position d'équilibre ce qui correspond exactement à la valeur de l'amplitude :

$$A = 0,8 \text{ m}$$

Puisque le bloc est immobile à la position positive  $x = 0,8 \text{ m}$  à  $t = 0$ , ce mouvement correspond à la constante de phase

$$\phi = \frac{\pi}{2} \quad .$$

(rappel :  $\phi = \frac{\pi}{2} \leftrightarrow \Delta t = \frac{T}{4}$ )



Ainsi, nous obtenons en (b) l'équation suivante :

$$x = 0,8 \sin\left(2t + \frac{\pi}{2}\right)$$





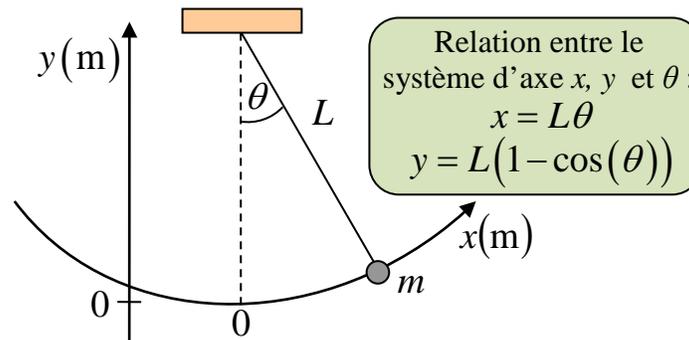




# Chapitre 1.2b – La dynamique du mouvement harmonique simple : le pendule simple

## Le pendule simple

Le pendule simple est constitué d'une masse  $m$  attachée à une corde tendue de longueur  $L$  et de masse négligeable fixé à un point donné :



- La masse se déplace sur une trajectoire circulaire de rayon  $L$  (longueur de la corde).
- On utilise l'axe  $x$  pour mesurer la position de la masse sur l'arc de cercle défini par un angle d'ouverture  $\theta$ .
- La position  $x = 0$  est mesurée lorsque l'arc de cercle correspond à un angle d'ouverture de  $0^\circ$ .
- La relation entre le système d'axe  $x, y$  et  $\theta$  est  $x = L\theta$  ainsi que  $y = L(1 - \cos(\theta))$ .

## La dynamique du pendule à petite oscillation

L'application de la 2<sup>e</sup> loi de Newton à un pendule oscillant dans la gravité sans résistance de l'air ne correspond pas à un mouvement harmonique simple. Cependant, sous l'approximation des petites oscillations ( $\theta_{\max} < 15^\circ$ ), l'équation différentielle de la 2<sup>e</sup> loi de Newton prend la forme de l'oscillateur harmonique simple OHS dont la solution est le mouvement harmonique simple MHS. La fréquence naturelle d'oscillation  $\omega_0$  dépend de la racine carrée du rapport entre le champ gravitationnel  $g$  et la longueur de la corde  $L$  du pendule :

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi) \quad \text{tel que} \quad \omega_0 = \sqrt{g / L}$$

où  $x(t)$  : Position de la masse selon l'axe  $x$  ( $x = 0$  est à l'équilibre) (m)

$A$  : Amplitude du mouvement (m)

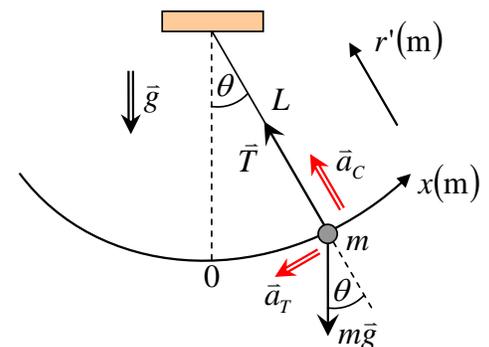
$\omega_0$  : Fréquence angulaire naturelle d'oscillation du pendule (rad/s)

$g$  : Champ gravitationnel (N/kg)

$L$  : Longueur de la corde du pendule (m)

$t$  : Temps écoulé durant l'oscillation (s)

$\phi$  : Constante de phase (rad)

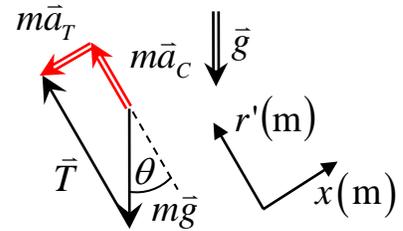


Preuve :

Appliquons la 2<sup>e</sup> loi de Newton ( $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ ) à notre pendule à l'aide du système d'axe  $x$  et  $r'$ :

En  $x$  :  $-mg \sin(\theta) = ma_x$

En  $r'$  :  $T - mg \cos(\theta) = ma_{r'}$



$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \text{où} \quad m\vec{g} + \vec{T} = m(\vec{a}_T + \vec{a}_C)$$

Puisqu'il n'y a pas de mouvement selon l'axe  $r'$  (pas de déplacement radial) puisque la corde se doit d'être toujours tendue, nous pouvons exploiter la définition de l'accélération centripète  $a_C = v^2 / r$  et déterminer la tension dans la corde :

$$T - mg \cos(\theta) = ma_{r'} \Rightarrow T - mg \cos(\theta) = m \frac{v^2}{r} \quad (\text{Trajectoire circulaire : } a_{r'} = a_C = \frac{v^2}{r})$$

$$\Rightarrow \boxed{T = m \frac{v^2}{r} + mg \cos(\theta)} \quad (\text{Tension dans la corde})$$

Développons maintenant l'équation de la 2<sup>e</sup> loi de Newton selon l'axe  $x$

$$-mg \sin(\theta) = ma_x$$

en simplifiant la masse ce qui nous donne l'équation différentielle

$$-g \sin(\theta) = a_x .$$

Nous remarquons que l'équation différentielle n'est pas un OHS ( $a_x = -\omega_0^2 x$ ). Pour régler la situation, nous allons approximer notre fonction  $\sin(\theta)$  autour de  $\theta = 0$  à l'aide du développement en série de Maclaurin<sup>1</sup> suivant :

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \dots$$

En approximant qu'au 1<sup>er</sup> ordre, nous obtenons

$$\sin(x) \approx x$$

ce qui nous permettra d'obtenir un mouvement harmonique simple sous l'approximation des petites oscillations :

$$\begin{aligned} -g \sin(\theta) = a_x &\Rightarrow -g\theta \approx a_x && (\text{Approximation : } \sin(\theta) \approx \theta) \\ &\Rightarrow -g(x/L) \approx a_x && (\text{Arc de cercle } x = L\theta, \text{ remplacer } \theta = x/L) \\ &\Rightarrow a_x \approx -\frac{g}{L}x && (\text{Manipulation}) \\ &\Rightarrow a_x \approx -\omega_0^2 x && (\text{Remplacer } \omega_0^2 = g/L, \text{ forme de l'OHS}) \\ &\Rightarrow x = A \sin(\omega_0 t + \phi) \quad \blacksquare && (\text{Solution de l'OHS : MHS}) \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Le développement de Maclaurin correspond à un développement de Taylor, mais autour de  $x = 0$ .

**Situation 4 : Un pendule pour compter les secondes.** On désire déterminer la longueur de la corde d'un pendule pour que la période naturelle d'oscillation (près de la surface de la Terre) soit de 1 s. (On suppose que l'amplitude d'oscillation est petite.)

À partir de la relation entre la fréquence angulaire naturelle du pendule et sa période naturelle d'oscillation, nous pouvons évaluer la longueur de la corde requise :

$$\begin{aligned} \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} &\Rightarrow \sqrt{\frac{g}{L}} = \frac{2\pi}{T_0} && \text{(Fréquence angulaire naturelle du pendule)} \\ &\Rightarrow \frac{g}{L} = \frac{4\pi^2}{T_0^2} && \text{(Mettre au carré)} \\ &\Rightarrow L = \frac{gT_0^2}{4\pi^2} && \text{(Isoler } L) \\ &\Rightarrow L = \frac{(9,8)(1)^2}{4\pi^2} && \text{(Remplacer les valeurs numériques)} \\ &\Rightarrow \boxed{L = 0,248 \text{ m}} \end{aligned}$$

## Les oscillations de grande amplitude

Pour satisfaire l'équation du mouvement du pendule à petite oscillation, il faut que l'angle d'élévation maximale  $\theta_{\max}$  soit beaucoup plus petit que 1 radian (1 rad = 57,3°).

Voici un tableau démontrant l'inexactitude de la fréquence angulaire  $\omega_0 = \sqrt{g/L}$  lorsque l'amplitude du mouvement est trop importante. Ce tableau est exprimé en fonction de la période de l'oscillation  $T = 2\pi / \omega_0$  correspondant à

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} .$$

avec un pendule de longueur  $L = 0,248 \text{ m}$  sur la planète Terre ( $g = 9,8 \text{ N/kg}$ ) :

$\theta_{\max}$	5°	10°	15°	20°	30°	45°	60°
$T(\text{s})$	1,0005	1,002	1,004	1,008	1,02	1,04	1,07

Ainsi, l'**approximation du mouvement du pendule à petite oscillation** verra **valide** pour des mouvements **ne dépassant pas un angle d'élévation** de 15°.

On peut également démontrer<sup>2</sup> que la période de l'oscillation  $T = 2\pi\sqrt{L/g}$  peut être mieux estimée par l'équation suivante où  $\theta_{\max}$  est l'angle maximale des oscillations en radian :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left( 1 + \frac{1}{16} \theta_{\max}^2 + \frac{11}{3072} \theta_{\max}^4 + \frac{173}{737280} \theta_{\max}^6 + \frac{22931}{1321205760} \theta_{\max}^8 + \frac{1319183}{951268147200} \theta_{\max}^{10} + \dots \right)$$

<sup>2</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum\\_\(mathematics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum_(mathematics))

**Situation A : La tension à un moment donné.** Un pendule de 2 kg et de 4 m de longueur effectue des oscillations avec une amplitude maximale de  $10^\circ$ . Lorsque le pendule fait un angle de  $0^\circ$  avec la verticale et qu'il se déplace dans le sens positif de l'axe  $x$ , on initialise un chronomètre à  $t = 0$ . On désire évaluer la tension dans la corde à 3,5 secondes.

L'équation du mouvement aura la forme suivante :

$$x = A \sin(\omega t + \phi)$$

À partir de l'amplitude maximale exprimée en degré, nous pouvons obtenir l'amplitude  $A$  de l'équation du mouvement :

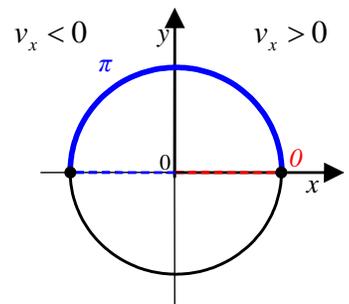
$$\begin{aligned} x_{\max} = L\theta_{\max} &\Rightarrow x_{\max} = (4) \left( 10^\circ \times \frac{2\pi}{360^\circ} \right) \\ &\Rightarrow x_{\max} = 0,698 \text{ m} \\ &\Rightarrow \boxed{A = 0,698 \text{ m}} \end{aligned}$$

Nous pouvons évaluer la fréquence angulaire naturelle du pendule :

$$\begin{aligned} \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} &\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{(9,8)}{(4)}} \\ &\Rightarrow \boxed{\omega_0 = 1,565 \text{ rad/s}} \end{aligned}$$

Puisque  $\theta = 0$  à  $t = 0$ , nous avons  $x = 0$  à  $t = 0$ . Nous pouvons évaluer notre constante de phase  $\phi$  :

$$\begin{aligned} x &= A \sin(\omega t + \phi) \\ \Rightarrow (0) &= A \sin(\omega(0) + \phi) \\ \Rightarrow 0 &= A \sin(\phi) \\ \Rightarrow \phi &= \{0, \pi\} \quad (\phi = 0 \rightarrow \text{vers les } +, \phi = \pi \rightarrow \text{vers les } -) \\ \Rightarrow \boxed{\phi = 0 \text{ rad}} &\quad (\phi = 0, \text{ car la vitesse initiale est positive}) \end{aligned}$$



Nous avons l'équation de la position suivante :

$$x = 0,698 \sin(1,565t)$$

Avec la dérivée, nous pouvons évaluer l'équation de la vitesse :

$$\begin{aligned} v_x = \frac{dx}{dt} &\Rightarrow v_x = \frac{d(0,698 \sin(1,565t))}{dt} && \text{(Remplacer } x \text{)} \\ &\Rightarrow v_x = 0,698(1,565) \cos(1,565t) && \text{(Évaluer la dérivée)} \\ &\Rightarrow \boxed{v_x = 1,092 \cos(1,565t)} && \text{(Simplifier)} \end{aligned}$$

Nous pouvons évaluer la vitesse tangentielle du pendule à 3,5 s :

$$v_x(t = 3,5) = 1,092 \cos(1,565(3,5)) \Rightarrow \boxed{v_x(t = 3,5) = 0,756 \text{ m/s}}$$

Évaluons la position du pendule à 3,5 s :

$$x(t = 3,5) = 0,698 \sin(1,565(3,5)) \Rightarrow \boxed{x(t = 3,5) = -0,503 \text{ m}}$$

Nous pouvons obtenir l'angle d'élévation à 3,5 s :

$$\begin{aligned} x = L\theta &\Rightarrow (-0,503) = (4)\theta \\ &\Rightarrow \boxed{\theta = -0,126 \text{ rad}} \quad (\theta = -7,205^\circ) \end{aligned}$$

Évaluons la tension dans la corde à 3,5 s :

$$\begin{aligned} \sum F_r &= ma_r \\ \Rightarrow T - mg \cos(\theta) &= ma_c && \text{(Tension et force gravitationnelle)} \\ \Rightarrow T - mg \cos(\theta) &= m \frac{v^2}{r} && \text{(Accélération centripète, } a_c = v^2 / r \text{)} \\ \Rightarrow T &= m \frac{v_x^2}{L} + mg \cos(\theta) && \text{(Isoler } T \text{ et remplacer } r = L, v = v_x \text{)} \\ \Rightarrow T &= m \left( \frac{v_x^2}{L} + g \cos(\theta) \right) && \text{(Factoriser } m \text{)} \\ \Rightarrow T &= (2) \left( \frac{(0,756)^2}{(4)} + (9,8) \cos(-0,126) \right) && \text{(Remplacer valeurs numériques, en radian)} \\ \Rightarrow T &= (2)(0,143 + 9,723) && \text{(Calculs)} \\ \Rightarrow \boxed{T = 19,73 \text{ N}} &&& \text{(Tension dans la corde)} \end{aligned}$$







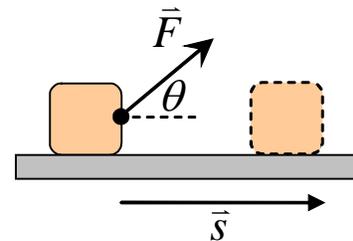
# Chapitre 1.4 – L'énergie et le mouvement harmonique simple

## Le travail

Nous avons défini le travail  $W$  dans le cours de mécanique<sup>1</sup> comme étant l'action d'appliquer une force  $\vec{F}$  sur un certain déplacement  $\vec{s}$ . Physiquement, le travail représente un processus de transformation de l'énergie :

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F s \cos(\theta)$$

- où  $W$  : Travail effectué par la force  $F$  (J).  
 $\vec{F}$  : Force qui effectue le travail (N).  
 $\vec{s}$  : Déplacement sur laquelle la force est appliquée (m).  
 $\theta$  : Angle entre le vecteur force et le vecteur déplacement.



## L'énergie cinétique

Nous avons démontré dans le cours de mécanique<sup>2</sup> que l'énergie cinétique  $K$  représente l'énergie associée au mouvement d'un objet. Cette énergie se calcule grâce à l'équation suivante :

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

- où  $K$  : Énergie cinétique de la masse en mouvement (J).  
 $m$  : Masse de l'objet en mouvement (kg).  
 $v$  : Vitesse de l'objet (m/s).

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

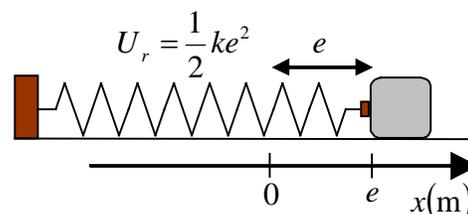
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

## L'énergie potentielle du ressort

Nous avons démontré dans le cours de mécanique<sup>3</sup> que l'énergie potentielle emmagasinée dans un ressort se calcule grâce à l'équation suivante :

$$U_r = \frac{1}{2}ke^2$$

- où  $U_r$  : Énergie potentielle du ressort (J)  
 $k$  : Constante de rappel du ressort (N/m)  
 $e$  : Étirement ou compression du ressort (m)



<sup>1</sup> Rappel de mécanique : Physique XXI Volume A, chapitre 3.1

<sup>2</sup> Rappel de mécanique : Physique XXI Volume A, chapitre 3.1

<sup>3</sup> Rappel de mécanique : Physique XXI Volume A, chapitre 3.2

Référence : Marc Séguin, Physique XXI Tome C

Note de cours rédigée par Simon Vézina

# L'énergie d'un système masse-ressort oscillant à l'horizontale

Nous avons défini le théorème de la conservation de l'énergie<sup>4</sup> dans le cours de mécanique de la façon suivante :

$$E_f = E_i + W_{nc} \quad \text{où} \quad E = K + U$$

Lorsqu'on applique ce théorème à un système masse-ressort sans frottement, l'équation prend la forme suivante : (aucun travail non conservatif,  $W_{nc} = 0$ )

$$E_f = E_i \quad \text{où} \quad E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ke^2$$

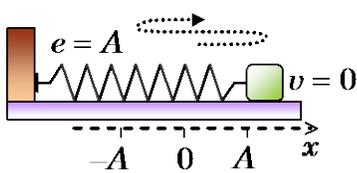
Analysons l'énergie d'un système masse-ressort à l'horizontale avec les équations du mouvement suivantes :

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad \text{et} \quad v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \phi)$$

$$\text{où} \quad \omega = \sqrt{k/m}, \quad \text{Condition d'équilibre : } x = 0 \text{ lorsque } e = 0$$

Situation 1 : Étirement maximal

$$E = K + U_r \quad \Rightarrow \quad E = U_r \quad (K = 0, \text{ car } v = 0)$$

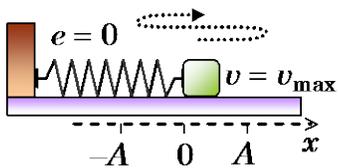


$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}ke^2 \quad (\text{Définition de } U_r)$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}kA^2 \quad (\text{Étirement maximal, } e = A)$$

Situation 2 : Vitesse maximale et position d'équilibre

$$E = K + U_r \quad \Rightarrow \quad E = K \quad (U_r = 0, \text{ car } e = 0)$$



$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}mv^2 \quad (\text{Définition de } K)$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}m(A\omega)^2 \quad (\text{Vitesse maximale, } v = A\omega)$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \quad (\text{Distribution du carré})$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}mA^2 \frac{k}{m} \quad (\text{Remplacer } \omega^2 = k/m)$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}kA^2 \quad (\text{Simplifier } m)$$

<sup>4</sup> Rappel de mécanique : Physique XXI Volume A, chapitre 3.4  
Référence : Marc Séguin, Physique XXI Tome C  
Note de cours rédigée par Simon Vézina

## L'énergie d'un système masse-ressort sans frottement à l'horizontale

Avec le théorème de la conservation de l'énergie, nous pouvons affirmer que l'énergie totale  $E$  d'un système masse-ressort oscillant sans frottement à l'horizontale est définie par l'équation suivante :

$$E = K + U_r = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \quad \text{ou} \quad E = \frac{1}{2}kA^2$$

Condition d'équilibre :  $x = 0$  lorsque  $e = 0$ .

où  $E$  : Énergie total du système masse-ressort (J).

$k$  : Constant du ressort (N/m).

$A$  : Amplitude maximale de l'oscillation (m).

$m$  : Masse en oscillation (kg).

$\omega$  : Fréquence angulaire des oscillation (rad/s) avec  $\omega^2 = k/m$ .

Preuve :

Considérons un système bloc ressort oscillant à l'horizontale. Évaluons la relation entre l'énergie du système et l'amplitude des oscillations à partir d'une situation quelconque. Dans la démonstration, utilisons les équations du mouvement suivantes :

$$x(t) = A \sin(W) \quad \text{et} \quad v_x(t) = A\omega \cos(W) \quad \text{tel que} \quad W = \omega t + \phi$$

En évaluant l'énergie du système, nous avons :

$$E = K + U_r \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ke^2 \quad (\text{Définition de } K \text{ et } U_r)$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (\text{Relation : } x = e)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2} \quad (\text{Remplacer } k = m\omega^2 \text{ avec } \omega^2 = k/m)$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{2}m(A\omega \cos(W))^2 + \frac{1}{2}m\omega^2(A \sin(W))^2 \quad (x(t) = A \sin(W) \text{ et } v_x(t) = A\omega \cos(W))$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \cos^2(W) + \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(W) \quad (\text{Distribution du carré})$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 [\cos^2(W) + \sin^2(W)] \quad (\text{Factoriser } \frac{1}{2}m\omega^2 A^2)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2} \quad \text{ou} \quad \boxed{E = \frac{1}{2}kA^2} \quad \blacksquare \quad (\text{Identité trigo, } \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1)$$

**Situation A : L'énergie en cinématique du MHS.** Albert dépose un bloc de 5 kg sur une surface horizontale sans frottement. Il attache un ressort horizontal idéal non déformé dont la constante de rappel est égale à 30 N/m sur le bloc et sur un mur fixe. Ensuite, Albert pousse le bloc horizontalement avec une force de 40 N sur une distance de 10 cm. Lorsque le bloc passe à la position d'équilibre dans le sens positif, Albert initialise son chronomètre à  $t = 0$ . On désire évaluer la vitesse du bloc à 2 secondes.

Albert effectue un travail sur le système initialement à une énergie nulle. Par conservation de l'énergie, nous pouvons évaluer l'énergie du système :

$$\begin{aligned}
 E_f &= E_i + W_{nc} & \Rightarrow & E_f = W_{nc} & (E_i = 0, \text{ car } K_i = 0 \text{ et } U_{ri} = 0) \\
 & & \Rightarrow & E_f = F s \cos(\theta) & (\text{Travail : } F s \cos(\theta)) \\
 & & \Rightarrow & E_f = (40)(0,1)\cos(0^\circ) & (\text{Remplacer valeurs numériques}) \\
 & & \Rightarrow & \boxed{E_f = 4 \text{ J}} & (\text{Énergie totale masse-ressort})
 \end{aligned}$$

Nous pouvons évaluer l'amplitude du mouvement avec l'énergie totale du système masse-ressort :

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2} k A^2 & \Rightarrow & A = \sqrt{\frac{2E}{k}} & (\text{Isoler } A) \\
 & & \Rightarrow & A = \sqrt{\frac{2(4)}{30}} & (\text{Remplacer valeurs numériques}) \\
 & & \Rightarrow & \boxed{A = 0,516 \text{ m}} & (\text{Évaluer } A)
 \end{aligned}$$

Nous pouvons évaluer la fréquence angulaire du système :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{(30)}{(5)}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_0 = 2,45 \text{ rad/s}}$$

Puisqu'Albert initialise son chronomètre à  $x = 0$  (l'équilibre) lorsque le bloc se déplace avec une vitesse positive  $v_x > 0$ , nous pouvons choisir la constante de phase suivante :

$$\phi = 0$$

(valide avec la fonction sinus pour  $x$ )

Évaluons l'équation de la vitesse  $t = 2 \text{ s}$  à partir de l'équation de la position du MHS :

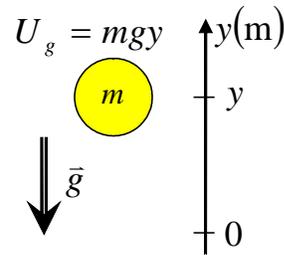
$$\begin{aligned}
 v_x &= \frac{dx}{dt} & \Rightarrow & v_x = \frac{d(A \sin(\omega t + \phi))}{dt} & (\text{Remplacer } x = A \sin(\omega t + \phi)) \\
 & & \Rightarrow & \boxed{v_x = A \omega \cos(\omega t + \phi)} & (\text{Évaluer la dérivée}) \\
 & & \Rightarrow & v_x = (0,516)(2,45)\cos((2,45)t + (0)) & (\text{Remplacer valeurs numériques}) \\
 & & \Rightarrow & \boxed{v_x = 0,236 \text{ m/s}} & (\text{Évaluer } v_x(t = 2))
 \end{aligned}$$

## L'énergie potentielle gravitationnelle

Nous avons démontré dans le cours de mécanique<sup>5</sup> que l'énergie potentielle emmagasinée dans un champ gravitationnel constant se calcule grâce à l'équation suivante :

$$U_g = mgy$$

- où  $U_g$  : Énergie potentielle gravitationnelle (J)  
 $m$  : Masse de l'objet dans le champ gravitationnel (kg)  
 $g$  : Le champ gravitationnel (N/kg)  
 $y$  : La position verticale de l'objet (m)



## L'énergie d'un pendule sans résistance de l'air à faible amplitude

Avec le théorème de la conservation de l'énergie, nous pouvons affirmer que l'énergie totale  $E$  d'un pendule oscillant sans résistance de l'air est définie par l'équation suivante sous approximation des petites oscillations :

$$E = K + U_g = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$$

(sous l'approximation des petits angles)

Condition d'équilibre :  $x = y = 0$  lorsque  $\theta = 0$ .

- où  $E$  : Énergie totale du pendule (J)  
 $m$  : Masse du pendule (kg)  
 $\omega$  : Fréquence angulaire de l'oscillation (rad/s) ( $\omega = \sqrt{g/L}$ )  
 $A$  : Amplitude maximale de l'oscillation (m)

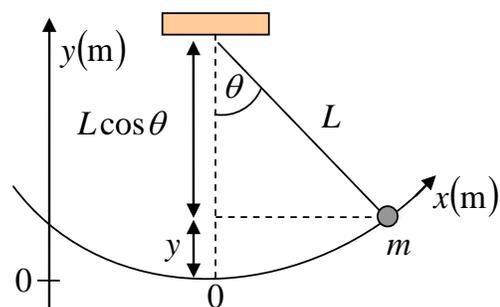
### Preuve :

Considérons un pendule oscillant sous l'effet de la gravité. Évaluons la relation entre l'énergie du système et l'amplitude des oscillations à partir d'une situation quelconque. Dans la démonstration, utilisons les équations du mouvement suivantes :

$$x(t) = A \sin(W)$$

et  $v_x(t) = A \omega \cos(W)$

tel que  $W = \omega t + \phi$



Posons l'énergie potentielle gravitationnelle nulle au point d'équilibre. Cette contrainte permet d'affirmer que

$$x = y = 0 \text{ lorsque } \theta = 0.$$

<sup>5</sup> Rappel de mécanique : Physique XXI Volume A, chapitre 3.3  
 Référence : Marc Séguin, Physique XXI Tome C  
 Note de cours rédigée par Simon Vézina

En évaluant l'énergie du système et appliquons l'approximation des petits angles ( $\theta \ll 1$  rad) étant nécessaire pour obtenir le MHS chez le pendule (voir section 1.2) :

$$\begin{aligned}
 E = K + U_g &\Rightarrow E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy && \text{(Déf. de } K, U_r \text{ et } U_g \text{ )} \\
 &\Rightarrow E = \frac{1}{2}mv^2 + mgL(1 - \cos \theta) && \text{(Remplacer } y = L(1 - \cos \theta)) \\
 &\Rightarrow E \approx \frac{1}{2}mv^2 + mgL \left( 1 - \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \right) \right) && \text{(Série de Taylor : } \cos(\theta) \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \text{)} \\
 &\Rightarrow E \approx \frac{1}{2}mv^2 + mgL \frac{\theta^2}{2} && \text{(Simplification)} \\
 &\Rightarrow E \approx \frac{1}{2}mv^2 + mgL \frac{(x/L)^2}{2} && \text{(Remplacer } \theta = x/L \text{)} \\
 &\Rightarrow E \approx \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m \frac{g}{L} x^2 && \text{(Simplification)} \\
 &\Rightarrow \boxed{E \approx \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2} && \text{(Remplacer } \omega^2 = g/L \text{)} \\
 &\Rightarrow E \approx \frac{1}{2}m[A\omega \cos(W)]^2 + \frac{1}{2}m\omega^2(A \sin(W))^2 && (x(t) = A \sin(W) \text{ et } v_x(t) = A\omega \cos(W)) \\
 &\Rightarrow E \approx \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 (\cos^2(W) + \sin^2(W)) && \text{(Factoriser } \frac{1}{2}\omega^2 A^2 \text{)} \\
 &\Rightarrow \boxed{E \approx \frac{1}{2}m\omega^2 A^2} && (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1)
 \end{aligned}$$

**Situation B : Amplitude après une poussée.** Un pendule de 3 kg et de 1,9 m de longueur est lancé depuis une hauteur de 2 cm par rapport au point le plus bas qu'il peut être situé avec une vitesse de 0,7 m/s le long d'une trajectoire circulaire. Après quelques instants, on pousse le pendule avec une force de 5 N le long de sa trajectoire dans le sens de son mouvement sur une distance de 10 cm. On désire évaluer l'angle maximal que fait le pendule par rapport à la verticale après la poussée.

Évaluons l'énergie totale du système au moment où le pendule est lancé :

$$\begin{aligned}
 E = K + U_g &\Rightarrow E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy \\
 &\Rightarrow E = \frac{1}{2}(3)(0,7)^2 + (3)(9,8)(0,02) \\
 &\Rightarrow \boxed{E = 1,323 \text{ J}}
 \end{aligned}$$

Évaluons le travail effectué par la poussée sur le pendule :

$$W = Fs \cos(\theta) \quad \Rightarrow \quad W = (5)(0,1)\cos(0^\circ)$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{W = 0,5 \text{ J}}$$

Évaluons l'énergie totale du système après la poussée :

$$E_f = E_i + W \quad \Rightarrow \quad E_f = (1,323) + (0,5)$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{E_f = 1,823 \text{ J}}$$

Évaluons l'amplitude des oscillations :

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{2} m \left( \frac{g}{L} \right) A^2$$
$$\Rightarrow \quad A = \sqrt{\frac{2EL}{mg}}$$
$$\Rightarrow \quad A = \sqrt{\frac{2(1,823)(1,9)}{(3)(9,8)}}$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{A = 0,4854 \text{ m}}$$

Évaluons l'angle maximal qu'effectue le pendule par rapport à la verticale :

$$x = L\theta \quad \Rightarrow \quad (A) = L(\theta_{\max})$$
$$\Rightarrow \quad (0,4854) = (1,9)\theta_{\max}$$
$$\Rightarrow \quad \theta_{\max} = 0,2555 \text{ rad}$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{\theta_{\max} = 14,64^\circ}$$

(À la limite de l'approximation)

# L'énergie potentielle d'un oscillateur harmonique simple

Lorsqu'une force conservatrice peut être représentée sous la forme de l'équation

$$F_x = -m\omega^2 x ,$$

alors on peut y associer un terme d'énergie potentielle  $U_{\text{OHS}}$  qui aura la forme suivante :

$$U_{\text{OHS}} = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

Condition d'équilibre :

$$x = 0 \text{ correspond à } \sum F_x = 0 .$$

où  $U_{\text{OHS}}$  : Énergie associée à la force correspondant à un oscillateur simple (J).

$m$  : Masse de l'objet en oscillation (kg)

$\omega$  : Fréquence angulaire de l'oscillation (rad/s)

$x$  : Position de l'objet par rapport à la position d'équilibre (m)

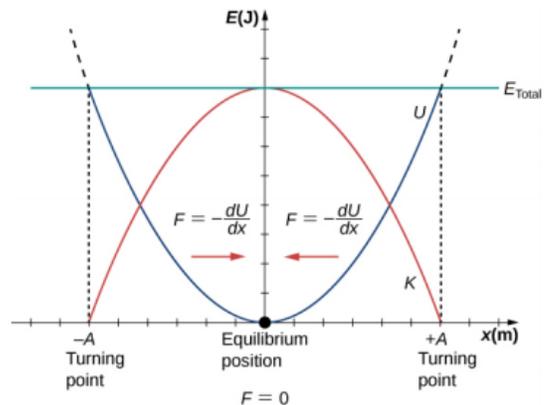
Preuve :

Considérons une force conservatrice de la forme  $F_x = -m\omega^2 x$ . Appliquons la relation

$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

entre la force conservative  $F_x$  et son terme d'énergie potentielle  $U$  afin d'obtenir une expression de l'énergie potentielle :

$$\begin{aligned} F_x = -\frac{dU}{dx} &\Rightarrow dU = -F_x dx \\ &\Rightarrow dU = -(-m\omega^2 x) dx \\ &\Rightarrow \int_{U_0}^U dU = \int_{x=0}^x m\omega^2 x dx \\ &\Rightarrow [U]_{U_0}^U = \left[ \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \right]_0^x \\ &\Rightarrow U - U_0 = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 - 0 \\ &\Rightarrow U = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \quad \blacksquare \end{aligned}$$



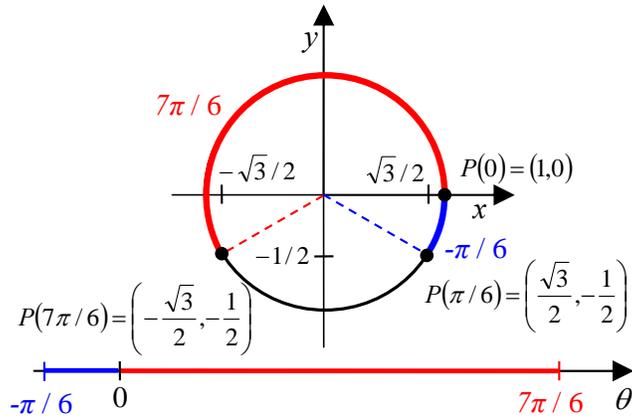
[https://phys.libretexts.org/Bookshelves/University\\_Physics/Book%3A\\_University\\_Physics\\_\(OpenStax\)/Map%3A\\_University\\_Physics\\_1\\_-\\_Mechanics%2C\\_Sound%2C\\_Oscillations%2C\\_and\\_Waves\\_\(OpenStax\)/15%3A\\_Oscillations/15.2%3A\\_Energy\\_in\\_Simple\\_Harmonic\\_Motion](https://phys.libretexts.org/Bookshelves/University_Physics/Book%3A_University_Physics_(OpenStax)/Map%3A_University_Physics_1_-_Mechanics%2C_Sound%2C_Oscillations%2C_and_Waves_(OpenStax)/15%3A_Oscillations/15.2%3A_Energy_in_Simple_Harmonic_Motion)

# Chapitre 1.5 – Les fonctions trigonométriques inverses et le MHS

## La constante de phase quelconque

Lorsqu'on doit évaluer la constante de phase  $\phi$  du mouvement harmonique simple ( $x = A \sin(\omega t + \phi)$ ), il faut manipuler la fonction arcsinus ( $\sin^{-1}$ ). Cette fonction évalue l'arc de cercle requis pour positionner une coordonnée  $y$  sur un cercle trigonométrique. La difficulté est qu'il y a une infinité d'arcs de cercle menant à une même coordonnée  $y$  sur un cercle trigonométrique.

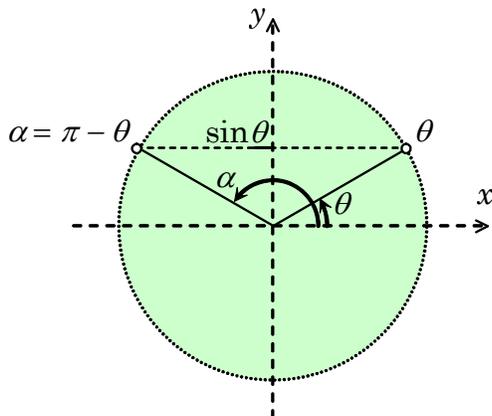
Exemple :  $\arcsin(-1/2) = \sin^{-1}(-1/2) = \{ \dots, -5\pi/6, -\pi/6, 7\pi/6, 11\pi/6, \dots \}$



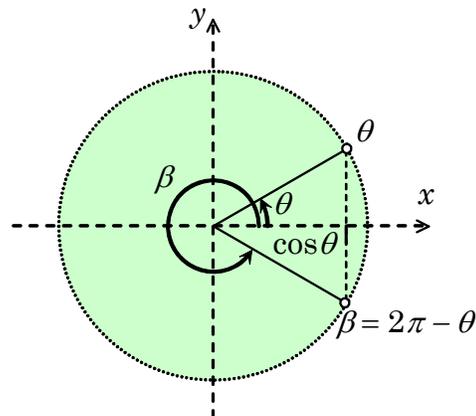
## Deux angles pour sinus et cosinus

Dans un cercle trigonométrique, on peut visualiser qu'il y a toujours plusieurs solutions au calcul de la fonction arcsinus et arccosinus. Pour une position en  $y$  sur le cercle, il y a deux positions en  $x$  admissibles et vice versa.

Les angles  $\theta$  et  $\alpha = \pi - \theta$  ont le même sinus



Les angles  $\theta$  et  $\beta = 2\pi - \theta$  ont le même cosinus

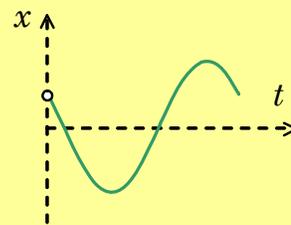


**P.S.**  $\arctan^{-1}(x) = \tan^{-1}(x) = \{ \dots, \theta, \theta + \pi, \dots \}$

Situation 1 : *La constante de phase d'un MHS.* La position en fonction du temps d'un mobile est donnée par

$$x = A \sin(\omega t + \phi)$$

avec  $A = 0,4 \text{ m}$  et  $\omega = 2 \text{ rad/s}$ . À  $t = 0$ , le mobile est situé en  $x = 0,2 \text{ m}$  et il se déplace dans le sens négatif de l'axe  $x$  (schéma ci-contre). On désire déterminer la valeur de  $\phi$  ( $0 \leq \phi < 2\pi \text{ rad}$ ).



Simplifions notre équation de la position pour  $t = 0$  :

$$x = A \sin(\omega t + \phi) \Rightarrow (0,2) = (0,4) \sin((2)(0) + \phi) \quad (\text{Remplacer pour } t = 0)$$

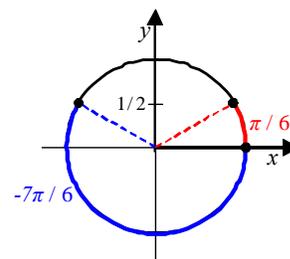
$$\Rightarrow \boxed{0,5 = \sin(\phi)} \quad (\text{Simplification})$$

Nous pouvons obtenir les constantes de phase admissibles :

$$0,5 = \sin(\phi) \Rightarrow \phi = \sin^{-1}(0,5)$$

$$\Rightarrow \phi = \left\{ \dots, \frac{-7\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \dots \right\}$$

P.S. Calculatrice :  $\phi = \pi / 6 \text{ rad}$



Évaluons la vitesse à  $t = 0$  pour ces deux constantes de phase :

$$v_x = A\omega \cos(\omega t + \phi) \Rightarrow v_x = (0,4)(2) \cos((2)(0) + (-7\pi/6)) \Rightarrow \boxed{v_x = -0,693 \text{ m/s}}$$

$$v_x = (0,4)(2) \cos((2)(0) + (\pi/6)) \Rightarrow \boxed{v_x = 0,693 \text{ m/s}}$$

Puisque le mobile se déplace dans le sens négatif de l'axe  $x$ , nous choisissons la constante de phase suivante :

$$\phi = \frac{-7\pi}{6}$$

Dans l'énoncé, on demande que  $0 \leq \phi < 2\pi$ . Ainsi, nous allons ajouter  $2\pi$  à notre constante de phase trouvée précédemment :

$$\phi = 2\pi + \frac{-7\pi}{6} \Rightarrow \boxed{\phi = \frac{5\pi}{6} = 0,262 \text{ rad}}$$

**Situation 2 : Trois instants à la même position.** La position en fonction du temps d'un mobile est donnée par

$$x = 0,5 \sin(3t + 4,5)$$

où  $x$  est en mètres et  $t$  est en secondes. On désire déterminer les 3 premiers instants après  $t = 0$  où le mobile est situé en  $x = -0,4$  m.

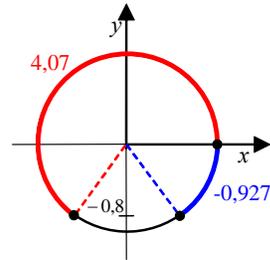
Simplifions notre équation de la position :

$$\begin{aligned} x = A \sin(\omega t + \phi) &\Rightarrow (-0,4) = (0,5) \sin((3)t + (4,5)) \text{ (Remplacer pour } x = -0,4) \\ &\Rightarrow \boxed{-0,8 = \sin(3t + 4,5)} \quad \text{(Simplification)} \end{aligned}$$

Évaluons les arcs de cercle admissibles :

$$\begin{aligned} -0,8 = \sin(3t + 4,5) &\Rightarrow 3t + 4,5 = \sin^{-1}(-0,8) \\ &\Rightarrow 3t + 4,5 = \{\dots, -0,927, 4,07, \dots\} \end{aligned}$$

P.S. Calculatrice :  $3t + 4,5 = -0,927$  rad



Nous cherchons les 3 premiers temps positifs :

Essaie 1 :  $-0,927$   $3t + 4,5 = -0,927 \Rightarrow t = -1,81$  s (non valide)

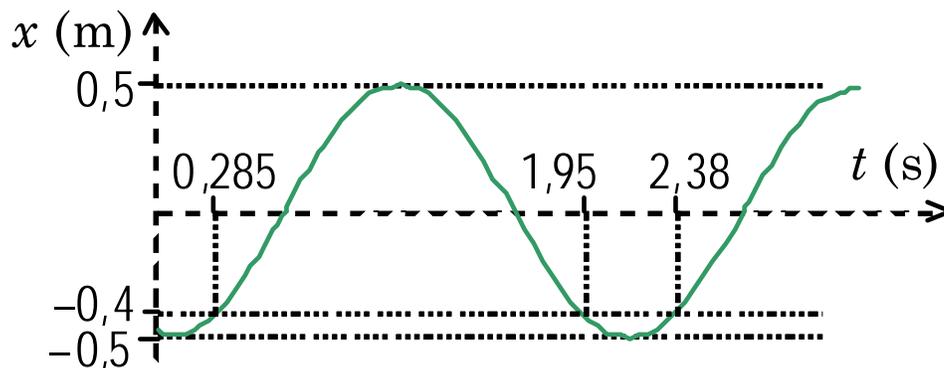
Essaie 2 :  $4,07$   $3t + 4,5 = 4,07 \Rightarrow t = -0,143$  s (non valide)

Essaie 3 :  $-0,927 + 2\pi$   $3t + 4,5 = 5,36 \Rightarrow \boxed{t = 0,287}$  s

Essaie 4 :  $4,07 + 2\pi$   $3t + 4,5 = 10,35 \Rightarrow \boxed{t = 1,95}$  s

Essaie 5 :  $-0,927 + 4\pi$   $3t + 4,5 = 11,64 \Rightarrow \boxed{t = 2,38}$  s

Voici une représentation de la fonction avec l'identification des moments où le mobile occupe la position  $x = -0,4$  m à des temps positifs :



**Situation 3 : L'amplitude et la constante de phase à partir de la position, de la vitesse et de la fréquence angulaire.** La position en fonction du temps d'un objet est donnée par

$$x = A \sin(\omega t + \phi)$$

Avec  $\omega = 3 \text{ rad/s}$ . À  $t = 2 \text{ s}$ , la position de l'objet est  $x = -0,4 \text{ m}$  et la composante selon  $x$  de sa vitesse est  $v_x = -0,6 \text{ m/s}$ . On désire déterminer la valeurs de  $A$  et  $\phi$ . (On veut  $A > 0$  et  $0 \leq \phi \leq 2\pi \text{ rad.}$ )

Exprimons la fonction de la position à 2 secondes :

$$\begin{aligned} x = A \sin(\omega t + \phi) &\Rightarrow (-0,4) = A \sin((3)(2) + \phi) && \text{(Position à 2 s)} \\ &\Rightarrow \boxed{-0,4 = A \sin(6 + \phi)} && \text{(1)} \end{aligned}$$

Exprimons la fonction de la vitesse à 2 secondes :

$$\begin{aligned} v_x = A\omega \cos(\omega t + \phi) &\Rightarrow (-0,6) = A(3)\cos((3)(2) + \phi) && \text{(Vitesse à 2 s)} \\ &\Rightarrow \boxed{-0,2 = A \cos(6 + \phi)} && \text{(2)} \end{aligned}$$

Évaluons le carré de nos deux équations :

$$\text{De (1) : } [-0,4]^2 = [A \sin(6 + \phi)]^2 \Rightarrow \boxed{0,16 = A^2 \sin^2(6 + \phi)} \text{ (1)}^2$$

$$\text{De (2) : } [-0,2]^2 = [A \cos(6 + \phi)]^2 \Rightarrow \boxed{0,04 = A^2 \cos^2(6 + \phi)} \text{ (2)}^2$$

Additionnons nous deux équations  $(1)^2$  et  $(2)^2$  afin d'évaluer  $A$  :

$$\begin{aligned} \text{(1)}^2 + \text{(2)}^2 &\Rightarrow [0,16] + [0,04] = [A^2 \sin^2(6 + \phi)] + [A^2 \cos^2(6 + \phi)] && \text{(Additionner éq.)} \\ &\quad \text{(1)}^2 \quad \text{(2)}^2 \quad \text{(1)}^2 \quad \text{(2)}^2 \\ &\Rightarrow 0,2 = A^2(\sin^2(6 + \phi) + \cos^2(6 + \phi)) && \text{(Factoriser } A \text{ et simplification)} \\ &\Rightarrow 0,2 = A^2(1) && \text{(} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \text{)} \\ &\Rightarrow A = \pm\sqrt{0,2} && \text{(Isoler } A \text{)} \\ &\Rightarrow \boxed{A = 0,447 \text{ m}} && \text{(} A > 0 \text{ selon l'énoncé)} \end{aligned}$$

Simplifions notre équation de la position à 2 s  $(1)$  en utilisant la valeur de  $A$  trouvée :

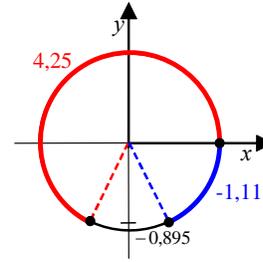
$$\begin{aligned} -0,4 = A \sin(6 + \phi) &\Rightarrow -0,4 = (0,447)\sin(6 + \phi) && \text{(Remplacer } A \text{)} \\ &\Rightarrow \boxed{-0,895 = \sin(6 + \phi)} && \text{(Simplification)} \end{aligned}$$

Nous pouvons obtenir les constantes de phase admissibles :

$$-0,895 = \sin(6 + \phi) \Rightarrow 6 + \phi = \sin^{-1}(-0,895)$$

$$\Rightarrow 6 + \phi = \{ \dots, -1,11, 4,25, \dots \}$$

P.S. Calculatrice :  $6 + \phi = -1,11 \text{ rad}$



Nous avons les solutions suivantes pour la constante de phase :

$$6 + \phi = \{ \dots, -1,11, 4,25, \dots \} \Rightarrow \phi = \{ \dots, -1,11, 4,25, \dots \} - 6$$

$$\Rightarrow \phi = \{ \dots, -7,11, -1,75, \dots \}$$

Ce qui donne :

$$\phi = -7,11 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

et

$$\phi = -1,75 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Choisissons la bonne constante de phase  $\phi$  à partir de l'équation (2) de la vitesse à  $t = 2 \text{ s}$  :

$$-0,6 = A\omega \cos(6 + \phi) \Rightarrow -0,6 = (0,447)(3)\cos(6 + \phi) \quad (\text{Remplacer } A \text{ et } \omega)$$

$$\Rightarrow \boxed{-0,6 = 1,341 \cos(6 + \phi)} \quad (\text{Simplifier})$$

Choix 1 :  $\phi = -7,11 \Rightarrow -0,6 = 1,341 \cos(6 + (-7,11)) \quad (\text{Remplacer } \phi)$

$$\Rightarrow -0,6 \neq 0,6 \quad (\text{Contradiction})$$

Choix 2 :  $\phi = -1,75 \Rightarrow -0,6 = 1,341 \cos(6 + (-1,75)) \quad (\text{Remplacer } \phi)$

$$\Rightarrow -0,6 = -0,6 \quad (\text{Vérification})$$

Ainsi, nous pouvons choisir la constante de phase suivante :

$$\phi = -1,75$$

Dans l'énoncé, on demande que  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ . Ainsi, nous allons ajouter  $2\pi$  à notre constante de phase trouvée précédemment :

$$\phi = 2\pi - 1,75 \Rightarrow \boxed{\phi = 4,53 \text{ rad}}$$

Voici l'équation finale :

$$\boxed{x = 0,447 \sin(3t + 4,53)}$$

où  $\boxed{A = 0,447 \text{ m}}$  et  $\boxed{\phi = 4,53 \text{ rad}}$



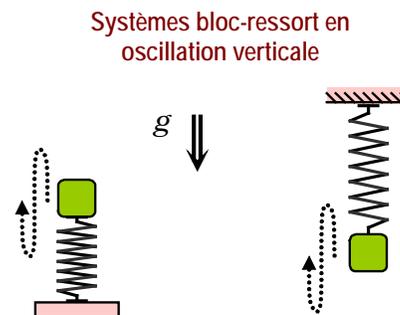




# Chapitre 1.6 – L'oscillation verticale d'un système bloc-ressort

## La dynamique d'un système masse-ressort à la verticale

L'application de la 2<sup>ème</sup> loi de Newton à un système masse-ressort oscillant à la verticale sans frottement sous l'effet de la gravité génère une équation différentielle égale à l'oscillateur harmonique simple OHS dont la solution est le mouvement harmonique simple MHS. La fréquence naturelle d'oscillation  $\omega_0$  associée au système masse-ressort dépend de la racine carrée du rapport entre la constante de rappel  $k$  du ressort et de la masse  $m$  de l'objet :



$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi) \quad \text{tel que} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- où  $x(t)$  : Position de la masse selon l'axe  $x$  ( $x = 0$  est à l'équilibre) (m)
- $A$  : Amplitude du mouvement (m)
- $\omega_0$  : Fréquence angulaire naturelle d'oscillation du système masse-ressort (rad/s)
- $k$  : Constante de rappel du ressort (N/m)
- $m$  : Masse de l'objet en oscillation (kg)
- $t$  : Temps écoulé durant l'oscillation (s)
- $\phi$  : Constante de phase (rad)

### Preuve :

À partir de la 2<sup>ème</sup> loi de Newton, évaluons la position d'équilibre d'un système masse-ressort oscillant à la verticale sous l'influence de la gravité :

	Masse sous le ressort	Masse au-dessus du ressort
Ressort au repos non déformé (sans masse)		

	Masse sous le ressort	Masse au-dessus du ressort
Ressort à l'équilibre ( $a_x = 0$ )		

**Remarque :**

- Les positions de la masse  $x = 0$  coïncide avec la position à l'équilibre ( $\sum F_x = 0$ ).
- On utilise le vecteur  $\vec{e}_{eq}$  pour mesurer l'étirement du ressort à l'équilibre.
- Le point d'équilibre  $x = 0$  est toujours sous la position du ressort non déformé.

À l'équilibre, nous avons  $\sum \vec{F} = 0$  :

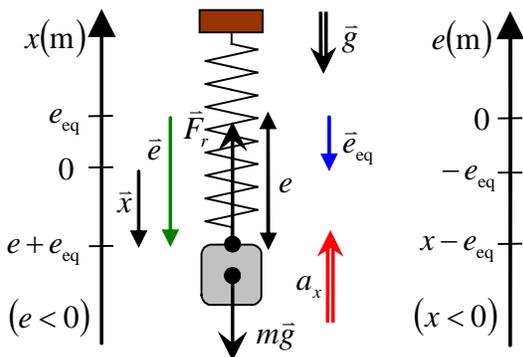
$$\begin{aligned} \sum \vec{F} = 0 &\Rightarrow \vec{F}_r + m\vec{g} = 0 && \text{(Force du ressort et force gravitationnelle)} \\ &\Rightarrow -k\vec{e} + m\vec{g} = 0 && \text{(Remplacer la force du ressort, } \vec{F}_r = -k\vec{e} \text{)} \\ &\Rightarrow -k(\vec{e}_{eq}) + m\vec{g} = 0 && \text{(Remplacer l'étirement à l'équilibre, } \vec{e} = \vec{e}_{eq} \text{)} \\ &\Rightarrow k\vec{e}_{eq} = m\vec{g} && \text{(Isoler } k\vec{e}_{eq} \text{, relation à l'équilibre vectorielle)} \\ &\Rightarrow \boxed{ke_{eq} = mg} && \text{(Relation à l'équilibre en module)} \end{aligned}$$

De plus, on peut exprimer la force  $F_r$  exercée par le ressort par rapport à l'axe  $x$  avec  $e_{eq} = mg/k$  :

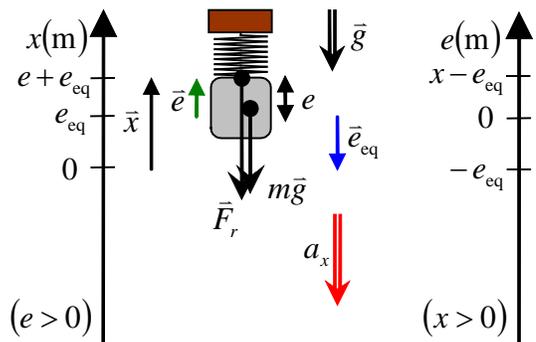
- Définition vectorielle :  $\vec{F}_r = -k(\vec{x} + \vec{e}_{eq})$  où  $\vec{e} = \vec{x} + \vec{e}_{eq}$
- Définition scalaire selon l'axe  $x$  :  $F_r = -k(x - e_{eq})$  où  $e = x - e_{eq}$

**N.B.** Puisque  $\vec{e}_{eq}$  est toujours orienté vers le bas, il est dans le sens négatif de l'axe  $x$ .

Masse sous le point d'équilibre : ( $a_x > 0$ )



Masse au-dessus du point d'équilibre : ( $a_x < 0$ )



Appliquons la 2<sup>ième</sup> loi de Newton à notre masse :

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} = m\vec{a} &\Rightarrow \vec{F}_r + m\vec{g} = m\vec{a} && \text{(Force du ressort et force gravitationnelle)} \\ &\Rightarrow -k(\bar{x} + \bar{e}_{\text{eq}}) + m\vec{g} = m\vec{a} && \text{(Remplacer } \vec{F}_r = -k(\bar{x} + \bar{e}_{\text{eq}})) \\ &\Rightarrow -k\bar{x} - k\bar{e}_{\text{eq}} + m\vec{g} = m\vec{a} && \text{(Distribution de } k) \\ &\Rightarrow -k\bar{x} - (m\vec{g}) + m\vec{g} = m\vec{a} && \text{(Position d'équilibre, } k\bar{e}_{\text{eq}} = m\vec{g}) \\ &\Rightarrow -k\bar{x} = m\vec{a} && \text{(Simplifier } m\vec{g}) \\ &\Rightarrow -kx = ma_x && \text{(Décomposer selon l'axe } x) \\ &\Rightarrow a_x = -\frac{k}{m}x && \text{(Isoler } a_x) \\ &\Rightarrow a_x = -\omega_0^2 x && \text{(Remplacer } \omega_0^2 = k/m, \text{ forme de l'OHS)} \\ &\Rightarrow x = A \sin(\omega_0 t + \phi) \quad \blacksquare && \text{(Solution de l'OHS : MHS)} \end{aligned}$$

**Situation 1 : La détermination du champ gravitationnel.** Albert fait un naufrage sur une planète inconnue. Il accroche une pierre à un ressort idéal vertical de masse négligeable dont l'extrémité supérieure est maintenue fixe. Il observe que la position d'équilibre de la pierre correspond à un étirement de 50 cm par rapport à la longueur naturelle du ressort. En donnant une impulsion verticale à la pierre, il observe qu'elle oscille verticalement en effectuant 36 oscillations en 1 minute. À partir de ces observations, Albert désire déterminer le module du champ gravitationnel à la surface de la planète. (Il ne connaît ni la constante de rappel, ni la masse de la pierre!)

À partir des 36 oscillations par minutes, évaluons la fréquence naturelle  $f_0$  de l'oscillation :

$$f_0 = \frac{\text{nb tours}}{\Delta t} \Rightarrow f_0 = \frac{(36)}{(60)} \Rightarrow \boxed{f_0 = 0,6 \text{ s}^{-1}}$$

Évaluons maintenant la fréquence angulaire naturelle  $\omega_0$  de l'oscillation :

$$\omega_0 = 2\pi f_0 \Rightarrow \omega_0 = 2\pi(0,6) \Rightarrow \boxed{\omega_0 = 3,77 \text{ rad/s}}$$

Avec l'allongement  $e_{\text{eq}} = 50 \text{ cm}$  du ressort à l'équilibre, nous pouvons développer la relation suivante avec la 2<sup>ième</sup> loi de Newton selon l'axe  $y$  :

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 &\Rightarrow F_r - mg = 0 && \text{(Force du ressort et force gravitationnelle)} \\ &\Rightarrow ke - mg = 0 && \text{(Remplacer la force du ressort, } F_r = ke) \\ &\Rightarrow \boxed{k = \frac{mg}{e_{\text{eq}}}} && \text{(Isoler } k \text{ et remplacer } e = e_{\text{eq}}, \text{ équilibre)} \end{aligned}$$

Avec l'expression de la fréquence angulaire en fonction de  $k$  et  $m$ , nous pouvons évaluer le champ gravitationnel  $g$  :

$$\begin{aligned} \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} &\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{(mg / e_{\text{eq}})}{m}} && \text{(Remplacer } k = \frac{mg}{e_{\text{eq}}}) \\ &\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{e_{\text{eq}}}} && \text{(Simplifier } m \text{ et manipulation)} \\ &\Rightarrow \omega_0^2 = \frac{g}{e_{\text{eq}}} && \text{(Mettre au carré)} \\ &\Rightarrow g = e_{\text{eq}} \omega_0^2 && \text{(Isoler } g) \\ &\Rightarrow g = (0,5)(3,77)^2 && \text{(Remplacer valeurs numériques)} \\ &\Rightarrow \boxed{g = 7,11 \text{ N/kg}} && \text{(Évaluer } g) \end{aligned}$$

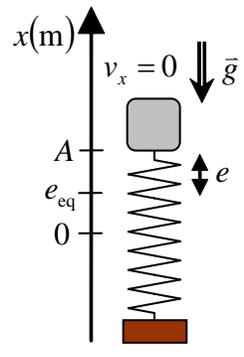
## L'énergie d'un système masse-ressort à la verticale

Analysons l'énergie d'un système masse-ressort oscillant à la verticale avec les équations du mouvement suivantes selon la convention  $x = y = 0$  :

$$\begin{aligned} x(t) &= A \sin(\omega t + \phi) \\ \text{et } v_x(t) &= \frac{dx(t)}{dt} = A \omega \cos(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

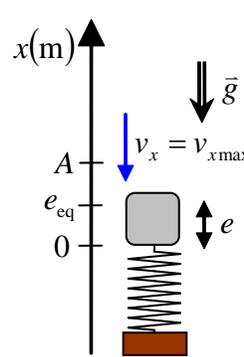
où  $\omega = \sqrt{k/m}$  Condition d'équilibre :  $x = y = 0$  lorsque  $e = e_{\text{eq}}$  et  $mg = ke_{\text{eq}}$

### Situation 1 : Hauteur maximale



$$\begin{aligned} E = K + U_r + U_g &\Rightarrow E = U_r + U_g && (K = 0, \text{ car } v = 0) \\ &\Rightarrow E = \frac{1}{2}ke^2 + mgy && \text{(Définition de } U_r \text{ et } U_g) \\ &\Rightarrow E = \frac{1}{2}k(A - e_{\text{eq}})^2 + mgA && (e = x - e_{\text{eq}} \text{ et } x = y = A) \\ &\Rightarrow E = \frac{1}{2}k(A^2 - 2Ae_{\text{eq}} + e_{\text{eq}}^2) + mgA && \text{(Distribution du carré)} \\ &\Rightarrow E = \frac{1}{2}kA^2 + \frac{1}{2}ke_{\text{eq}}^2 - kAe_{\text{eq}} + mgA && \text{(Distribution de } \frac{1}{2}k) \\ &\Rightarrow E = \frac{1}{2}kA^2 + \frac{1}{2}ke_{\text{eq}}^2 + A(mg - ke_{\text{eq}}) && \text{(Factoriser } A) \\ &\Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2}kA^2 + \frac{1}{2}ke_{\text{eq}}^2} && \text{(Utiliser } mg = ke_{\text{eq}}) \end{aligned}$$

**Situation 2 :** Vitesse maximale et position d'équilibre



$$E = K + U_r + U_g \quad \Rightarrow \quad E = K + U_r \quad (U_g = 0, \text{ car } y = 0)$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ke^2 \quad (\text{Définition de } K \text{ et } U_r)$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}m(A\omega)^2 + \frac{1}{2}k(e_{\text{eq}})^2 \quad (v = v_{\text{max}} = A\omega, \quad e = e_{\text{eq}})$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 + \frac{1}{2}ke_{\text{eq}}^2 \quad (\text{Distribution du carré})$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}mA^2 \frac{k}{m} + \frac{1}{2}ke_{\text{eq}}^2 \quad (\text{Remplacer } \omega^2 = k/m)$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2}kA^2 + \frac{1}{2}ke_{\text{eq}}^2} \quad (\text{Simplifier } m)$$

**L'énergie d'un système masse-ressort sans frottement à la verticale lorsque l'équilibre n'est pas à énergie potentielle nulle**

Avec le théorème de la conservation de l'énergie, nous pouvons affirmer que l'énergie totale d'un système masse-ressort oscillant sans frottement à la verticale est définie par l'équation suivante selon la convention  $x = y = 0$  :

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 + e_{\text{eq}}^2) \quad \text{ou} \quad E = \frac{1}{2}k(A^2 + e_{\text{eq}}^2)$$

Condition d'équilibre :  $x = y = 0$  lorsque  $e = e_{\text{eq}}$  et  $mg = ke_{\text{eq}}$

où  $E$  : Énergie total du système masse-ressort à la verticale (J).

$k$  : Constant du ressort (N/m).

$A$  : Amplitude maximale de l'oscillation (m).

$\omega$  : Fréquence angulaire des oscillations avec  $\omega = \sqrt{k/m}$  (rad/s).

$e_{\text{eq}}$  : Étirement ou compression du ressort à l'équilibre (m).

Preuve :

Considérons un système bloc-ressort oscillant à la verticale. Évaluons l'expression de l'énergie totale du système à une position quelconque de l'oscillation :

$$E = K + U_r + U_g$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ke^2 + mgy \quad (\text{Déf. de } K, U_r \text{ et } U_g)$$

Continuons la démonstration en remplaçant la relation position-étirement par l'expression  $e = x - e_{\text{eq}}$   
 et la relation position-hauteur par l'expression  $y = x$  :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ke^2 + mgy \quad (\text{équation précédente})$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(x - e_{\text{eq}})^2 + mg(x) \quad (e = x - e_{\text{eq}} \text{ et } y = x)$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(x^2 - 2xe_{\text{eq}} + e_{\text{eq}}^2) + mgx \quad (\text{Développer le carré})$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 - kxe_{\text{eq}} + \frac{1}{2}ke_{\text{eq}}^2 + mgx \quad (\text{Distribuer } \frac{1}{2}k)$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}ke_{\text{eq}}^2 + x(mg - ke_{\text{eq}}) \quad (\text{Factoriser } x)$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}ke_{\text{eq}}^2 \quad (\text{Utiliser } mg = ke_{\text{eq}})$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}m(A\omega \cos(W))^2 + \frac{1}{2}k(A \sin(W))^2 + \frac{1}{2}ke_{\text{eq}}^2 \quad (\text{Remplacer } x \text{ et } v)$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \cos^2(W) + \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(W) + \frac{1}{2}ke_{\text{eq}}^2 \quad (\text{Développer le carré})$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(W) + \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(W) + \frac{1}{2}ke_{\text{eq}}^2 \quad (\frac{1}{2}mA^2\omega^2 = \frac{1}{2}kA^2)$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}kA^2 [\cos^2(W) + \sin^2(W)] + \frac{1}{2}ke_{\text{eq}}^2 \quad (\text{Factoriser } \frac{1}{2}kA^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2}kA^2 + \frac{1}{2}ke_{\text{eq}}^2} \quad \text{ou} \quad \boxed{E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 + \frac{1}{2}ke_{\text{eq}}^2} \quad \blacksquare \quad (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1)$$

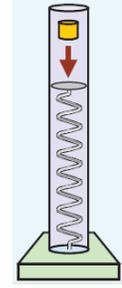
# L'énergie et l'association à l'amplitude

Pour avoir un système masse-ressort oscillant à la verticale sous l'effet de la gravité ayant une énergie totale égale à  $E = \frac{1}{2}kA^2$ , il faut établir une relation particulière entre  $x$  et  $y$  ( $x \neq y = 0$ ). Ainsi, la position  $y = 0$  n'est pas située au centre de l'oscillation  $x = 0$ . Ceci est une conséquence de l'équation  $U_g = mgy$  qui possède une position  $y = 0$  arbitraire.

Relation énergie totale classique <sup>1</sup>	Relation énergie totale précédente
<u>Relation position-hauteur :</u> $x = y + e_{eq} / 2$	<u>Relation position-hauteur :</u> $x = y$
$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2$ <p>tel que</p> $E = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \frac{1}{2}mv^2$ <p>où</p> $x = 0$ à l'équilibre.	$E = \frac{1}{2}k(A^2 + e_{eq}^2)$ <p>tel que</p> $E = mgy + \frac{1}{2}ke^2 + \frac{1}{2}mv^2$ <p>où</p> $y = 0$ à l'équilibre.
<u>À l'équilibre :</u> $U = U_g + U_r = 0$	<u>À l'équilibre :</u> $U = U_g + U_r = \frac{1}{2}ke_{eq}^2$

<sup>1</sup> La preuve est disponible dans le livre de référence à la page 63.  
 Référence : Marc Séguin, Physique XXI Tome C  
 Note de cours rédigée par Simon Vézina

**Situation 2 : Une chute sur un ressort.** Un ressort idéal de 40 cm de longueur, dont la constante de rappel est de 25 N/m, est placé dans un tube vertical sans frottement dont le rôle est de le maintenir en position verticale (schéma ci-contre). On laisse tomber un bloc de 0,25 kg dans le tube : au moment où il entre en contact avec le ressort, il se déplace à 1 m/s. On a appliqué un peu de colle sous le bloc : par conséquent, il demeure collé au ressort et oscille verticalement. On désire déterminer la longueur du ressort **(a)** au point le plus haut et **(b)** au point le plus bas de l'oscillation.



Physique XXI - Tome C - p. 65 - © ERPI

Évaluons la compression du ressort  $e_{\text{eq}}$  lorsque le bloc est à l'équilibre à l'aide de la 2<sup>ième</sup> loi de Newton selon l'axe  $y$ . La compression  $e_{\text{eq}}$  correspond à la compression du ressort lorsque le bloc est au centre de son MHS :

$$\begin{aligned} \sum F_y = ma_y &\Rightarrow F_r - mg = ma_y && \text{(Remplacer forces)} \\ &\Rightarrow F_r - mg = 0 && (a_y = 0, \text{ car équilibre}) \\ &\Rightarrow (ke) - mg = 0 && \text{(Remplacer } F_r = ke) \\ &\Rightarrow k(e_{\text{eq}}) - mg = 0 && \text{(Remplacer } e = e_{\text{eq}}, \text{ car équilibre)} \\ &\Rightarrow (25)e_{\text{eq}} - (0,25)(9,8) = 0 && \text{(Remplacer valeurs num.)} \\ &\Rightarrow \boxed{e_{\text{eq}} = 0,098 \text{ m}} && \text{(Évaluer } e_{\text{eq}}) \end{aligned}$$

**N.B.** Puisque le bloc tombe sur le ressort, cette mesure est une compression.

Évaluons l'énergie totale  $E$  du système au moment où le bloc entre en contact avec le ressort. Prenons comme convention  $x = y = 0$  à la position d'équilibre :

- $v = -1 \text{ m/s}$  (vitesse du bloc au contact)
- $y = e_{\text{eq}} = 0,098 \text{ m}$  (au-dessus du point d'équilibre)
- $e = 0$  (ressort à longueur naturelle)

$$\begin{aligned} E = K + U &\Rightarrow E = K + (U_r + U_g) && \text{(Remplacer } U = U_r + U_g) \\ &\Rightarrow E = K + (0) + U_g && (U_r = 0, \text{ car } e = 0) \\ &\Rightarrow E = \left(\frac{1}{2}mv^2\right) + (mgy) && \text{(Remplacer } K \text{ et } U_g) \\ &\Rightarrow E = \frac{1}{2}(0,25)(1)^2 + (0,25)(9,8)(0,098) && \text{(Remplacer valeurs num.)} \\ &\Rightarrow \boxed{E = 0,3651 \text{ J}} && \text{(Évaluer } E) \end{aligned}$$

Évaluons l'amplitude  $A$  des oscillations à partir de l'énergie en choisissant l'équation appropriée à notre convention  $x = y = 0$  à la position d'équilibre :

$$E = \frac{1}{2}k(A^2 + e_{\text{eq}}^2) \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2E}{k} - e_{\text{eq}}^2} \quad (\text{Isoler } A)$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{\frac{2(0,3651)}{25} - (0,098)^2} \quad (\text{Remplacer valeurs num.})$$

$$\Rightarrow \boxed{A = 0,1400 \text{ m}} \quad (\text{Évaluer } A)$$

Au point le plus haut, le ressort sera très étiré. Évaluons la longueur maximale  $L_{\text{max}}$  du ressort à l'aide de la longueur naturelle  $L_{\text{nat}}$ , de la compression à l'équilibre  $e_{\text{eq}}$  et de l'amplitude  $A$  :

$$L_{\text{max}} = L_{\text{nat}} - e_{\text{eq}} + A \Rightarrow L_{\text{max}} = (0,40) - (0,098) + (0,1400)$$

$$\Rightarrow \boxed{L_{\text{max}} = 0,4420 \text{ m}} \quad (\mathbf{a})$$

**P.S.** Si le ressort était étiré à l'équilibre, l'équation serait  $L_{\text{max}} = L_{\text{nat}} + e_{\text{eq}} + A$

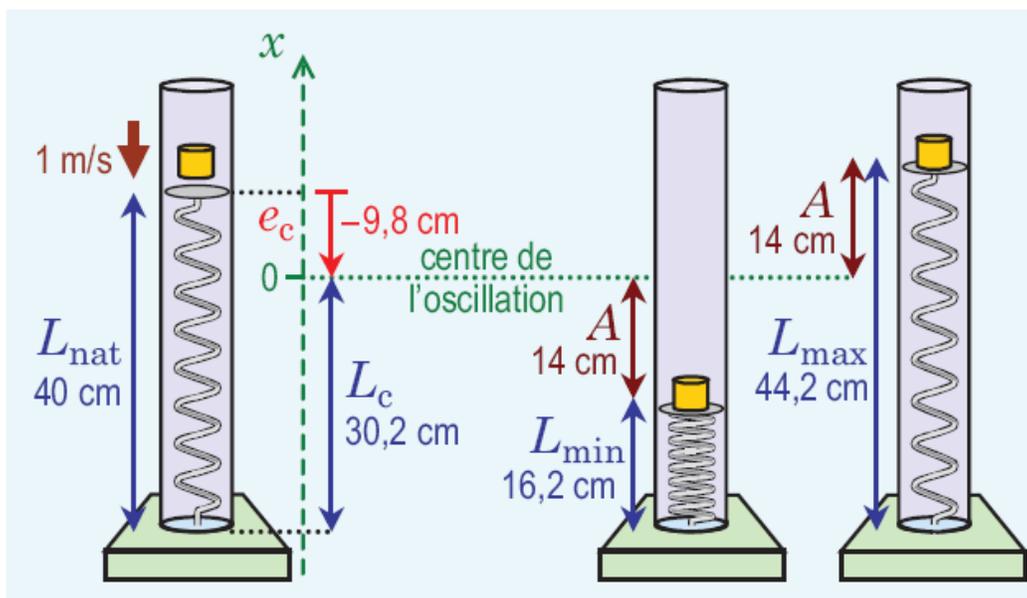
Au point le plus bas, le ressort sera très comprimé. Évaluons la longueur minimale  $L_{\text{min}}$  du ressort à l'aide de la longueur naturelle  $L_{\text{nat}}$ , de la compression à l'équilibre  $e_{\text{eq}}$  et de l'amplitude  $A$  :

$$L_{\text{min}} = L_{\text{nat}} - e_{\text{eq}} - A \Rightarrow L_{\text{min}} = (0,40) - (0,098) - (0,1400)$$

$$\Rightarrow \boxed{L_{\text{min}} = 0,1620 \text{ m}} \quad (\mathbf{b})$$

**P.S.** Si le ressort était étiré à l'équilibre, l'équation serait  $L_{\text{min}} = L_{\text{nat}} + e_{\text{eq}} - A$

Résumé de la situation :



Physique XXI - Tome C - p. 66 - © ERPI

**Situation 4 : Une chute sur un ressort, prise 3.** Dans la **situation 2**, on désire calculer la longueur du ressort 2 s après l'instant où le bloc est entré en contact avec lui.

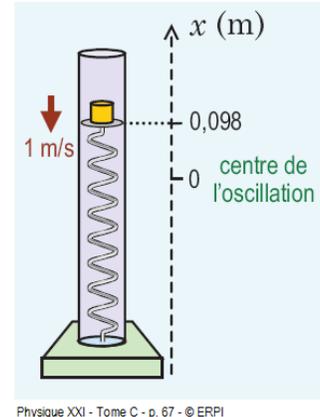
Évaluons la fréquence angulaire naturelle d'oscillation du système :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{(25)}{(0,25)}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega_0 = 10 \text{ rad/s}}$$

À partir des informations recueillies à la **situation 2**, exprimons les informations disponibles à l'instant où le bloc entre en contact avec le bloc :

- $e_{\text{eq}} = 0,098 \text{ m}$  (compression à l'équilibre)
- $A = 0,1400 \text{ m}$  (amplitude des oscillations)
- $\omega_0 = 10 \text{ rad/s}$  (fréquence angulaire)
- $x = A \sin(\omega_0 t + \phi)$  (équation position)
- $v_x = \frac{dx}{dt} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$  (équation vitesse)
- $x_0 = e_{\text{eq}} = 0,098 \text{ m}$  (au-dessus du point d'équilibre  $x = 0$ , donc  $x > 0$ )
- $v_{x0} = -1 \text{ m/s}$  (chute sur le ressort, donc  $v_{x0} < 0$  vers le bas)
- $t = 0$  (débuter le MHS à  $t = 0$ )



Évaluons la constante de phase  $\phi$  à partir de l'équation de la position à  $t = 0$  :

$$x = A \sin(\omega_0 t + \phi) \quad \Rightarrow \quad (0,098) = (0,1400) \sin((10)(0) + \phi) \quad (\text{Remplacer pour } t = 0)$$

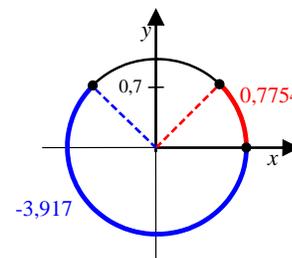
$$\Rightarrow \quad \boxed{0,7 = \sin(\phi)} \quad (\text{Simplification})$$

Nous pouvons obtenir les constantes de phase admissibles :

$$0,7 = \sin(\phi) \quad \Rightarrow \quad \phi = \sin^{-1}(0,7)$$

$$\Rightarrow \quad \phi = \{ \dots, -3,917, 0,7754, \dots \}$$

P.S. Calculatrice :  $\phi = 0,7754 \text{ rad}$



Évaluons la vitesse à  $t = 0$  pour ces deux constantes de phase :

$$v_x = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \phi) \Rightarrow v_x = (0,1400)(10) \cos((10)(0) + (-3,917)) \Rightarrow \boxed{v_x = -1,003 \text{ m/s}}$$

$$v_x = (0,1400)(10) \cos((10)(0) + (0,7754)) \Rightarrow \boxed{v_x = 1,000 \text{ m/s}}$$

Puisque le bloc se déplace dans le sens négatif de l'axe  $x$  ( $v_{x0} < 0$ ), nous choisissons la constante de phase suivante :

$$\boxed{\phi = -3,917 \text{ rad}}$$

(équivalent à  $\phi = 2\pi - 3,917 = 2,366 \text{ rad}$ )

Évaluons la position du bloc à  $t = 2 \text{ s}$  :

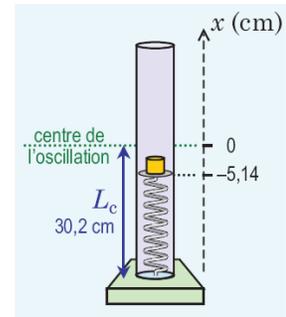
$$x = A \sin(\omega_0 t + \phi) \Rightarrow x = (0,1400) \sin((10)(2) + (-3,917))$$

$$\Rightarrow \boxed{x = -0,0513 \text{ m}}$$

Évaluons la longueur du ressort  $t = 2 \text{ s}$  :

$$L = L_{\text{nat}} - e_{\text{eq}} + x \Rightarrow L = (0,40) - (0,098) + (-0,0513)$$

$$\Rightarrow \boxed{L = 0,2507 \text{ m}}$$



Physique XXI - Tome C - p. 68 - © ERPI

$$L_C = L_{\text{nat}} - e_{\text{eq}}$$











# Chapitre 1.7 – Les oscillations amorties et forcées

## L'équation différentielle de l'oscillateur harmonique simple amorti

L'oscillateur harmonique simple amorti OHSA est une équation différentielle dont la construction provient d'un oscillateur harmonique simple MHS où l'on ajoute une résistance proportionnelle à la vitesse. Par exemple, l'application de la 2<sup>ième</sup> loi de Newton à un système masse-ressort oscillant dans un liquide génère une équation différentielle de la forme d'un OHSA :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \eta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

où  $x$  : Position de l'objet selon l'axe  $x$  ( $x = x(t)$ )

$t$  : Temps écoulé durant le mouvement (s)

$\eta$  : Facteur d'atténuation proportionnel à la vitesse ( $s^{-1}$ )

$\omega_0$  : Fréquence angulaire naturelle (rad/s)

Preuve : (exemple du système masse-ressort oscillant dans un liquide)

Considérons un système masse-ressort oscillant grâce à la force du ressort  $F_r = -kx$  et ralenti par une force de viscosité proportionnelle à la vitesse  $F_v = -bv_x$ . Appliquons la 2<sup>ième</sup> loi de Newton selon l'axe  $x$  afin de former une équation différentielle :

$$\begin{aligned} \sum F_x = ma_x &\Rightarrow F_r + F_v = ma_x && \text{(Appliquer deux forces : } F_r \text{ et } F_v \text{)} \\ &\Rightarrow -kx - bv_x = ma_x && \text{(Remplacer } F_r = -kx \text{ et } F_v = -bv_x \text{)} \\ &\Rightarrow -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}v_x = a_x && \text{(Diviser par } m \text{)} \\ &\Rightarrow -\omega_0^2 x - \eta v_x = a_x && \text{(Remplacer } \omega_0^2 = \frac{k}{m} \text{ et } \eta = \frac{b}{m} \text{)} \\ &\Rightarrow a_x + \eta v_x + \omega_0^2 x = 0 && \text{(Mettre équation égale à zéro)} \\ &\Rightarrow \frac{dv_x}{dt} + \eta v_x + \omega_0^2 x = 0 && \text{(Remplacer } a_x = \frac{dv_x}{dt} \text{)} \\ &\Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \eta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad \blacksquare && \text{(Remplacer } v_x = \frac{dx}{dt} \text{)} \end{aligned}$$

## La solution générale de l'oscillateur harmonique amorti

L'oscillateur harmonique amorti possède une solution générale de forme exponentielle. Lorsqu'on la propose à l'équation différentielle, celle-ci génère une contrainte sur l'ensemble des solutions possible par l'entremise d'un polynôme du 2<sup>ième</sup> degré :

Équation différentielle	Solution générale	Tel que ( $\beta = \frac{\eta}{2}$ )
$\frac{d^2 x}{dt^2} + \eta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$	$x(t) = A_1 e^{c_1 t} + A_2 e^{c_2 t}$	$c_1 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ $c_2 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$

Preuve :

Posons la forme d'une solution générale acceptable  $x = Ae^{ct}$  et appliquons cette solution à l'équation différentielle du OHSA :

Soit :  $x = Ae^{ct}$

$$\Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \eta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (\text{Équation du OHSA})$$

$$\Rightarrow \frac{d^2(Ae^{ct})}{dt^2} + \eta \frac{d(Ae^{ct})}{dt} + \omega_0^2(Ae^{ct}) = 0 \quad (\text{Remplacer } x = Ae^{ct})$$

$$\Rightarrow (c^2)Ae^{ct} + \eta(c)Ae^{ct} + \omega_0^2 Ae^{ct} = 0 \quad (\text{Appliquer la dérivée : } \frac{d e^{ax}}{dx} = ae^x)$$

$$\Rightarrow c^2 + \eta c + \omega_0^2 = 0 \quad (\text{Simplifier } x = Ae^{ct})$$

$$\Rightarrow c = \frac{-\eta \pm \sqrt{\eta^2 - 4\omega_0^2}}{2} \quad (\text{Résoudre polynôme du 2<sup>ième</sup> degré})$$

$$\Rightarrow c = \frac{-\eta \pm 2\sqrt{\frac{\eta^2}{4} - \omega_0^2}}{2} \quad (\text{Factoriser le terme 4 hors de la racine carré})$$

$$\Rightarrow c = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \quad (\text{Remplacer } \beta = \frac{\eta}{2})$$

$$\Rightarrow c = \begin{cases} c_1 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \\ c_2 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \end{cases} \quad (\text{Deux solutions au polynôme du 2<sup>ième</sup> degré})$$

Puisqu'il y a deux solutions possible à un polynôme du 2<sup>ième</sup> degré, la solution à l'équation différentielle la plus générale et complète se doit d'inclure les deux solutions du polynôme.

Ainsi :  $x(t) = A_1 e^{c_1 t} + A_2 e^{c_2 t}$  ■

## Les trois solutions particulières de l'oscillateur amorti

La forme générale de la solution à l'oscillateur amorti peut prendre trois formes complètement différentes selon les paramètres physiques  $\beta = \eta/2$  et  $\omega_0$  de la situation. En raison de la résolution précédente d'un polynôme du 2<sup>ième</sup> degré ( $c^2 + \eta c + \omega_0^2 = 0$ ), les solutions admissibles impliquent l'apparition de la racine carré d'un radical<sup>1</sup> provenant de la solution du polynôme du 2<sup>ième</sup> degré. Ce calcul peut avoir trois solutions distinctes selon les valeurs  $\beta$  et  $\omega_0$  : réelle, imaginaire et nul.

Radical positif (deux solutions réelles)	Radical négatif (deux solutions imaginaires)	Radical nul (solution unique)
$\omega_0 < \beta$	$\omega_0 > \beta$	$\omega_0 = \beta$
$c = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$	$c = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$	$c = -\beta$

### Preuve du radical négatif :

Modifions la forme du radical afin de le rendre positif à partir de la forme générale de la solution  $c$ . Cette opération fera apparaître le nombre imaginaire  $i$  :

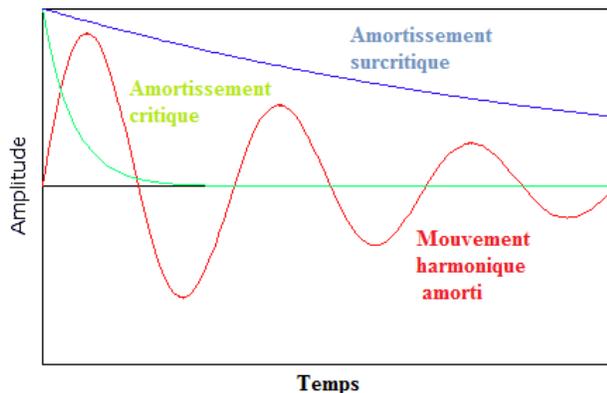
$$c = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \quad \Rightarrow \quad c = -\beta \pm \sqrt{-1} \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (\text{Factoriser le signe négatif})$$

$$\quad \Rightarrow \quad c = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad \blacksquare \quad (\text{Remplacer } i = \sqrt{-1})$$

## La représentation graphique des trois solutions particulières

Les trois solutions particulières proposent trois types d'oscillations :

- 1) Amortissement surcritique  
( $\omega_0 < \beta$ )
- 2) Mouvement harmonique amorti  
( $\omega_0 > \beta$ )
- 3) Amortissement critique  
( $\omega_0 = \beta$ )



<sup>1</sup> Le radical  $\Delta$  dans la résolution d'un polynôme du 2<sup>ième</sup> degré est égal à  $\Delta = b^2 - 4ac$

## Le mouvement harmonique simple amorti

Le mouvement harmonique simple amorti MHSA est la solution particulière de l'oscillateur amorti lorsque la valeur du radical admet deux solutions imaginaires ( $\omega_0 > \beta$ ). À partir de la formule d'Euler, on peut représenter une somme de fonction exponentiel imaginaire à l'aide de la fonction cosinus.

Le MHSA représente une oscillation à une fréquence angulaire  $\omega_a$  légèrement inférieure à la fréquence naturelle d'oscillateur  $\omega_0$  dont l'amplitude diminue à un rythme exponentiel :

Équation différentielle OHS : 
$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \eta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

Solution MHSA : 
$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_a t + \phi)$$

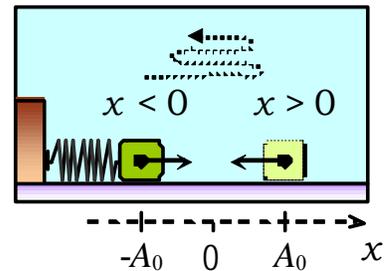
Condition : 
$$\omega_0 > \frac{\eta}{2} = \beta$$

- où  $x(t)$  : Position de l'objet selon l'axe  $x$  (m)  
 $A_0$  : Amplitude du mouvement à  $t = 0$  (m)  
 $\eta$  : Constante de résistance au mouvement ( $s^{-1}$ )  
 $\omega_0$  : Fréquence angulaire naturelle (rad/s)  
 $\omega_a$  : Fréquence angulaire amortie (rad/s)  
 $t$  : Temps écoulé durant le mouvement (s)  
 $\phi$  : Constante de phase (rad)  
 $x_0$  : Position de l'objet à  $t = 0$  (m)  
 $v_{x0}$  : Vitesse de l'objet à  $t = 0$  (m)

tel que  $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  (Fréquence angulaire amortie)

$$A_0 = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_{x0} + \beta x_0)^2}{\omega_a^2}}$$
 (Amplitude des oscillations à  $t = 0$ )

$$\phi = \cos^{-1}(x_0 / A_0)$$
 (Constante de phase)



Le système masse-ressort oscillant dans l'eau est un OHS, le mouvement est donc un MHSA dans certaines conditions.

Preuve :

À partir de la solution générale de l'oscillateur harmonique amorti, appliquons la condition  $\omega_0 > \beta$  et développons la solution sous la forme d'une fonction cosinus afin d'obtenir le MHSA. Débutons avec l'expression particulière des solutions du polynôme du 2<sup>ème</sup> degré  $c$  obtenu précédemment :

$$c = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \Rightarrow c = -\beta \pm i\omega_a \quad (\text{Remplacer } \omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2})$$

À partir de notre solution générale pour  $x(t)$ , remplaçons les expressions de  $c_1$  et  $c_2$  :

$$x = A_1 e^{c_1 t} + A_2 e^{c_2 t} \quad (\text{Solution générale})$$

$$\Rightarrow x = A_1 e^{(-\beta + i\omega_a)t} + A_2 e^{(-\beta - i\omega_a)t} \quad (\text{Remplacer } c_1 \text{ et } c_2)$$

$$\Rightarrow x = e^{-\beta t} (A_1 e^{i\omega_a t} + A_2 e^{-i\omega_a t}) \quad (\text{Factoriser } e^{-\beta t})$$

La présence d'une exponentielle complexe nous permet d'affirmer que nous pouvons transformer l'expression précédente sous la forme d'une **fonction cosinus**<sup>2</sup> grâce à la formule d'Euler :

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\text{car} \quad e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x) \quad \text{et} \quad e^{-ix} = \cos(x) - i \sin(x)$$

Puisque nous avons deux constantes  $A_1$  et  $A_2$  à définir en fonction des conditions initiales  $x_0$  et  $v_{x0}$ , nous pouvons les reformuler sous la forme suivante afin d'appliquer plus aisément la formule d'Euler :

$$A_1 = \frac{A_0}{2} e^{i\phi} \quad \text{et} \quad A_2 = \frac{A_0}{2} e^{-i\phi}$$

Ce choix est astucieux, car il nous permettra d'introduire dans notre solution finale  $x(t)$  un terme d'amplitude initiale  $A_0$  à  $x=0$  et un terme de phase  $\phi$  par analogie avec le MHS.

Développons notre équation précédente avec ces nouveaux éléments :

$$x = e^{-\beta t} (A_1 e^{i\omega_a t} + A_2 e^{-i\omega_a t}) \quad (\text{Équation précédente})$$

$$\Rightarrow x = e^{-\beta t} \left( \left( \frac{A_0}{2} e^{i\phi} \right) e^{i\omega_a t} + \left( \frac{A_0}{2} e^{-i\phi} \right) e^{-i\omega_a t} \right) \quad (\text{Remplacer } A_1 = \frac{A_0}{2} e^{i\phi} \text{ et } A_2 = \frac{A_0}{2} e^{-i\phi})$$

$$\Rightarrow x = \frac{A_0}{2} e^{-\beta t} (e^{i\phi} e^{i\omega_a t} + e^{-i\phi} e^{-i\omega_a t}) \quad (\text{Factoriser } \frac{A_0}{2})$$

$$\Rightarrow x = \frac{A_0}{2} e^{-\beta t} (e^{i(\omega_a t + \phi)} + e^{-i(\omega_a t + \phi)}) \quad (\text{Distribuer } e^{i\phi})$$

$$\Rightarrow \boxed{x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_a t + \phi)} \quad \blacksquare \quad (\text{Formule d'Euler : } \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2})$$

<sup>2</sup> Les fonctions trigonométriques sont basées sur la relation suivante :  $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

Nous pouvons maintenant passer à l'évaluation de l'amplitude  $A_0$  et la constante de phase  $\phi$  en fonction des conditions initiales  $x_0$  et  $v_{x0}$ . Pour réaliser cette tâche, évaluons l'expression de la vitesse  $v_x(t)$  à partir de sa définition :

$$v_x = \frac{d x(t)}{dt} \quad \text{(Définition de la vitesse } v_x(t))$$

$$\Rightarrow v_x = \frac{d(A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_a t + \phi))}{dt} \quad \text{(Remplacer } x(t))$$

$$\Rightarrow v_x = A_0 \frac{d(e^{-\beta t} \cos(\omega_a t + \phi))}{dt} \quad \text{(Factoriser } A_0)$$

$$v_x = A_0 \frac{d(e^{-\beta t} \cos(\omega_a t + \phi))}{dt} \quad \text{(Ligne précédente)}$$

$$\Rightarrow v_x = A_0 \left[ \cos(\omega_a t + \phi) \frac{d(e^{-\beta t})}{dt} + e^{-\beta t} \frac{d(\cos(\omega_a t + \phi))}{dt} \right] \quad \left( \frac{d(fg)}{dx} = f \frac{dg}{dx} + g \frac{df}{dx} \right)$$

$$\Rightarrow v_x = A_0 \left[ \cos(\omega_a t + \phi) (-\beta e^{-\beta t}) + e^{-\beta t} (-\omega_a) \sin(\omega_a t + \phi) \right] \quad \left( \frac{d e^{ax}}{dx} = a e^x, \frac{d \cos(ax)}{dx} = -a \sin(ax) \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{v_x = A_0 e^{-\beta t} [-\beta \cos(\omega_a t + \phi) - \omega_a \sin(\omega_a t + \phi)]} \quad \text{(Factoriser } e^{-\beta t})$$

Pour évaluer l'expression de nos constantes  $A_0$  et  $\phi$ , nous devons poser nos conditions initiales à nos équations de position et de vitesse :

Position initiale :

$$x(t=0) = x_0 \quad \text{(Position à } t = 0)$$

$$\Rightarrow x_0 = A_0 e^{-\beta(0)} \cos(\omega_a(0) + \phi) \quad \text{(Remplacer } t = 0 \text{ dans } x(t))$$

$$\Rightarrow x_0 = A_0 \cos(\phi) \quad \text{(Simplifier)}$$

$$\Rightarrow \cos(\phi) = \frac{x_0}{A_0} \quad \text{(Isoler } \cos(\phi))$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi = \cos^{-1}\left(\frac{x_0}{A_0}\right)} \quad \blacksquare \quad \text{(Isoler } \phi)$$

Vitesse initiale :

$$v_x(t=0) = v_{x0} \quad \text{(Vitesse à } t = 0)$$

$$\Rightarrow v_{x0} = A_0 e^{-\beta(0)} [-\beta \cos(\omega_a(0) + \phi) - \omega_a \sin(\omega_a(0) + \phi)] \quad \text{(Remplacer } t = 0 \text{ dans } v_x(t))$$

$$\Rightarrow v_{x0} = A_0 [-\beta \cos(\phi) - \omega_a \sin(\phi)] \quad \text{(Simplifier)}$$

Continuons à simplifier notre expression afin d'isoler  $\sin(\phi)$  :

$$\Rightarrow \frac{v_{x0}}{A_0} = -\beta \cos(\phi) - \omega_a \sin(\phi) \quad (\text{Diviser par } A_0)$$

$$\Rightarrow \sin(\phi) = -\left( \frac{v_{x0}}{A_0 \omega_a} + \frac{\beta \cos(\phi)}{\omega_a} \right) \quad (\text{Isoler } \sin(\phi))$$

$$\Rightarrow \sin(\phi) = -\left( \frac{v_{x0}}{A_0 \omega_a} + \frac{\beta(x_0 / A_0)}{\omega_a} \right) \quad (\text{Remplacer } \cos(\phi) = \frac{x_0}{A_0})$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin(\phi) = -\left( \frac{v_{x0} + \beta x_0}{A_0 \omega_a} \right)} \quad (\text{Réécriture})$$

Afin d'isoler l'amplitude  $A_0$ , appliquons l'identité trigonométrique suivante :

$$\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) = 1 \quad (\text{Identité trigonométrique})$$

$$\Rightarrow \left( \frac{x_0}{A_0} \right)^2 + \left( -\left( \frac{v_{x0} + \beta x_0}{A_0 \omega_a} \right) \right)^2 = 1 \quad (\text{Remplacer } \cos(\phi) = \frac{x_0}{A_0} \text{ et } \sin(\phi) = -\left( \frac{v_{x0} + \beta x_0}{A_0 \omega_a} \right))$$

$$\Rightarrow \frac{x_0^2}{A_0^2} + \frac{(v_{x0} + \beta x_0)^2}{A_0^2 \omega_a^2} = 1 \quad (\text{Appliquer le carré})$$

$$\Rightarrow A_0^2 = x_0^2 + \frac{(v_{x0} + \beta x_0)^2}{\omega_a^2} \quad (\text{Isoler } A_0^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{A_0 = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_{x0} + \beta x_0)^2}{\omega_a^2}}} \quad \blacksquare \quad (\text{Isoler } A_0)$$

## L'amortissement surcritique (régime aperiodique)

En construction ...

## L'amortissement critique

En construction ...

## Autres formulations des solutions de l'oscillateur harmonique amorti

En construction ...

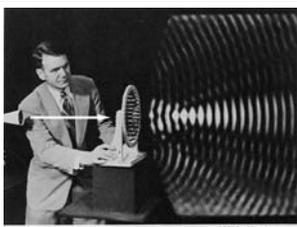
Oscillation Amortie ( $\omega_0 > \beta$ )	$x = e^{-\beta t} \left( x_0 \cos(\omega_a t) + \frac{\beta x_0 + v_{x0}}{\omega_a} \sin(\omega_a t) \right)$	$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$
Amortissement surcritique ( $\omega_0 < \beta$ )	$x = e^{-\beta t} \left( x_0 \cosh(\sigma t) + \frac{\beta x_0 + v_{x0}}{\sigma} \sinh(\sigma t) \right)$	$\sigma = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$
Amortissement Critique ( $\omega_0 = \beta$ )	$x = e^{-\beta t} (x_0 + (\beta x_0 + v_{x0})t)$	$\omega_0 = \beta$

# Chapitre 1.8 – Les ondes mécaniques progressives

## Onde et temps de réaction d'un milieu

Lorsqu'il y a des forces d'appliquées sur un milieu, ce n'est pas l'ensemble du milieu qui réagit instantanément. Puisque le **milieu** est constitué de plusieurs particules en interaction entre elles, il faut donner le temps aux **forces d'interaction** (forces internes) de **propager** la **perturbation**.

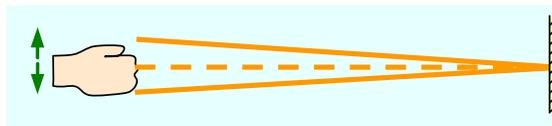
On peut ainsi définir une onde comme étant la déformation évolutive du milieu sous la présence d'une perturbation. On utilise le concept d'**onde mécanique** pour mesurer la **vitesse de propagation** d'une perturbation externe et pour mesurer la **position** des **éléments du milieu** dans le **temps**.

Onde mécanique			Onde électromagnétique
Tremblement de terre	Son d'un haut-parleur	Vague	Onde radio
			
Milieu : terre	Milieu : air	Milieu : eau	Milieu : Vide

## Une corde tendue

Voici le comportement d'une corde tendue fixée à un mur dont l'extrémité gauche se déplace verticalement à l'aide d'un mouvement harmonique simple forcé :

Mouvement harmonique simple lent : (perturbation lente)



- Propagation de l'onde plus rapide que le rythme de la perturbation.
- Aucune onde observable.

Mouvement harmonique simple rapide : (perturbation rapide)



- Propagation de l'onde plus lente que le rythme de la perturbation.
- Observation d'une onde se propageant dans le milieu à vitesse  $v$ .

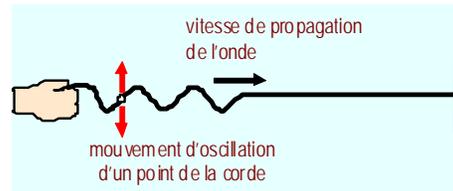
# Onde transversale et onde longitudinale

On distingue principalement deux types d'onde :

## Onde transversale :

Oscillation du milieu dans un plan perpendiculaire à la direction de la propagation de l'onde.

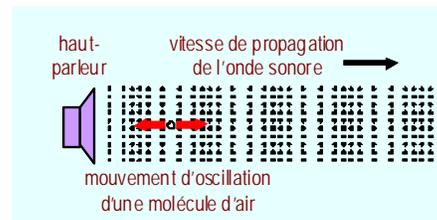
Exemple : Onde dans une corde



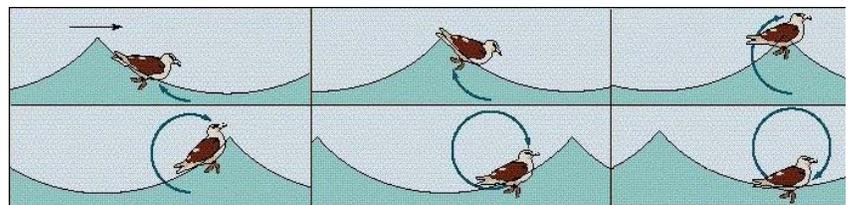
## Onde longitudinale

Oscillation du milieu dans la même direction que la propagation de l'onde.

Exemple : Le son dans l'air



Il y a également des ondes qui ne sont pas transversale ni longitudinale comme par exemple les **vagues** :



## Vitesse de propagation d'une onde transversale dans une corde tendue

Lorsqu'une **corde tendue** oscille avec des **petites oscillations**, l'**onde transversale** déformant la corde voyage à une **vitesse  $v$**  qui dépend de la **tension  $F$**  appliquée sur la corde et de la **masse linéique  $\mu$**  de la corde de la façon suivante :

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{M}{L}$$

où  $v$  : Vitesse de propagation de l'onde transversale dans la corde tendue (m/s)

$F$  : Tension appliquée sur la corde (N)

$\mu$  : Masse linéique d'une corde uniforme (kg/m)

$M$  : Masse totale de la corde (kg)

$L$  : Longueur de la corde (m)

## Preuve :

La preuve est disponible dans la démonstration de l'équation d'onde de la section 1.9c.

## Le fouet

Une onde voyageant dans une corde ne se déplace pas toujours à la même vitesse, car la vitesse dépend de la densité massique de la corde. C'est cette propriété qui est utilisée dans le fouet.



Le fouet.

Le fouet est l'équivalent d'une corde dont la masse linéique diminue avec la longueur (très massique près de la poignée et peu massive à l'autre extrémité). Lorsqu'on agite le fouet, l'onde se déplace de plus en plus rapidement. La grande vitesse atteinte par l'extrémité du fouet peut déplacer brusquement une quantité d'air et ainsi provoquer un claquement.

## Vitesse de propagation d'une onde sonore

La vitesse d'une onde sonore (le son) dans un gaz dépend de la pression du gaz et de la masse volumique du gaz :

$$v_s = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \quad \text{et} \quad \rho = \frac{M}{V}$$

où  $v_s$  : Vitesse de propagation de l'onde sonore (m/s)

$P$  : Pression du gaz (Pa ou N/m<sup>2</sup>)

$\gamma$  : Constante de degré de liberté du gaz ( $\gamma = 7/5 = 1,4$  pour l'air)

$\rho$  : Masse volumique du gaz (kg/m<sup>3</sup>)

$M$  : Masse totale occupée par le volume de gaz (kg)

$V$  : Volume occupé par le gaz (m<sup>3</sup>)

La pression du gaz  $P$  dépend de la température ambiante  $T$ . On peut utiliser la loi des gaz parfait  $PV = nRT$  pour estimer la pression du gaz.

$$v_s = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \Rightarrow v_s = \sqrt{\frac{\gamma \left( \frac{nRT}{V} \right)}{\left( \frac{M}{V} \right)}} \Rightarrow v_s = \sqrt{\frac{\gamma nRT}{M}}$$

Puisque l'air est un mélange de N<sub>2</sub> ( $M = 28$  g/mol) à 78%, de O<sub>2</sub> ( $M = 32$  g/mol) à 21% et d'autre gaz à 1%, on peut estimer la masse molaire de l'air à  $M = 29$  g/mol.

À une température 16°C, nous avons une vitesse du son dans l'air de 340 m/s :

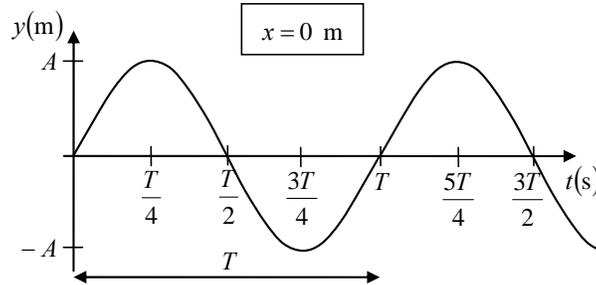
$$v_s = \sqrt{\frac{\gamma nRT}{M}} \Rightarrow v_s = \sqrt{\frac{(1,4)(1)(8,31)(273,15 + 16)}{(0,029)}} \Rightarrow \boxed{v_s = 340,6 \text{ m/s}}$$

**N.B.** La vitesse du son ne dépend pas du type de son (aigu, grave) qui voyage dans l'air.

## Corde soumise à un mouvement harmonique simple

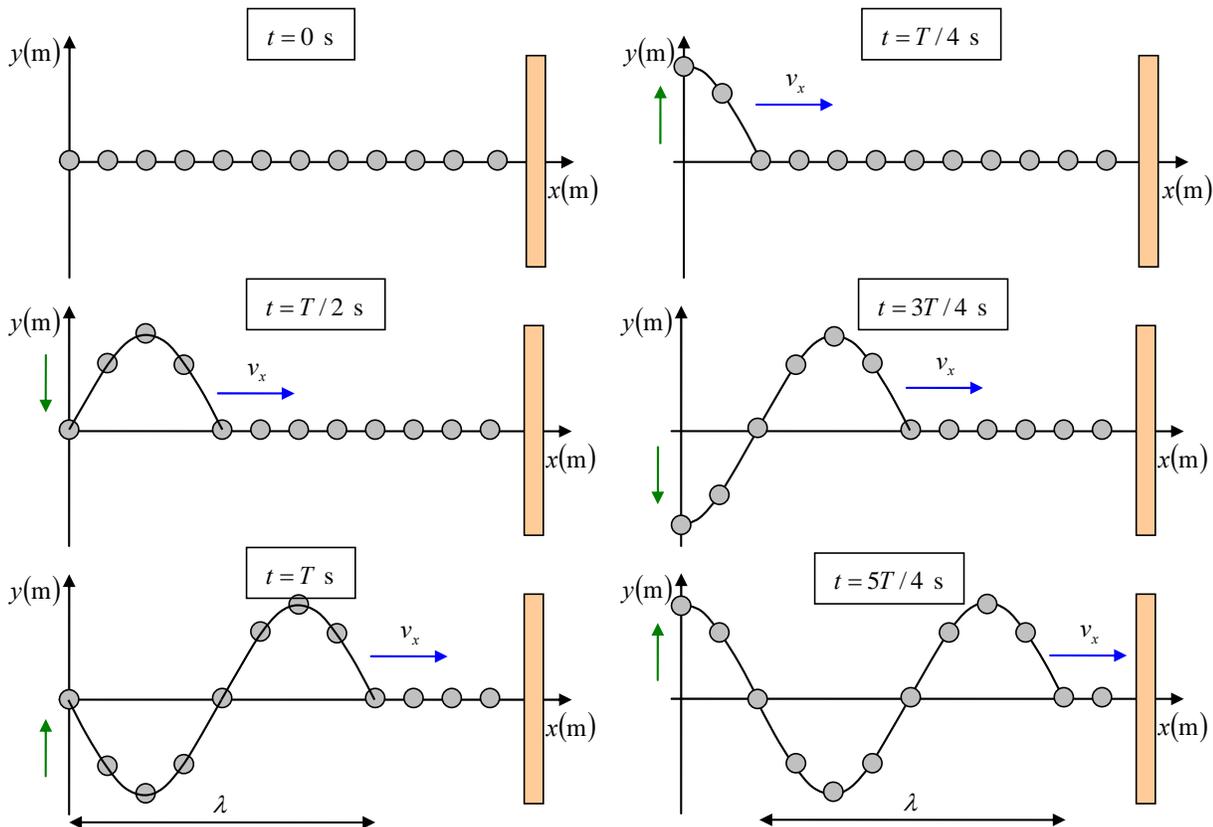
Étudions le mouvement d'une corde de longueur  $L$  située sur l'axe  $x$  entre  $x = 0$  et  $x = L$ . Nous fixons au mur l'élément de corde  $x = L$  et nous forçons l'élément  $x = 0$  à bouger selon l'équation suivante :

$$y(x=0, t) = A \sin(\omega t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$$



**Approximation :** On suppose que l'amplitude  $A$  du mouvement est beaucoup plus petite que la longueur  $L$  de la corde et que la corde est parfaitement élastique. Nous sommes ainsi dans l'**approximation des petites amplitudes**.

Voici la forme de la corde  $y(x, t)$  pour différentes valeurs de temps  $t$  :



- On retrouve le mouvement périodique sur la corde du mouvement harmonique simple de façon inversée (le sinus du MHS est tracé de droite à gauche) sur une distance  $\lambda$ . Cette longueur porte le nom de « longueur d'onde ».
- L'onde se propage dans la corde à une vitesse constante  $v_x$ .
- Lorsque l'onde atteint le mur, elle rebondit. Ce problème sera étudié à la section 1.11.

# Longueur d'onde

La longueur d'onde  $\lambda$  est l'espace occupée par une perturbation périodique d'une durée égale à une période  $T$  appliquée sur un milieu. On peut également définir la longueur d'onde  $\lambda$  comme étant la distance parcourue par une onde à la vitesse de propagation  $v$  durant une période  $T$  :

$$\lambda = vT$$

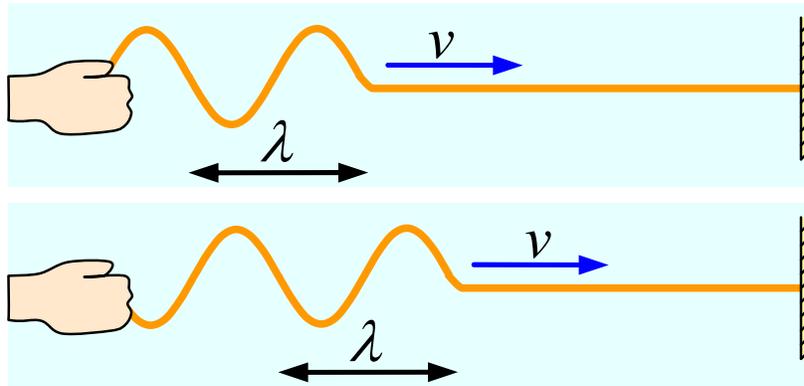
où  $\lambda$  : La longueur d'onde (m)

$v$  : La vitesse de propagation de l'onde dans le milieu (m/s)

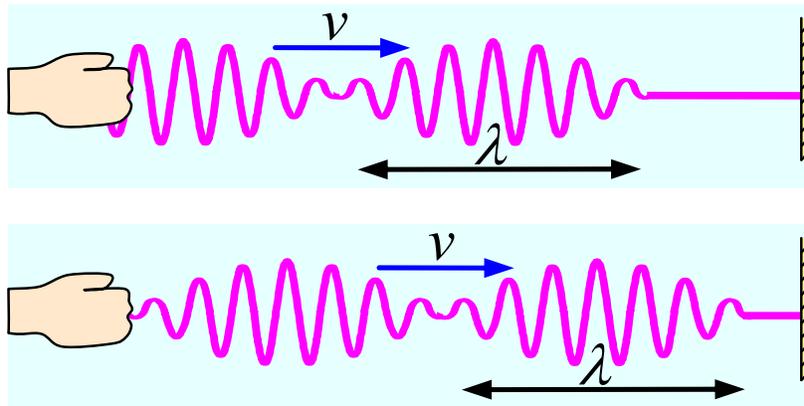
$T$  : Période de l'oscillation qui génère l'onde (s)

## Déplacement de l'onde :

Oscillateur : Mouvement harmonique simple (sinusoïdale)



Oscillateur : Mouvement non harmonique simple



La longueur d'onde représente en quelque sorte la distance parcourue par l'énergie transportée dans la corde durant un intervalle de temps égal à une période  $T$  :

$$\lambda = vT$$

(longueur d'onde)

$\Leftrightarrow$

$$\Delta x = v_x \Delta t$$

(cinématique de l'onde)



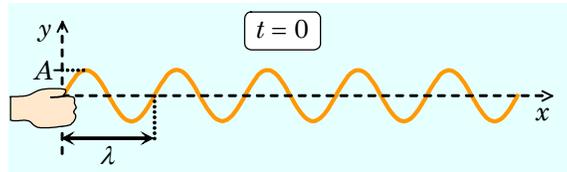




# Chapitre 1.9a – Les ondes sinusoïdales progressives

## L'onde sinusoïdale progressive

La **forme** de l'**onde** voyageant dans un milieu **dépend** de la **source** du mouvement ainsi que de la **vitesse de propagation** du **milieu**. Pour **simplifier notre étude**, nous allons **seulement** étudier l'évolution dans le temps d'une **onde** ayant une **forme sinusoïdale** (produit par un oscillateur en mouvement harmonique simple). Voici une représentation visuelle des ondes qui seront étudiées dans cette section :

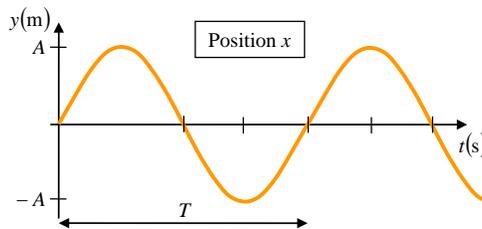
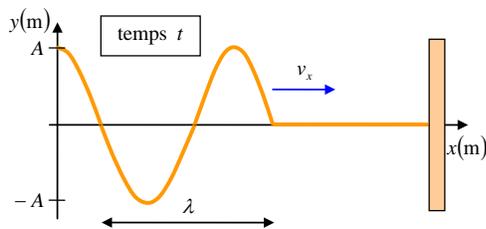


Il est important de préciser que l'**étude d'une onde** représente l'étude d'une **fonction à deux dimensions**  $y(x,t)$ . Si l'on utilise l'exemple de l'oscillation verticale d'une corde pour représenter la fonction  $y(x,t)$ , nous avons :

- $y(x,t)$  →  $y$  : Position verticale du bout de corde par rapport au point d'équilibre (m)  
 $x$  : Étiquette d'un bout de corde (position horizontale) (m)  
 $t$  : Temps écoulé dans le déplacement de l'onde (s)

Ainsi, on peut étudier une onde de deux façons :

- 1) Étudier la forme de la corde  $y(x)$  à un moment  $t$  donné ( $t = \text{constante}$ )
- 2) Étudier l'évolution d'un bout de corde  $y(t)$  d'étiquette  $x$  ( $x = \text{constante}$ )



Nous démontrerons dans les pages suivantes que l'on peut représenter mathématiquement une onde sinusoïdale progressive à l'aide de l'expression

$$y(x,t) = A \sin(kx \pm \omega t + \phi)$$

où  $k$  représente le **nombre d'onde** responsable de la forme de l'onde et  $\omega$  représente la **fréquence angulaire** conjointement responsable avec  $k$  à la vitesse de propagation de l'onde. La valeur de la fréquence angulaire est déterminée par la fréquence  $f$  de l'oscillateur responsable de la création de l'onde.

# Le nombre d'onde

Le **nombre d'onde**  $k$  est le paramètre qui représente une conversion pour transformer une position sur l'axe  $x$  en radian dans la fonction sinus de la fonction d'onde. C'est ce qui donne la forme de l'onde :

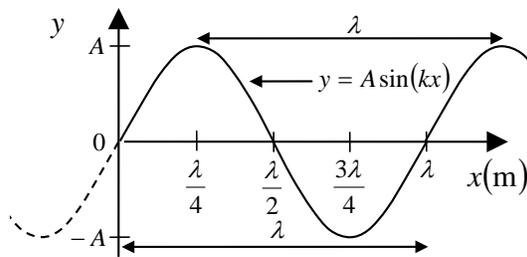
$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

où  $k$  : Nombre d'onde (rad/m)

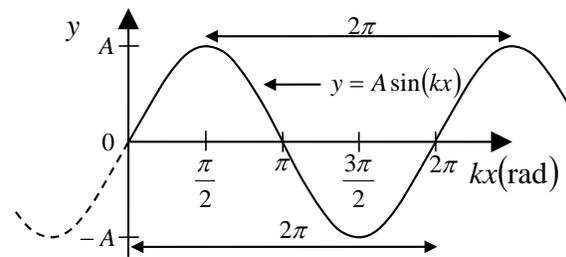
$2\pi$  : Cycle complet en radian de la fonction sinus de l'onde (rad)

$\lambda$  : Cycle complet spatial de l'onde (m)

y en fonction de x :



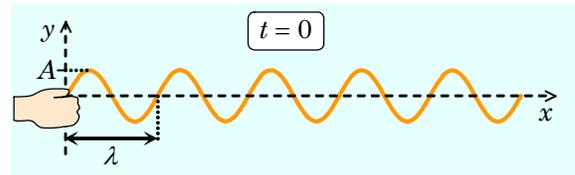
y en fonction de kx :



Preuve :

Soit une onde sinusoïdale progressive à  $t = 0$  représentée par le schéma ci-contre où  $\phi = 0$  ce qui donne l'équation

$$y(x,0) = A \sin(kx).$$



Nous pouvons établir la table de correspondance suivante à partir de  $x = 0$  lorsque  $y = 0$  pour chaque cycle de sinus complété :

Nombre de cycles complétés	0	1	2	3	...	$N$
Nombre de radian complété dans la fonction sinus (rad)	0	$2\pi$	$4\pi$	$6\pi$	...	$2\pi N$
Position $x$ de l'élément de corde (m)	0	$\lambda$	$2\lambda$	$3\lambda$	...	$N\lambda$

Puisque le produit  $kx$  représente le nombre de radians complétés dans la fonction sinus, nous pouvons établir la relation suivante entre la constante  $k$  et la longueur d'onde  $\lambda$  à partir du tableau précédent :

$$kx = nb \text{ radian} \quad \Rightarrow \quad k(N\lambda) = 2\pi N \quad (\text{Relation entre } x \text{ et nb radian})$$

$$\Rightarrow \quad k\lambda = 2\pi \quad (\text{Relation cycle spatial et cycle en radian})$$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \blacksquare \quad (\text{Isoler } \lambda)$$

# La fonction d'onde sinusoïdale progressive à une dimension

Une onde sinusoïdale produite par un mouvement harmonique simple périodique  $T$  et d'amplitude  $A$  dans un milieu propageant l'onde à une vitesse  $v$  peut s'écrire des deux façons suivantes :

$$y(x, t) = A \sin(kx \pm \omega t + \phi)$$

$$y(x, t) = A \sin[k(x \pm vt) + \phi]$$

où  $y$  : Position d'un élément  $x$  du milieu par rapport à son point d'équilibre (m)

$x$  : Étiquette d'un élément du milieu (m)

$t$  : Temps écoulé dans la propagation de l'onde (s)

$A$  : Amplitude de l'onde (m)

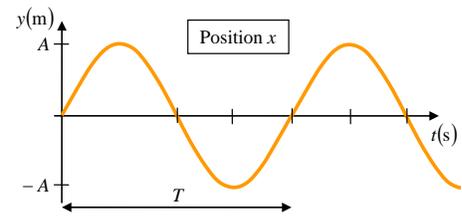
$\phi$  : Constante de phase (rad)

$k$  : Nombre d'onde (rad/m) ( $k = 2\pi / \lambda$ )

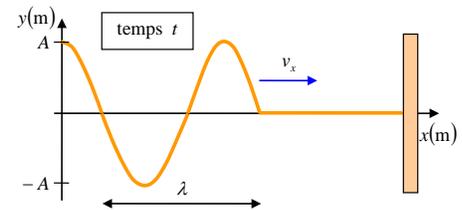
$\omega$  : Fréquence angulaire du mouvement harmonique (rad/s) ( $\omega = 2\pi / T$ )

$v$  : Vitesse de l'onde dans le milieu (m/s) ( $v = \lambda / T = \omega / k$ )

$\pm$  : Sens du déplacement de l'onde selon l'axe  $x$



Étiquette  $x$  fixée ce qui donne une fonction  $y(t)$  (un bout de corde  $x$ )



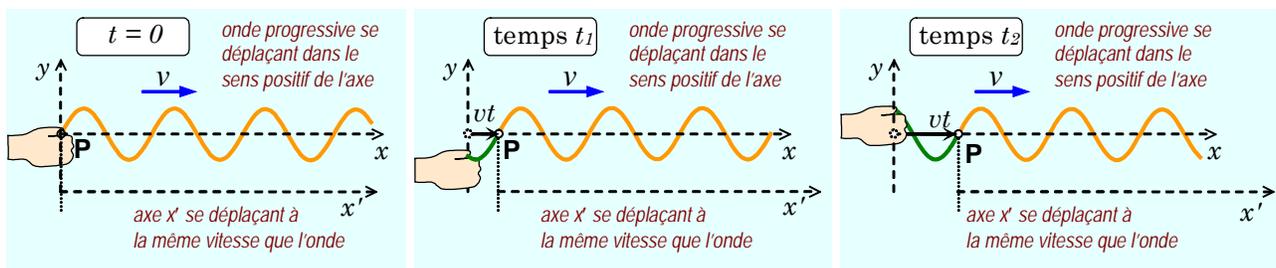
Temps  $t$  fixé ce qui donne une fonction  $y(x)$  (toute la corde)

**Convention :** Vitesse dans le sens positif de l'axe  $x$  (-)  
Vitesse dans le sens négatif de l'axe  $x$  (+)

**Preuve :**

Lorsqu'une onde se déplace à vitesse  $v$  dans le sens positif d'un axe  $x$ , on peut la représenter de deux façons :

- L'onde « glisse » le long de l'axe  $x$  à vitesse  $v$ .
- L'onde est immobile par rapport à un axe  $x'$  qui lui se déplace à vitesse  $v$  par rapport à l'axe  $x$ .



Puisque l'onde est immobile par rapport à l'axe  $x'$ , l'onde peut être représentée par l'équation

$$y(x', t) = A \sin(kx' + \phi)$$

dans le système d'axe  $x'$ .

Puisqu'on désire introduire la notion de vitesse  $v$  de l'onde dans notre équation et que l'on veut utiliser l'axe  $x$  pour positionner un élément du milieu déplacé par le passage de l'onde, nous devons établir une relation entre  $x$  et  $x'$  correspondant à une **transformation de Galilée**<sup>1</sup>

$$x = x' + vt$$

ce qui donne le changement de variable

$$x' = x - vt$$

Remplaçons  $x'$  dans la fonction  $y(x', t) = A \sin(kx')$  afin de transformer notre fonction d'onde  $y(x', t)$  en  $y(x, t)$  ce qui donne

$$y(x, t) = A \sin[k(x - vt) + \phi] \quad \blacksquare (1)$$

En distribuant le nombre d'onde  $k$  dans l'équation, nous obtenons la 2<sup>ème</sup> représente de l'onde progressive :

$$\begin{aligned} y(x, t) = A \sin[k(x - vt) + \phi] &\Rightarrow y(x, t) = A \sin(kx - kvt + \phi) && \text{(Distribuer } k) \\ &\Rightarrow y(x, t) = A \sin\left(kx - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)vt + \phi\right) && \text{(Remplacer } k = 2\pi / \lambda) \\ &\Rightarrow y(x, t) = A \sin\left(kx - \frac{2\pi}{vT}vt + \phi\right) && \text{(Remplacer } \lambda = vT) \\ &\Rightarrow y(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi) && \text{(Simplifier } v \text{ et } \omega = 2\pi / T) \end{aligned}$$

Lorsque l'onde se déplace dans le sens négatif de l'axe  $x$ , nous devons utiliser la transformation de Galilée est  $x = x' - vt$  ce qui nous donne la fonction d'onde

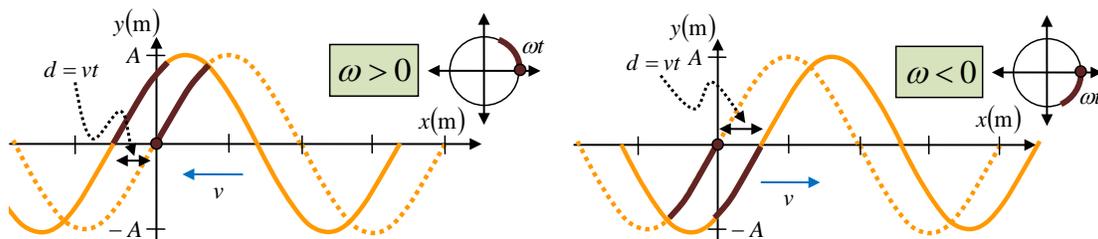
$$y(x, t) = A \sin(kx + \omega t + \phi) \quad \blacksquare (2)$$

(Onde sens négatif de l'axe  $x$ )

## Les déphasages dans la fonction d'onde

Le **déphasage spatial**  $kx$  permet de donner la **forme** à l'onde le long de l'axe  $x$ . C'est ce paramètre qui dépend de la **longueur d'onde**  $\lambda$ .

Le **déphasage temporel**  $\omega t$  permet de **déplacer** le long de l'axe  $x$  la forme de l'onde selon  $d = vt$  qui dépend de la **vitesse** de propagation de l'onde et du **temps écoulé**. C'est ce paramètre qui dépend de la **période**  $T$ .



Le **déphasage initial**  $\phi$  permet de **déplacer** l'onde le long de l'axe  $x$  selon les **conditions initiales**. Ce paramètre s'ajuste afin de satisfaire  $y(x, t)$  et  $v_y(x, t)$  à  $x = 0$  et  $t = 0$ .

<sup>1</sup> La transformation de Galilée sera étudiée plus en profondeur à la au chapitre 4.0a  
Référence : Marc Séguin, Physique XXI Tome C  
Note de cours rédigée par : Simon Vézina

**Situation 1 : De l'équation au graphique.** Une onde sinusoïdale progressive est décrite par l'équation

$$y = 0,3 \sin(0,698x + 3,49t)$$

où  $x$  et  $y$  sont en mètres et  $t$  est en secondes. On désire déterminer (a) l'amplitude; (b) la longueur d'onde; (c) la période; (d) le module de la vitesse et (e) le sens de propagation de l'onde. On désire également dessiner la corde (pour  $0 < x < 20$  m) (f) à  $t = 0$  et (g) à  $t = T/4$  (où  $T$  est la période).

Notre onde sinusoïde progressive possède la forme suivante :

$$y = A \sin(kx + \omega t)$$

a) À partir de l'analyse de la fonction, nous avons une amplitude est égale à :

$$A = 0,3 \text{ m}$$

b) À partir de la relation entre le nombre d'onde et la longueur d'onde, nous avons :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{(0,698)} \Rightarrow \lambda = 9 \text{ m}$$

c) À partir de la relation entre la fréquence angulaire et la période, nous avons :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{(3,49)} \Rightarrow T = 1,8 \text{ s}$$

d) À partir de la relation entre la longueur d'onde, la période et la vitesse, nous avons :

$$\lambda = vT \Rightarrow v = \frac{\lambda}{T} = \frac{(9)}{(1,8)} \Rightarrow v = 5 \text{ m/s}$$

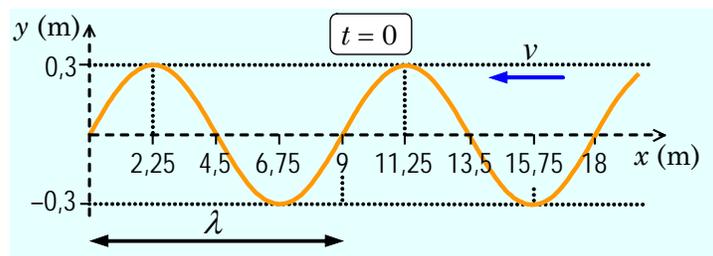
e) Puisque le terme du déphasage temporel est positif, l'onde se déplace dans le **sens négatif** de l'**axe  $x$** .

f) Voici la forme de l'onde entre  $0 \leq x \leq 20$  à  $t = 0$  s :

• La fonction d'onde :  $y = 0,3 \sin(0,698x + 3,49(0)) \Rightarrow y = 0,3 \sin(0,698x)$

•  $\frac{1}{4}$  de  $\lambda$  :  $\lambda_{\frac{1}{4}} = \lambda / 4 = (9) / 4 = 2,25 \text{ m} \Rightarrow \lambda_{\frac{1}{4}} = 2,25 \text{ m}$

Puisque nous n'avons aucun déphasage  $\phi$ , nous avons un sinus non déplacé :



g) Voici la forme de l'onde entre  $0 \leq x \leq 20$  à  $t = T/4 = 0,45$  s :

- La fonction d'onde :  $y = 0,3 \sin(0,698x + 3,49(0,45)) \Rightarrow y = 0,3 \sin(0,698x + \pi/2)$
- $\frac{1}{4}$  de  $\lambda$  : *même calcul*  $\Rightarrow \lambda_{\frac{1}{4}} = 2,25$  m

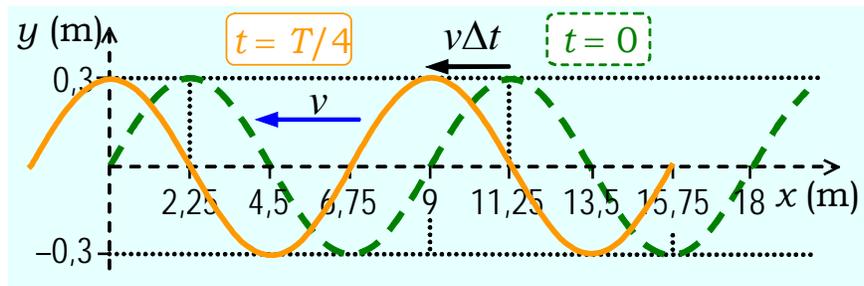
Puisque la fonction d'onde possède un déphasage  $\phi = \pi/2$ , il faut la déplacer spatialement d'un facteur équivalent à  $\pi/2$  radian vers gauche<sup>2</sup>. Utilisons la relation du nombre d'onde ( $k\lambda = 2\pi$ ) pour mesurer le déplacement selon l'axe  $x$  :

$$\begin{aligned}
 k\lambda = 2\pi &\Rightarrow kx = \phi && \text{(Évaluer un déplacement de } \phi) \\
 &\Rightarrow (0,698)x = (\pi/2) && \text{(Remplacer } k \text{ et } \phi) \\
 &\Rightarrow x = 2,25 \text{ m} && \text{(Évaluer } x)
 \end{aligned}$$

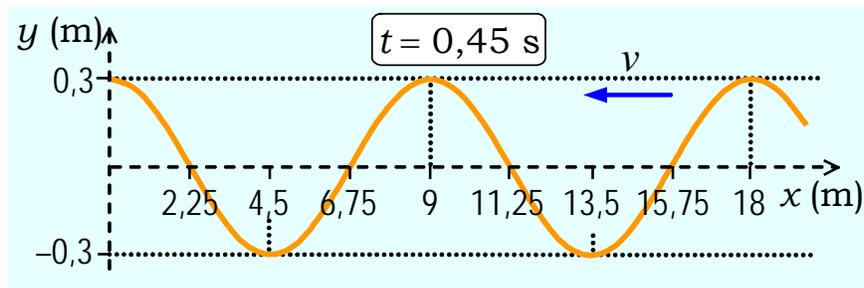
On peut également utiliser la vitesse de l'onde et le temps écoulé pour mesurer le déplacement de l'onde à l'aide d'une équation de la cinématique :

$$\begin{aligned}
 x = vt &\Rightarrow x = (5)(0,45) && \text{(Remplacer } v \text{ et } t) \\
 &\Rightarrow x = 2,25 \text{ m} && \text{(Évaluer } x)
 \end{aligned}$$

Représentation du déplacement de l'onde :

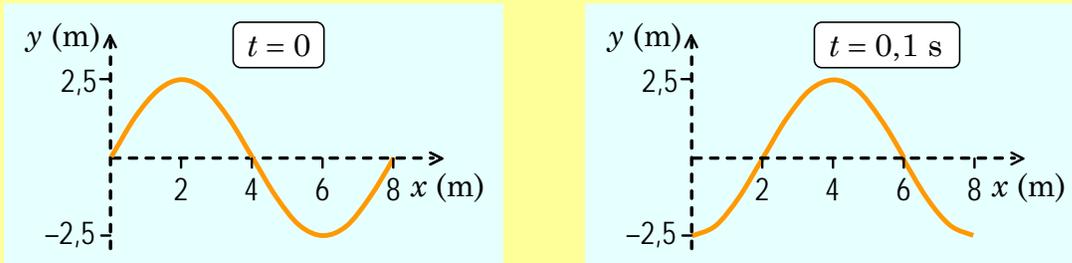


Voici la représentation de l'onde finale :



<sup>2</sup> Rappel :  $\phi > 0$  (déplacement vers la gauche),  $\phi < 0$  (déplacement vers la droite)

Situation 2: La fonction d'une onde sinusoïdale à partir de deux photos de la corde. En photographiant une onde sinusoïdale progressive se déplaçant sur une corde, on a obtenu les deux schémas ci-dessous (pour  $t = 0$ , à gauche, et pour  $t = 0,1$  s, à droite). On désire déterminer la fonction  $y(x,t)$  qui représente cette onde, en supposant que (a) l'onde possède la plus petite vitesse possible dans le sens positif de l'axe  $x$ ; (b) l'onde possède la plus petite vitesse possible dans le sens négatif de l'axe  $x$ .



Selon le graphique  $y(x)$  à  $t = 0$  s, nous pouvons évaluer la longueur d'onde de l'onde et l'amplitude maximale du mouvement :

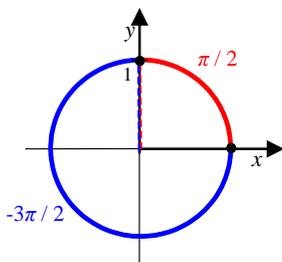
Longueur d'onde :  $\lambda = 8$  m      Amplitude maximale :  $A = 2,5$  m

Nous pouvons maintenant évaluer le nombre d'onde  $k$  :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2\pi}{(8)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k = \frac{\pi}{4} \text{ rad/m}}$$

Évaluer notre constante de phase  $\phi$  à l'aide du graphique  $y(x)$  à  $t = 0$  s et prenons le point  $(x = 2 \text{ m}, t = 0, y = 2,5 \text{ m})$  :

$$y = A \sin(kx \pm \omega t + \phi) \quad \Rightarrow \quad (2,5) = (2,5) \sin\left(\left(\frac{\pi}{4}\right)(2) \pm \omega(0) + \phi\right)$$



$$\Rightarrow 1 = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} + \phi = \arcsin(1)$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} + \phi = \{\dots, -3\pi/2, \pi/2, 5\pi/2, \dots\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi = 0} \text{ (en prenant la solution } \pi/2 \text{)}$$

Ceci nous donne l'équation temporaire

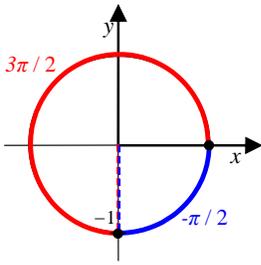
$$y = 2,5 \sin\left(\frac{\pi}{4} x \pm \omega t\right) .$$

Afin de répondre à la question **(a)** et **(b)**, remplaçons le point  $(x = 0 \text{ m}, t = 0,1 \text{ s}, y = -2,5 \text{ m})$  dans notre équation

$$y = 2,5 \sin\left(\frac{\pi}{4}x + \omega t\right)$$

où le signe  $\pm$  a été fixé à positif afin qu'il soit précisé dans le calcul de  $\omega$  et isolons la fréquence angulaire  $\omega$  qui aura de multiples résultats :

$$y = 2,5 \sin\left(\frac{\pi}{4}x + \omega t\right) \Rightarrow (-2,5) = (2,5) \sin\left(\frac{\pi}{4}(0) + \omega(0,1)\right)$$



$$\Rightarrow -1 = \sin(0,1\omega)$$

$$\Rightarrow 0,1\omega = \sin^{-1}(-1)$$

$$\Rightarrow 0,1\omega = \{\dots, -\pi/2, 3\pi/2, \dots\}$$

Si l'on choisit la solution  $-\pi/2$ , alors nous obtenons la plus petite une fréquence angulaire  $\omega$  négative correspondant à un déplacement de l'onde dans le sens positif de l'axe  $x$  :

$$0,1\omega = -\pi/2 \Rightarrow \omega = \frac{-\pi/2}{0,1} \Rightarrow \boxed{\omega = -5\pi \text{ rad/s}}$$

Ainsi, nous obtenons l'équation

$$y(x, t) = 2,5 \sin\left(\frac{\pi}{4}x - 5\pi t\right) \quad \text{(a)}$$

Dans ce cas, le module de la vitesse de l'onde sera

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{(5\pi)}{(\pi/4)} = 20 \text{ m/s}$$

ce qui a permis à l'onde de se déplacer dans le sens positif de l'axe (droite) de 2 m en 0,1 s.

Si l'on choisit la solution  $3\pi/2$ , alors nous obtenons la plus petite une fréquence angulaire  $\omega$  positive correspondant à un déplacement de l'onde dans le sens négatif de l'axe  $x$  :

$$0,1\omega = 3\pi/2 \Rightarrow \omega = \frac{3\pi/2}{0,1} \Rightarrow \boxed{\omega = 15\pi \text{ rad/s}}$$

Ainsi, nous obtenons l'équation

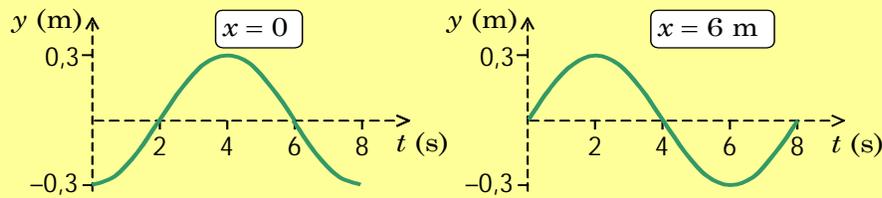
$$y(x, t) = 2,5 \sin\left(\frac{\pi}{4}x + 15\pi t\right) \quad \text{(b)}$$

Dans ce cas, le module de la vitesse de l'onde sera

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{(15\pi)}{(\pi/4)} = 60 \text{ m/s}$$

ce qui a permis à l'onde de se déplacer dans le sens négatif de l'axe (gauche) de 6 m en 0,1 s.

**Situation 3: La fonction à partir du MHS de deux points sur la corde.** Une onde sinusoïdale progressive se déplace sur une corde avec une vitesse dont le module est égal à 3 m/s. Les schémas ci-dessous représentent la position  $y$  en fonction du temps des points situés en  $x = 0$  et en  $x = 6$  m sur la corde. On désire déterminer la fonction  $y(x,t)$  qui représente cette onde.



À partir du graphique  $x = 0$  et  $x = 6$ , on réalise que la période d'oscillation d'un bout de corde est égale à  $T = 8$  s et que l'amplitude maximale est égale à  $A = 0,3$  m. Avec la vitesse de l'onde, on peut évaluer la fréquence angulaire, la longueur d'onde et le nombre d'onde associé à l'onde :

- $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{(8)} \Rightarrow \boxed{\omega = 0,785 \text{ rad/s}}$
- $\lambda = vT \Rightarrow \lambda = (3)(8) \Rightarrow \boxed{\lambda = 24 \text{ m}}$
- $k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow k = \frac{2\pi}{(24)} \Rightarrow \boxed{k = 0,262 \text{ rad/m}}$

Puisque nous ne savons pas dans quel sens se déplace l'onde, nous pouvons affirmer que l'onde aura la forme suivante :

$$y = A \sin(kx \pm \omega t + \phi) \Rightarrow y = 0,3 \sin(0,262x \pm 0,785t + \phi)$$

À partir du graphique  $x = 0$ , nous pouvons utiliser le point  $y = -0,3$  à  $t = 0$  et évaluer la constante de phase :

$$y = A \sin(0,262x \pm 0,785t + \phi) \Rightarrow (-0,3) = (0,3) \sin(0,262(0) \pm 0,785(0) + \phi) \quad (\text{Remplacer})$$

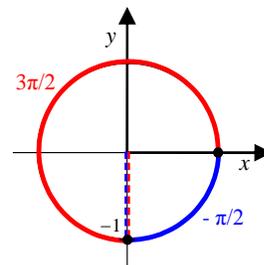
$$\Rightarrow -1 = \sin(\phi)$$

Nous pouvons obtenir les constantes de phase admissibles :

$$-1 = \sin(\phi) \Rightarrow \phi = \sin^{-1}(-1)$$

$$\Rightarrow \phi = \left\{ \dots, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots \right\}$$

P.S. Calculatrice :  $\phi = -\pi/2$  rad



Puisqu'il n'y a qu'un seul point sur le cercle trigonométrique correspondant à notre fonction arcsinus, tous les angles sont équivalents. Prenons l'angle positif. Ainsi :

$$y = 0,3 \sin(0,262x \pm 0,785t + 3\pi/2) \quad (\text{sens à déterminer})$$

À partir du graphique  $x = 6$ , nous pouvons utiliser le point  $y = 0,3$  à  $t = 2$  puis évaluer notre fonction d'onde afin de choisir entre une onde se déplaçant dans le sens positif ou négatif de l'axe  $x$  :

$$\text{Sens positif de l'axe } x : \quad (0,3) = 0,3 \sin(0,262(6) - 0,785(2) + 3\pi / 2)$$

$$\Rightarrow 0,3 = 0,3 \sin(4,712)$$

$$\Rightarrow \boxed{0,3 \neq -0,3}$$

$$\text{Sens négatif de l'axe } x : \quad (0,3) = 0,3 \sin(0,262(6) + 0,785(2) + 3\pi / 2)$$

$$\Rightarrow 0,3 = 0,3 \sin(7,854)$$

$$\Rightarrow \boxed{0,3 = 0,3}$$

Ainsi, l'onde se déplace dans le sens négatif de l'axe  $x$  ce qui donne l'équation d'onde suivante :

$$\boxed{y = 0,3 \sin(0,262x + 0,785t + 3\pi / 2)}$$













# Chapitre 1.9b – Les ondes sinusoidales progressives : notions complémentaires

## Le mouvement d'un élément du milieu

Lorsqu'une onde voyage dans un milieu, la **fonction d'onde** nous permet d'étudier la **position** dans le **temps** d'un **élément**  $x$  particulier du milieu par rapport à une **position d'équilibre**.

Lorsqu'une onde transversale voyage dans une corde, la fonction d'onde  $y = A \sin(kx \pm \omega t + \phi)$  nous permet d'étudier la position verticale d'un élément de corde  $x$  à un temps  $t$  donné. Puisque la fonction d'onde est une fonction de positionnement, on peut la dériver et obtenir la vitesse verticale  $v_y(x, t)$  et l'accélération verticale  $a_y(x, t)$  de l'élément de corde  $x$  à un temps  $t$  :

$$y_P = A \sin(kx_P \pm \omega t + \phi) \quad (\text{Position d'un élément } x_P)$$

$$v_{yP} = \frac{d y_P}{d t} = \pm A \omega \cos(kx_P \pm \omega t + \phi) \quad (\text{Vitesse}^1 \text{ d'un élément } x_P)$$

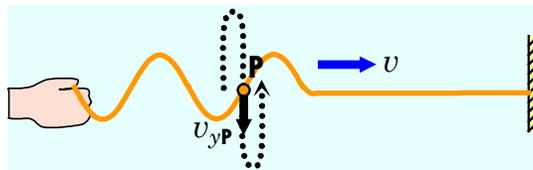
$$a_{yP} = \frac{d v_{yP}}{d t} = -A \omega^2 \sin(kx_P \pm \omega t + \phi) \quad (\text{Accélération d'un élément } x_P)$$

**P.S.** La variable  $x$  n'est pas une variable pouvant varier dans le temps ( $dx/dt = 0$ ) puisque ce n'est qu'une étiquette désignant le choix de la particule P en étude.

Schéma :

$v$  : Vitesse de propagation de l'onde

$v_{yP}$  : Vitesse de l'élément P de la corde



Rappel :

- Vitesse de propagation d'une onde transversale dans un corde :  $v = \sqrt{F / \mu}$
- Vitesse de propagation d'une onde sonore (longitudinale) dans l'air :  $v_s = \sqrt{\gamma P / \rho}$

<sup>1</sup> Le symbole  $\pm$  dépend du sens de propagation de l'onde déterminé par  $\pm\omega$ .

**Situation 4 : La vitesse et l'accélération d'une particule de la corde.** Une onde sinusoïdale progressive décrit par la fonction

$$y = 0,4 \sin(4x - 5t + 1)$$

se déplace sur une corde ( $x$  et  $y$  sont en mètres,  $t$  est en secondes et la phase est en radians). On s'intéresse à la particule **P** de la corde située à la position  $x = 0,5$  m. On désire déterminer **(a)** les fonctions qui donnent la position, la vitesse et l'accélération selon l'axe  $y$  de la particule en fonction du temps ; **(b)** la position, la vitesse et l'accélération selon  $y$  de la particule à  $t = 3$  s ; **(c)** le module de la vitesse de propagation de l'onde sur la corde.

Évaluons les expressions de la position, la vitesse et l'accélération selon l'axe  $y$  pour une particule  $x$  quelconque :

- Position :  $y = 0,4 \sin(4x - 5t + 1)$
- Vitesse :  $v_y = \frac{dy}{dt} \Rightarrow v_y = \frac{d}{dt}(0,4 \sin(4x - 5t + 1))$   
 $\Rightarrow v_y = 0,4 \cos(4x - 5t + 1) \frac{d}{dt}(4x - 5t + 1)$   
 $\Rightarrow v_y = 0,4 \cos(4x - 5t + 1)(-5)$   
 $\Rightarrow v_y = -2 \cos(4x - 5t + 1)$
- Accélération :  $a_y = \frac{dv_y}{dt} \Rightarrow a_y = \frac{d}{dt}(-2 \cos(4x - 5t + 1))$   
 $\Rightarrow a_y = 2 \sin(4x - 5t + 1) \frac{d}{dt}(4x - 5t + 1)$   
 $\Rightarrow a_y = 2 \sin(4x - 5t + 1)(-5)$   
 $\Rightarrow a_y = -10 \sin(4x - 5t + 1)$

**(a)** Évaluons les expressions de la position, la vitesse et l'accélération selon l'axe  $y$  pour une particule  $x = 0,5$  m :

- Position :  $y(x = 0,5) = 0,4 \sin(4(0,5) - 5t + 1) \Rightarrow y(x = 0,5) = 0,4 \sin(2 - 5t + 1)$
- Vitesse :  $v_y(x = 0,5) = -2 \cos(4(0,5) - 5t + 1) \Rightarrow v_y(x = 0,5) = -2 \cos(2 - 5t + 1)$
- Accélération :  $a_y(x = 0,5) = -10 \sin(4(0,5) - 5t + 1) \Rightarrow a_y(x = 0,5) = -10 \sin(2 - 5t + 1)$

(b) Évaluons la position, la vitesse et l'accélération selon l'axe y de la particule  $x = 0,5$  m à  $t = 3$  s :

➤ Position :  $y(x = 0,5, t = 3) = 0,4 \sin(2 - 5(3) + 1)$

⇒  $y(x = 0,5, t = 3) = 0,4 \sin(-12)$

⇒  $y(x = 0,5, t = 3) = 0,2146 \text{ m}$

➤ Vitesse :  $v_y(x = 0,5, t = 3) = -2 \cos(2 - 5(3) + 1)$

⇒  $v_y(x = 0,5, t = 3) = -2 \cos(-12)$

⇒  $v_y(x = 0,5, t = 3) = -1,688 \text{ m/s}$

➤ Accélération :  $a_y(x = 0,5, t = 3) = -10 \sin(2 - 5(3) + 1)$

⇒  $a_y(x = 0,5, t = 3) = -10 \sin(-12)$

⇒  $a_y(x = 0,5, t = 3) = -5,366 \text{ m/s}^2$

(c) Évaluons la vitesse de propagation de l'onde sur la corde :

$\lambda = vT$  ⇒  $\left(\frac{2\pi}{k}\right) = v\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)$  (Remplacer  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  et  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ )

⇒  $v = \frac{\omega}{k}$  (Isoler  $v$ )

⇒  $v = \frac{(5)}{(4)}$  (Remplacer valeurs numériques)

⇒  $v = 1,25 \text{ m/s}$  (Évaluer  $v$ )











# Chapitre 1.9c – L'équation d'onde

## L'équation d'onde

En 1747, le physicien français Jean le Rond d'Alembert obtient une équation différentielle, l'équation d'onde (ou équation de d'Alembert) dont la solution est une fonction d'onde (onde voyageant dans un milieu à vitesse  $v$ ). Dans le cas d'une corde tendue parfaitement élastique oscillant avec des petites oscillations verticales, cette équation est déterminée à partir de la 2<sup>ème</sup> loi de Newton appliquée sur chaque élément de corde  $x$  dans le temps  $t$ . Le milieu dans lequel l'onde voyage est alors la corde :



([http://fr.wikipedia.org/wiki/Fichier:Jean\\_d'Alembert.jpeg](http://fr.wikipedia.org/wiki/Fichier:Jean_d'Alembert.jpeg))  
Jean le Rond d'Alembert  
(1717-1783)

Équation d'onde à une dimension<sup>1</sup> :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = v^2 \frac{d^2 y}{dx^2}$$

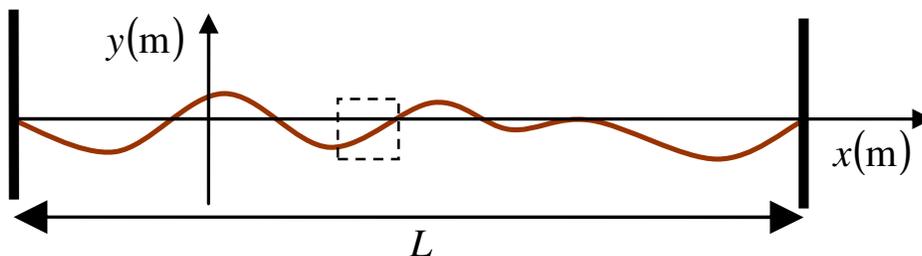
- où
- $y$  : Onde définissant la position par rapport au point d'équilibre d'un élément de milieu situé à la coordonnée  $x$  à un temps  $t$  (m). ( $y = y(x, t)$ )
  - $x$  : Coordonnée selon l'axe  $x$  d'un élément du milieu (m).
  - $t$  : Temps (s)
  - $v$  : Vitesse de propagation de l'onde selon l'axe  $x$  (m/s)

Preuve : (corde tendue oscillant à la verticale à faible amplitude)

Considérons une corde homogène tendue fixée aux deux extrémités de longueur  $L$  ayant une masse  $M$ . Sans perturbation, chaque élément  $x$  de la corde peut être positionné par l'équation du mouvement suivante :

$$y(x, t) = 0 \quad (\text{corde horizontale})$$

Appliquons maintenant une perturbation sur la corde afin qu'elle oscille. Voici une représentation possible de la corde pour un instant  $t$  donné selon l'axe horizontale  $x$  et selon l'axe verticale  $y$  :



Après une perturbation, la corde n'est plus à l'équilibre et chaque élément  $x$  de la corde est potentiellement déplacé par rapport à son point d'équilibre :

$$y(x, t) \neq 0 \quad (\text{corde en oscillation})$$

<sup>1</sup> On retrouve également l'équation d'onde écrite sous la forme suivante :  $\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{v^2} \frac{d^2 y}{dt^2} = 0$

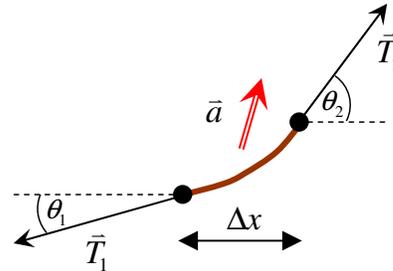
Puisque la corde est homogène, on peut définir une masse linéique  $\mu$  associée à la corde de la façon suivante :  $\mu = M / L$ . Appliquons la 2<sup>ème</sup> loi de Newton à un petit élément de corde de masse  $m$  et de longueur  $\Delta x$ . Puisque les tensions en jeu sont beaucoup plus grandes que la force gravitationnelle, nous allons négliger la force gravitationnelle:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = m\vec{a} \quad (\text{Remplacer } \vec{F})$$

$$\Rightarrow \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \mu \Delta x \vec{a} \quad (\text{Remplacer } m = \mu \Delta x)$$

Schéma des forces d'un petit élément de corde  $\Delta x$  :



Appliquons l'approximation des oscillations de faibles amplitudes. Ceci nous permet de supposer que la corde n'est pas étirée (la longueur de la corde est  $L$  en tout temps) et que la tension  $T$  dans la corde est constante. De plus, nous pouvons supposer que les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont beaucoup plus petit que 1 radian et que la différence entre  $\theta_1$  et  $\theta_2$  est encore beaucoup plus petit que 1 radian. Mathématiquement, l'approximation des oscillations de faibles amplitudes se résume à ceci :

Tension constante :  $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$

Petit angle :  $\theta_1 = \theta$  et  $\theta_2 = \theta + \Delta\theta$  où  $\theta \ll 1$  ,  $\Delta\theta \ll \ll 1$

Appliquons maintenant la 2<sup>ème</sup> loi de Newton selon l'axe  $x$  et selon l'axe  $y$  :

$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow T_1 \cos \theta_2 - T_2 \cos \theta_1 = \mu \Delta x a_x \quad (\text{Décomposer en } x)$$

$$\Rightarrow T(\cos \theta_2 - \cos \theta_1) = \mu \Delta x a_x \quad (T_1 = T_2 = T \text{ et factoriser } T)$$

$$\Rightarrow \boxed{T(\cos(\theta + \Delta\theta) - \cos(\theta)) = \mu \Delta x a_x} \quad (\theta_1 = \theta, \theta_2 = \theta + \Delta\theta)$$

$$\sum F_y = ma_y \Rightarrow T_1 \sin \theta_2 - T_2 \sin \theta_1 = \mu \Delta x a_y \quad (\text{Décomposer en } y)$$

$$\Rightarrow T(\sin \theta_2 - \sin \theta_1) = \mu \Delta x a_y \quad (T_1 = T_2 = T \text{ et factoriser } T)$$

$$\Rightarrow \boxed{T(\sin(\theta + \Delta\theta) - \sin(\theta)) = \mu \Delta x a_y} \quad (\theta_1 = \theta, \theta_2 = \theta + \Delta\theta)$$

Puisque les angles en jeu sont beaucoup plus petites que 1 radian, nous pouvons appliquer les approximations suivantes à nos fonctions cosinus et sinus : ( $\theta \ll 1$ ,  $\Delta\theta \ll \ll 1$ )

sinus :  $\sin(\theta) \approx \theta$

$$\sin(\Delta\theta) \approx \Delta\theta$$

$$\sin(\theta + \Delta\theta) \approx \theta + \Delta\theta$$

cosinus :  $\cos(\theta) \approx 1$

$$\cos(\Delta\theta) \approx 1$$

$$\cos(\theta + \Delta\theta) \approx 1$$

Appliquons ces approximations à nos deux équations : ( $\sum F_x = ma_x$  et  $\sum F_y = ma_y$ )

$$T(\cos(\theta + \Delta\theta) - \cos(\theta)) = \mu \Delta x a_x \Rightarrow T((1) - (1)) = \mu \Delta x a_x \quad (\text{Approx. petits angles})$$

$$\Rightarrow 0 = \mu \Delta x a_x \quad (\text{Simplification})$$

$$\Rightarrow \boxed{a_x = 0} \quad (\text{Isoler } a_x)$$

$$T(\sin(\theta + \Delta\theta) - \sin(\theta)) = \mu \Delta x a_y \Rightarrow T((\theta + \Delta\theta) - (\theta)) = \mu \Delta x a_y \quad (\text{Approx. petits angles})$$

$$\Rightarrow T \Delta\theta = \mu \Delta x a_y \quad (\text{Simplification})$$

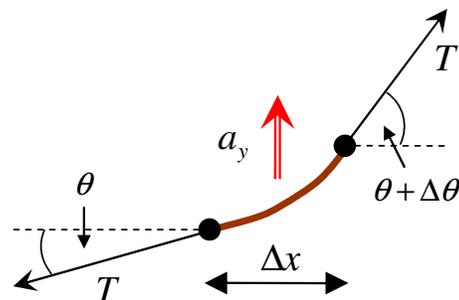
$$\Rightarrow \boxed{a_y = \frac{T \Delta\theta}{\mu \Delta x}} \quad (\text{Isoler } a_y)$$

On remarque qu'il n'y a pas d'accélération selon l'axe  $x$ . Ceci implique que l'élément de corde ne fait que bouger verticalement.

L'accélération  $a_y$  de l'élément de corde dépend de :

- La tension  $T$  dans la corde.
- La densité  $\mu$  de la corde.
- La courbure  $\Delta\theta/\Delta x$  de la corde.

Schéma après approximation :

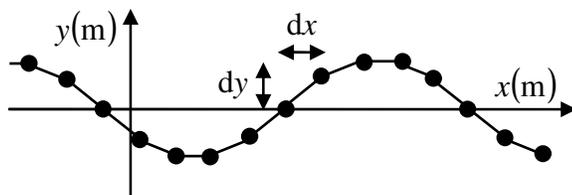


Nous pouvons également remarquer que le rapport entre la tension  $T$  et la densité  $\mu$  de la corde donne des unités de vitesse au carré ( $\text{m}^2/\text{s}^2$ ) :

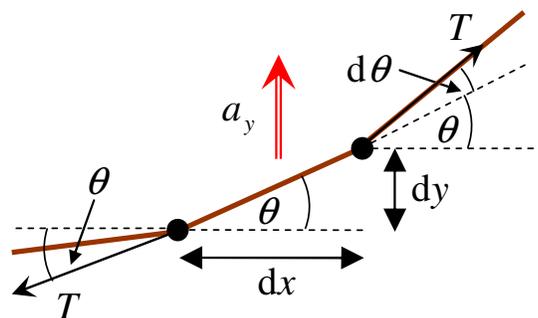
$$\left[ \frac{T}{\mu} \right] = \frac{\text{N}}{\text{kg/m}} = \frac{\text{kg m/s}^2}{\text{kg/m}} = \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = [v^2]$$

Avant de répondre à cette question, développons notre équation de l'accélération  $a_y$  d'un élément de corde. Pour ce faire, découpons notre corde en segments de droite infinitésimale de largeur  $dx$  et de hauteur  $dy$  :

Corde fractionnée en segment de droite infinitésimale :



2<sup>ième</sup> loi de Newton appliquée à un élément de corde infinitésimal  $dx$  :



Reprenons nos calculs appliqués à un élément de corde de largeur  $\Delta x$  et continuons notre démonstration avec la notation différentielle :

$$a_y = \frac{T \Delta\theta}{\mu \Delta x} \Rightarrow a_y = \frac{T d\theta}{\mu dx} \quad (\text{Notation différentielle : } \Delta \rightarrow d)$$

$$\Rightarrow a_y = \frac{T d(\tan \theta)}{\mu dx} \quad (\text{Approximation : } \tan \theta \approx \theta, \theta \ll 1)$$

$$\Rightarrow a_y = \frac{T d(dy/dx)}{\mu dx} \quad (\text{Remplacer } \tan \theta = dy/dx)$$

$$\Rightarrow a_y = \frac{T d^2 y}{\mu dx^2} \quad (\text{Dérivée 2}^{\text{ième}} : \frac{d(dy/dx)}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2})$$

$$\Rightarrow \frac{dv_y}{dt} = \frac{T d^2 y}{\mu dx^2} \quad (\text{Définition : } a_y = dv_y/dt)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{T d^2 y}{\mu dx^2} \quad (\text{Définition : } v_y = dy/dt)$$

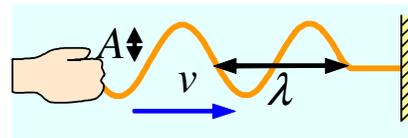
$$\Rightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} = v^2 \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \blacksquare \quad (\text{Remplacer } v^2 = T/\mu)$$

## La fonction d'onde

La fonction d'onde est la solution à l'équation d'onde. Dans le cas d'une corde tendue oscillant verticalement, la fonction d'onde a pour but de positionner chaque élément de corde  $x$  dans le temps  $t$  par rapport à un point d'équilibre. La **solution la plus simple**<sup>2</sup> à l'équation d'onde est l'**onde sinusoïdale progressive**  $y(x,t)$  :

$$y(x,t) = A \sin(kx \pm \omega t + \phi) \quad y(x,t) = A \sin(k(x \pm vt) + \phi)$$

- où
- $y$  : Position par rapport au point d'équilibre d'un élément  $x$  du milieu (m)
  - $x$  : Position d'un élément du milieu (m)
  - $t$  : Temps écoulé dans la propagation de l'onde (s)
  - $A$  : Amplitude de l'onde (m)
  - $k$  : Nombre d'onde (rad/m)
  - $\omega$  : Fréquence angulaire du mouvement harmonique (rad/s)
  - $v$  : Vitesse de l'onde dans le milieu (m/s)
  - $\phi$  : Constante de phase (rad)
  - $\lambda$  : Longueur d'onde de l'onde (m)
  - $\pm$  : Sens du déplacement de l'onde selon l'axe  $x$



$$(k = 2\pi / \lambda)$$

$$(\omega = 2\pi / T)$$

$$(v = \lambda / T = \omega / k)$$

$$(\lambda = vT)$$

**Convention :** Vitesse sens positif de l'axe  $x$  (-) Vitesse sens négatif de l'axe  $x$  (+)

<sup>2</sup> Une solution tout aussi valable pour une fonction d'onde prend la forme suivante :  $y(x',t) = y(x \pm vt, t)$

### Vérification :

Introduisons notre solution  $y(x,t) = A \sin(kx \pm \omega t + \phi)$  dans le **côté gauche** de notre équation différentielle :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{d^2}{dt^2} (A \sin(kx \pm \omega t + \phi)) && \text{(Côté gauche de l'équation d'onde)} \\ \Rightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} &= A \frac{d^2}{dt^2} (\sin(kx \pm \omega t + \phi)) && \text{(Factoriser la constante A)} \\ \Rightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} &= A(\pm \omega) \frac{d}{dt} (\cos(kx \pm \omega t + \phi)) && \text{(Dériver la fonction sinus par rapport à t)} \\ \Rightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} &= \pm A \omega (\pm \omega) (-\sin(kx \pm \omega t + \phi)) && \text{(Dériver la fonction cosinus par rapport à t)} \\ \Rightarrow \boxed{\frac{d^2 y}{dt^2} = -A \omega^2 \sin(kx \pm \omega t + \phi)} &&& \text{(Simplification de l'expression)} \end{aligned}$$

Introduisons notre solution  $y(x,t) = A \sin(kx \pm \omega t + \phi)$  dans le **côté droit** de notre équation différentielle :

$$\begin{aligned} v^2 \frac{d^2 y}{dx^2} &= v^2 \frac{d^2}{dx^2} (A \sin(kx \pm \omega t + \phi)) && \text{(Côté droit de l'équation d'onde)} \\ \Rightarrow v^2 \frac{d^2 y}{dx^2} &= v^2 A \frac{d^2}{dx^2} (\sin(kx \pm \omega t + \phi)) && \text{(Factoriser la constante A)} \\ \Rightarrow v^2 \frac{d^2 y}{dx^2} &= v^2 A(k) \frac{d}{dx} (\cos(kx \pm \omega t + \phi)) && \text{(Dériver la fonction sinus par rapport à x)} \\ \Rightarrow v^2 \frac{d^2 y}{dx^2} &= v^2 A k (k) (-\sin(kx \pm \omega t + \phi)) && \text{(Dériver la fonction cosinus par rapport à x)} \\ \Rightarrow v^2 \frac{d^2 y}{dx^2} &= -v^2 A k^2 \frac{\omega^2}{\omega^2} \sin(kx \pm \omega t + \phi) && \text{(Simplification et multiplier par } 1 = \omega^2 / \omega^2 \text{)} \\ \Rightarrow v^2 \frac{d^2 y}{dx^2} &= -v^2 A \frac{\omega^2}{v^2} \sin(kx \pm \omega t + \phi) && \text{(Remplacer } v = \omega / k \text{ donc } 1/v^2 = k^2 / \omega^2 \text{)} \\ \Rightarrow \boxed{v^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = -A \omega^2 \sin(kx \pm \omega t + \phi)} &&& \text{(Simplifier } v^2 \text{)} \end{aligned}$$

En comparant les deux côtés de l'équation après l'application des dérivées sur notre fonction  $y(x,t)$ , nous réalisons qu'il y a une égalité. Ainsi, nous pouvons conclure que la fonction  $y(x,t) = A \sin(kx \pm \omega t + \phi)$  est une solution de notre équation d'onde :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = v^2 \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \Rightarrow \quad -A \omega^2 \sin(kx \pm \omega t + \phi) = -A \omega^2 \sin(kx \pm \omega t + \phi) \quad \blacksquare$$

(avec  $y(x,t) = A \sin(kx \pm \omega t + \phi)$ )

## Une équation alternative à la fonction d'onde

Dans certaine situation, il est préférable d'exprimer l'équation de la fonction d'onde sous la forme suivante :

L'équation d'onde	Le mouvement harmonique simple
$\frac{d^2 y}{dt^2} - v^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$	$y(x, t) = a \cos(\omega t) \pm b \sin(\omega t)$ <p>où</p> $A = \sqrt{a^2 + b^2},$ $a = A \sin(\phi_x),$ $b = A \cos(\phi_x),$ $\phi_x = kx + \phi$ <p>et</p> $\phi = \begin{cases} \arctan(a/b) & \text{si } b > 0 \\ \arctan(a/b) + \pi & \text{si } b < 0 \end{cases}$

### Preuve :

À partir de la fonction d'onde exprimée à l'aide de la phase  $\phi$ , modifions cette expression en deux termes à l'aide de l'identité trigonométrique suivante :

$$\sin(\theta \pm \phi) = \sin(\theta) \cdot \cos(\phi) \pm \cos(\theta) \cdot \sin(\phi)$$

$$y = A \sin(kx \pm \omega t + \phi) \quad \text{(Fonction d'onde)}$$

$$\Rightarrow y = A \sin(kx + \phi \pm \omega t) \quad \text{(Réorganisation)}$$

$$\Rightarrow y = A \sin(\phi_x \pm \omega t) \quad \text{(Remplacer } \phi_x = kx + \phi)$$

$$\Rightarrow y = A(\sin(\phi_x) \cos(\omega t) \pm \cos(\phi_x) \sin(\omega t)) \quad \text{(Usage identité)}$$

$$\Rightarrow y = A \sin(\phi_x) \cos(\omega t) \pm A \cos(\phi_x) \sin(\omega t) \quad \text{(Distribution)}$$

$$\Rightarrow y = a \cos(\omega t) \pm b \sin(\omega t) \quad (a = A \sin(\phi_x) \text{ et } b = A \cos(\phi_x))$$



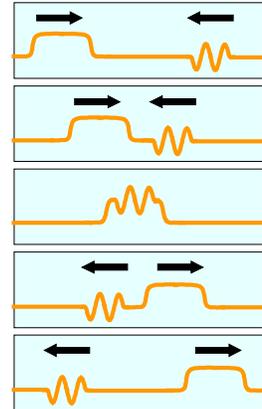


# Chapitre 1.11 – La réflexion, la transmission et la superposition des ondes

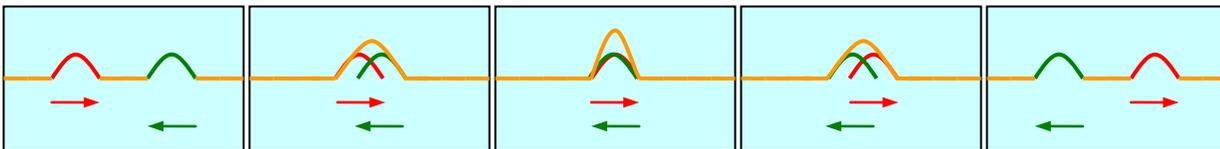
## Superposition linéaire

Lorsque plusieurs ondes voyagent à un même endroit dans un milieu, le milieu réagit simultanément à la présence des ondes en additionnant leur comportement. L'action d'**additionner** et de **soustraire** des ondes porte le nom de **superposition**.

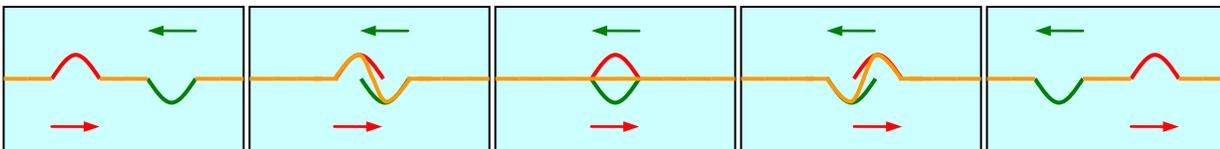
Il est important de réaliser qu'il n'y a **pas de transfert d'énergie** entre les ondes lors d'un contact. Les ondes continuent leur trajectoire et le milieu réagit à toutes les perturbations venant de chaque onde. Cette règle s'applique seulement si le **milieu** est **élastique** et peut localiser toute l'énergie des ondes à l'endroit où se produit la superposition (ex : corde élastique).



Superposition constructive : (Ondes additives)



Superposition destructive : (Ondes soustractives)



## Changement de milieu de propagation

Lorsqu'une onde voyageant dans un milieu rencontre un nouveau milieu différent, il se produit deux situations à l'interface :

- 1) Transmission : l'onde continue son déplacement dans le nouveau milieu.
- 2) Réflexion : l'onde change de direction et continue son déplacement dans son milieu d'origine.

Voici quelques caractéristiques des ondes réfléchies et transmises : ( $\lambda = vT$  et  $v = \sqrt{F/\mu}$ )

- ❖ Une onde réfléchie et transmise **conserve** sa **fréquence**  $f$  (ou période  $T$ ) d'origine, car la **fréquence** est une **caractéristique** de la **l'oscillateur** ayant produit l'onde et non du milieu qui propage l'onde.
- ❖ Une onde réfléchie conserve sa longueur d'onde  $\lambda$  et une onde transmise possède une longueur d'onde  $\lambda$  différente causée par le changement de densité du milieu  $\mu$ .

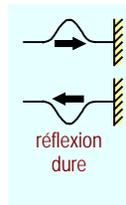
# Réflexion dure

Une **réflexion dure** se produit lorsqu'une onde voyageant dans un milieu rencontre un **nouveau milieu** de **densité supérieure**. Pour une corde, la réflexion dure est caractérisée par l'expression suivante :

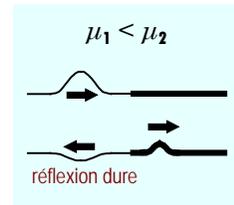
$$\mu_1 < \mu_2$$

( $\mu_1$  : milieu incident,  $\mu_2$  : milieu de transmission)

Corde attachée à un mur :



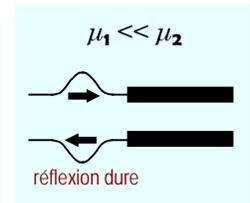
Corde attachée à une corde plus lourde :



Situation	Amplitude de l'impulsion produite	Vitesse de l'onde ( $v = \sqrt{F / \mu}$ )	Longueur d'onde ( $\lambda = vT$ )
Réflexion	Inversée	Non changée	Non changée
Transmission	Non inversée	Plus lente	Plus petite

Cas limite :  $\mu_1 \ll \mu_2$

Lorsque le milieu de transmission est **beaucoup plus dense** que le milieu incident, l'onde est **presque entièrement réfléchi**e et elle est **inversée**.



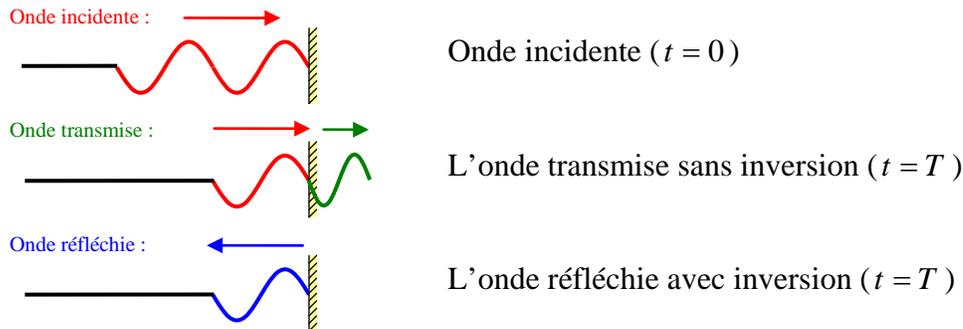
## La condition à la frontière d'une réflexion dure

Lors d'une réflexion dure, un élément du milieu est contraint à demeurer fixe à  $y = 0$  en tout temps. Par le principe de superposition linéaire, la conséquence de la réflexion est de créer une nouvelle onde voyageant dans le sens contraire avec une inversion par rapport à l'axe de transmission. Le milieu épousera la forme de l'addition des deux ondes en tout temps (voir exemple ci-dessous).

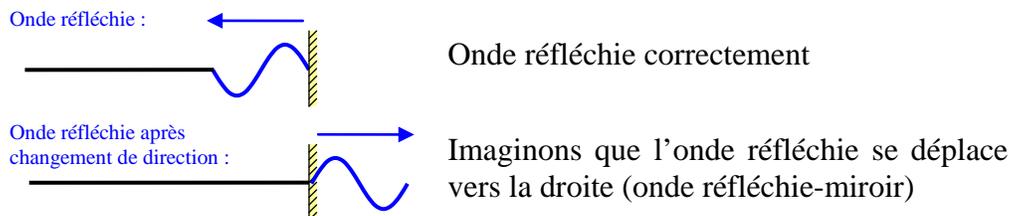
	Les ondes	Superposition linéaire
Avant la réflexion		
Au début de la réflexion		
À la fin de la réflexion		

## Réflexion dure et déphasage de $\pi$

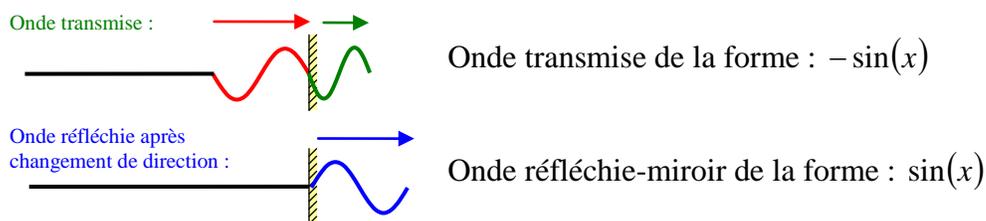
Mathématiquement, on peut exprimer une **onde réfléchie avec inversion** à l'aide de l'équation de l'onde incidente. Il suffit d'**ajouter un déphasage de  $\pi$**  à l'**onde incidente** et **inverser le signe de  $\omega$**  ce qui nous donne l'équation de l'onde réfléchie. Voici une représentation graphique d'une onde incidente qui subit une réflexion dure et une transmission sur une période complète  $T$  (l'onde incidente avance de  $\lambda$ ) :



Afin de mieux comparer l'onde réfléchie et l'onde transmise, effectuons une réflexion par rapport au mur de l'onde réfléchie ce qui permet de représenter cette onde se déplaçant vers la droite :



Même si l'onde réfléchie-miroir et l'onde transmise ne sont pas identiques ( $\lambda_{\text{transmise}} < \lambda_{\text{réfléchi}}$ ), ils possèdent quand même la même fréquence angulaire ( $\omega = 2\pi/T$  et  $T$  ne change pas). On remarque qu'ils possèdent une **différence de phase** égale à  $\pi$  :



**P.S.** Il y a une différence de phase de  $\pi$ , car :  $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$

**Conclusion :** Une **réflexion dure** implique une **réflexion avec inversion** qui se traduit **mathématiquement** par un **déphasage de  $\pi$**  par rapport à l'**onde incidente**.

Ex : onde incidente  $y = A \sin(kx - \omega t + \phi)$  et l'onde réfléchie  $y = A \sin(kx + \omega t + \phi + \pi)$ .

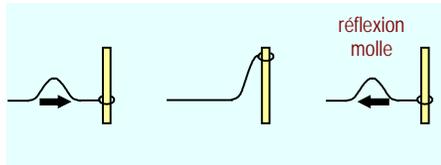
## Réflexion molle

Une réflexion molle se produit lorsqu'une onde voyageant dans un milieu rencontre un nouveau milieu de densité inférieure. Pour une corde, la réflexion molle est caractérisée par l'expression suivante :

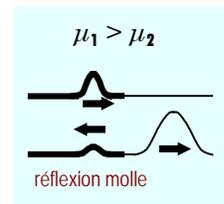
$$\mu_1 > \mu_2$$

( $\mu_1$  : milieu incident,  $\mu_2$  : milieu de transmission)

Corde attachée à un anneau libre vertical :



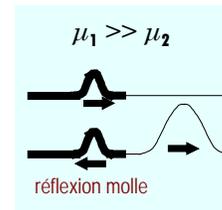
Corde attachée à une corde moins lourde :



Situation	Amplitude de l'impulsion produite	Vitesse de l'onde ( $v = \sqrt{F/\mu}$ )	Longueur d'onde ( $\lambda = vT$ )
Réflexion	Non inversée	Non changée	Non changée
Transmission	Non inversée	Plus rapide	Plus grande

Cas limite :  $\mu_1 \gg \mu_2$

Lorsque le milieu de transmission est **beaucoup moins dense** que le milieu incident, l'onde est **presque entièrement réfléchie** et elle n'est **pas inversée**.



N.B. On remarque sur le schéma ci-haut une onde transmise avec une grande amplitude, même s'il y a peu d'énergie transmise. Un milieu très peu dense n'a pas besoin de beaucoup d'énergie pour produire une onde de grande amplitude.

## Réflexion et déphasage

Mathématiquement, on peut représenter une onde ayant subi une réflexion dure ou une réflexion molle grâce à l'expression de l'onde incidente et d'un déphasage supplémentaire :

Type de réflexion	Critère au frontière	Inversion par rapport à l'axe de propagation	Déphasage par rapport à l'onde incidente
dure	$\mu_1 < \mu_2$	Oui	$\pi$
molle	$\mu_1 > \mu_2$	Non	0





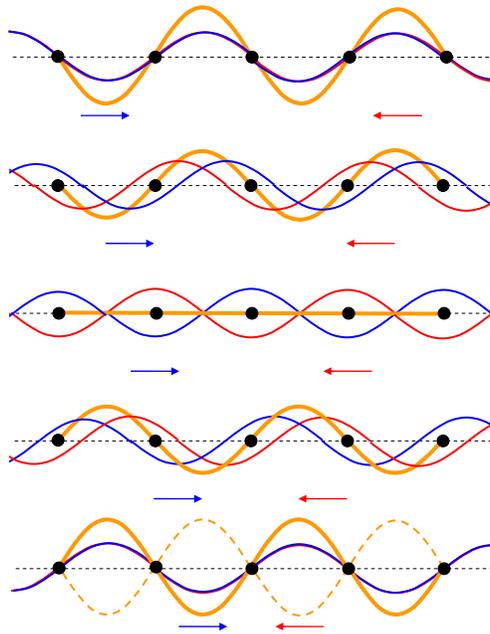




# Chapitre 1.12a – Les ondes stationnaires

## Onde stationnaire

Une **onde stationnaire** est le nom que porte l'**addition** de deux **ondes de fréquence identique** se propageant dans un milieu dans des **directions différentes**. Le résultat de l'addition produit une **onde immobile** (onde qui ne se déplace pas vers la gauche ni vers la droite) dans le milieu. Le milieu vibre alors de façon stationnaire d'où le nom onde stationnaire provient.



## Caractéristique d'une onde stationnaire

Une onde stationnaire se caractérise par les éléments suivants : ( $\lambda = vT$ )

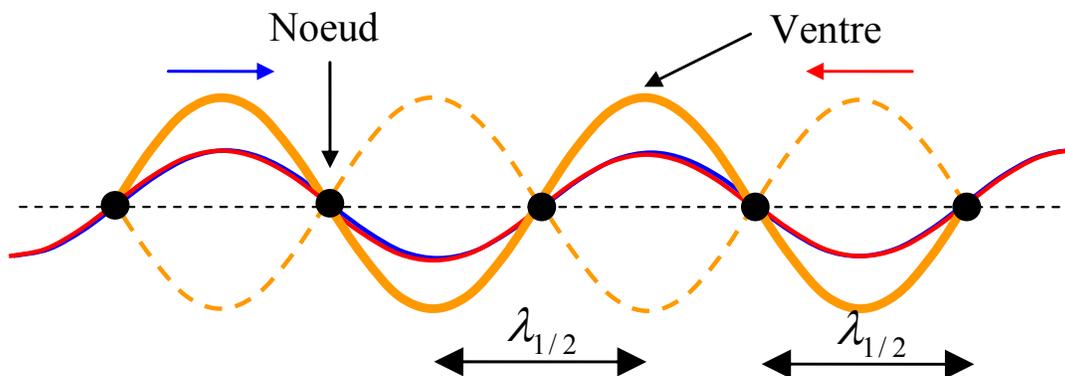
**Ventre** : Endroit où l'**amplitude** de l'oscillation du milieu est **maximale**.

**Nœud** : Endroit où l'**amplitude** de l'oscillation du milieu est **nulle**.

**Vitesse du milieu** ( $v$ ) : Vitesse des ondes progressives produisant l'onde stationnaire.

**Période** ( $T$ ) : Temps pour effectuer un cycle complet.

**Demi longueur d'onde** ( $\lambda_{1/2} = \lambda / 2$ ) : Distance entre deux nœuds ou deux ventres consécutifs.

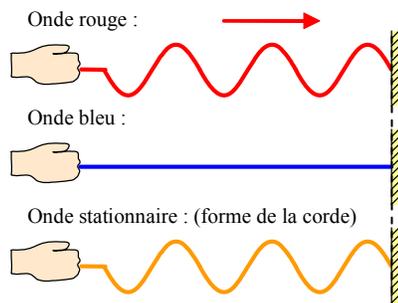


# Onde stationnaire par réflexion

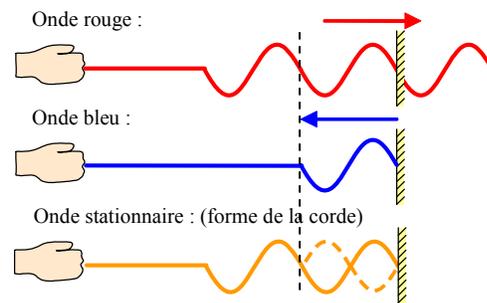
À l'aide d'un oscillateur, il est possible de créer une onde stationnaire sur une corde tendue. On attache une extrémité de la corde à l'oscillateur et l'autre extrémité à une interface (mur ou anneau). L'onde se déplaçant vers la droite sera l'onde produite par l'oscillateur et l'onde se déplaçant vers la gauche sera l'onde réfléchiée par l'interface.

Corde fixée à un mur : (réflexion dure  $\equiv$  extrémité droite fixe)

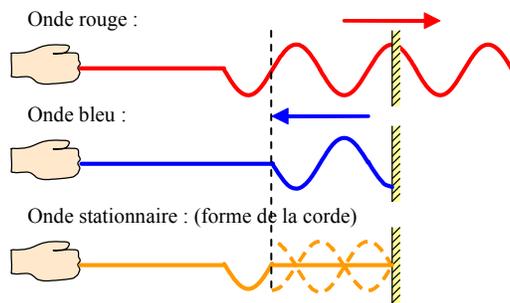
Temps :  $t = 0$  (aucun déplacement)



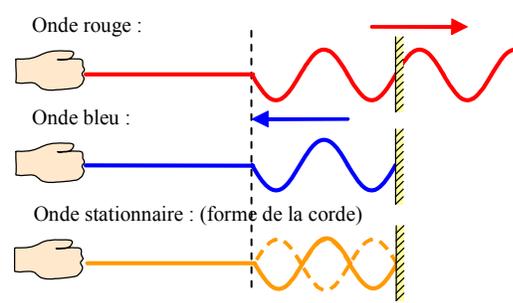
Temps :  $t = T$  (déplacement de  $\lambda$ )



Temps :  $t = T + T/4$  (déplacement de  $5\lambda/4$ )

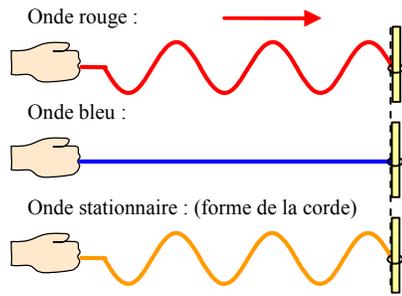


Temps :  $t = T + T/2$  (déplacement de  $3\lambda/2$ )

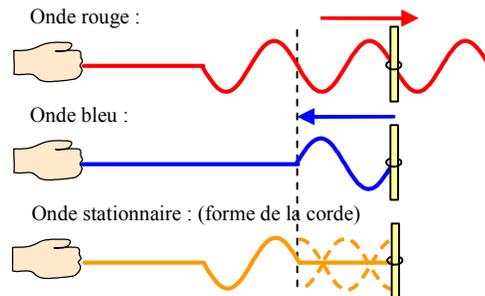


Corde fixée à un anneau : (réflexion mole  $\equiv$  extrémité droite libre)

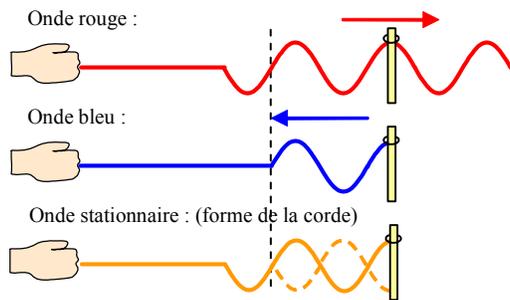
Temps :  $t = 0$



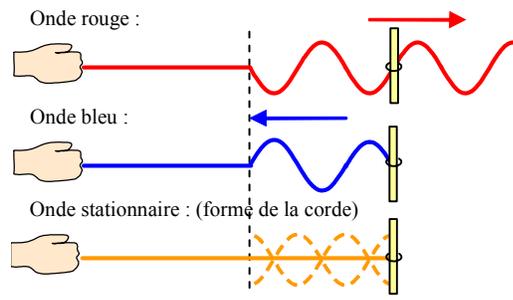
Temps :  $t = T$  (déplacement de  $\lambda$ )



Temps :  $t = T + T/4$  (déplacement de  $5\lambda/4$ )



Temps :  $t = T + T/2$  (déplacement de  $3\lambda/2$ )



On remarque :

- Près d'un **mur** (réflexion dure), l'**onde stationnaire** commence par un **nœud**.
- Près d'un **anneau** (réflexion mole), l'**onde stationnaire** commence par un **ventre**.

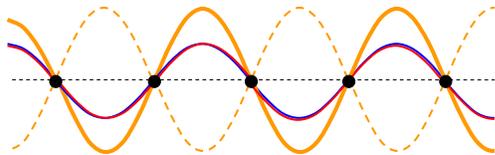
# Superposition d'onde stationnaire

Lorsque plusieurs ondes stationnaires sont présentes dans un milieu, le milieu se comporte en superposant l'ensemble des ondes stationnaires. La forme peut être très variée et dépend du nombre d'ondes stationnaires, de leur longueur d'onde et de leur déphasage.

Analysons la superposition de deux ondes stationnaires ayant les caractéristiques suivantes :

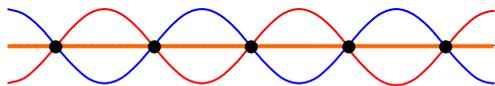
- Amplitude identique
- Période identique
- Onde progressive de même vitesse
- Longueur d'onde identique ( $\lambda = vT$ )
- Onde stationnaire sinusoïdale

Décalage : aucun ou  $\lambda$  (déphasage de 0 ou  $2\pi$ )



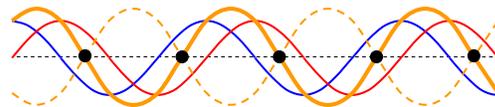
Amplification maximale de l'onde stationnaire

Décalage :  $\lambda/2$  (déphasage de  $\pi$ )



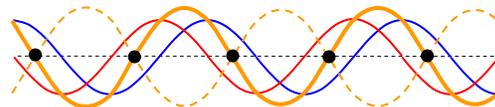
Annihilation de l'onde stationnaire

Décalage :  $\lambda/4$  (déphasage de  $\pi/2$ )



Petite amplification de l'onde stationnaire

Décalage :  $3\lambda/4$  (déphasage de  $3\pi/2$ )

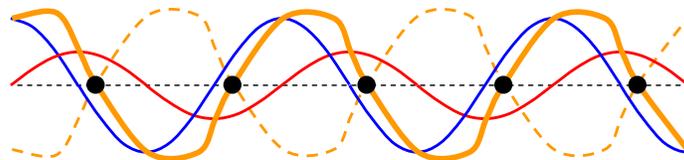


Petite amplification de l'onde stationnaire

On remarque : ( $\delta$  : décalage spatial)

- $\delta = N\lambda, N \in \mathbb{N}$  (multiple de  $\lambda$ )  $\Rightarrow$  Amplification maximale
- $\delta = N\lambda + \lambda/2, N \in \mathbb{N}$  (multiple de  $\lambda$  plus  $\lambda/2$ )  $\Rightarrow$  Annihilation complète
- $\delta = \text{quelconque}$   $\Rightarrow$  Amplification mineure

Lorsque les amplitudes ne sont pas égales, on ne retrouve plus une onde stationnaire globale de forme sinusoïdale : (décalage de  $\lambda/4$ )



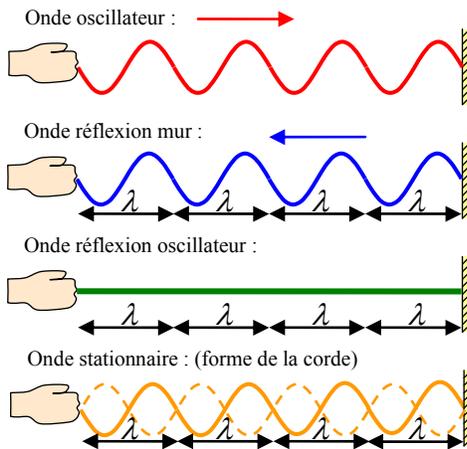
# Onde stationnaire sur une corde fixée à un mur

Lorsqu'une corde stimulée par un oscillateur est attachée à un mur, il se produit beaucoup de superpositions d'ondes stationnaires, car les ondes ayant subi une réflexion dure sur le mur subissent à nouveau une réflexion dure sur l'oscillateur (on suppose que l'amplitude de l'oscillateur est faible). Le décalage entre toutes ces ondes stationnaires dépend de la longueur de la corde. Il y a deux types de longueur de corde :

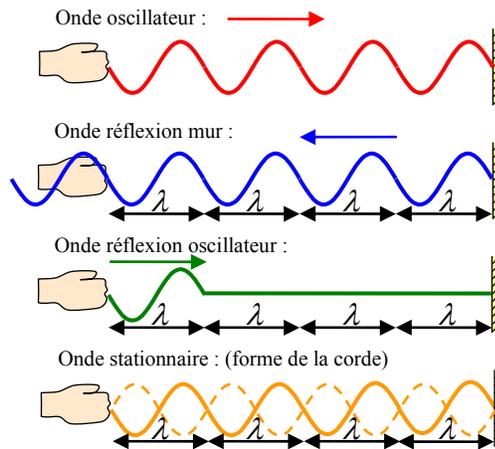
**1) Longueur multiple de  $\lambda/2$  :** ( $L = N \frac{\lambda}{2}$ ,  $N \in \mathbb{N}$ )

Nombre pair de  $\lambda/2$  : (Dessin après un temps de  $8T$ )

Temps :  $t = 0$

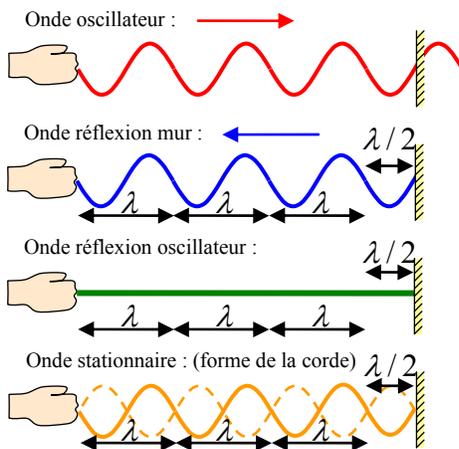


Temps :  $t = T$

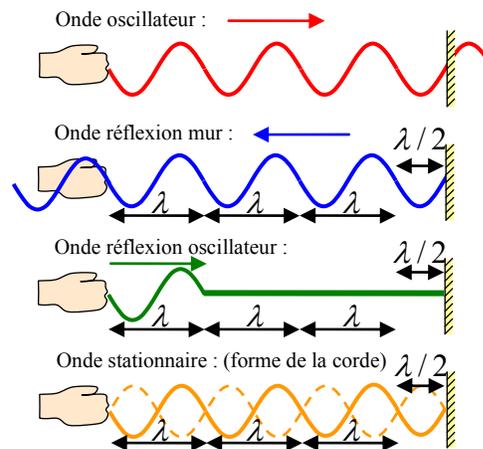


Nombre impair de  $\lambda/2$  : (Dessin après un temps de  $7T$ )

Temps :  $t = 0$



Temps :  $t = T$



Explication : La formation de l'onde stationnaire se termine exactement sur un nœud à l'endroit où l'oscillateur est situé. Ainsi, l'onde progressive formant cette onde stationnaire (**bleu**) réfléchit sur l'oscillateur (**verte**) et devient identique à l'onde produite par l'oscillateur (**rouge**). Cette nouvelle onde formera alors une onde stationnaire identique à la précédente sans décalage. Il y a donc une **amplification maximale**.

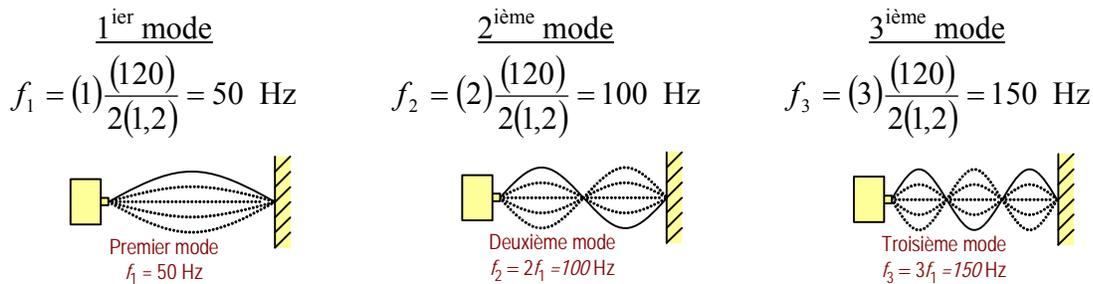
Lorsque la **corde** possède une **longueur** qui est un **multiple** de  $\lambda / 2$ , la corde vibre dans un **mode stationnaire unique** et l'**amplitude** peut **augmenter beaucoup plus** que l'**amplitude** de l'**oscillateur**, car il y a de la **superposition constructive** entre toutes les **ondes stationnaires**. L'amplitude maximale de la corde dépend de l'élasticité de la corde et du rythme de perte d'énergie par frottement dans la corde.

Nous pouvons établir la relation suivante entre la fréquence de l'oscillateur, la longueur de la corde et le nombre de ventre. Le **mode d'oscillation**  $N$  de la **corde** est déterminé par le **nombre de ventres** observés dans l'**onde stationnaire** :

$$\begin{aligned}
 L = N \frac{\lambda}{2} &\Rightarrow 2L = N\lambda && \text{(Multiplication par 2)} \\
 &\Rightarrow 2L = N(vT) && \text{(Remplacer, } \lambda = vT \text{)} \\
 &\Rightarrow \frac{1}{T} = \frac{N(v)}{2L} && \text{(Isoler } 1/T \text{)} \\
 &\Rightarrow f = N \frac{v}{2L} && \text{(Remplacer, } f = 1/T \text{)} \\
 &\Rightarrow \boxed{f_N = N \frac{v}{2L}} && \text{(Fréquence du } N^{\text{ième}} \text{ mode d'oscillation, } N \in \mathbb{N} \text{)}
 \end{aligned}$$

Exemple : Observation de 3 modes d'oscillation d'une corde ayant les caractéristiques

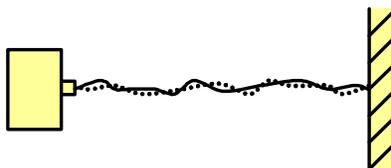
Longueur :  $L = 1,2 \text{ m}$                       Calcul de la densité :  $\mu = m / L = 0,0833 \text{ kg/m}$   
Masse :  $m = 0,1 \text{ kg}$                       Calcul de la vitesse :  $v = \sqrt{F / \mu} = 120 \text{ m/s}$   
Tension :  $F = 1200 \text{ N}$



## 2) Longueur quelconque : ( $L = \text{quelconque}$ )

Lorsque la **corde** possède une **longueur quelconque**, les **ondes stationnaires** sont **décalées** entre elles ce qui produit de la **superposition destructive partielle**. La corde aura donc une **amplitude comparable** à l'amplitude de l'**oscillateur**.

Exemple :



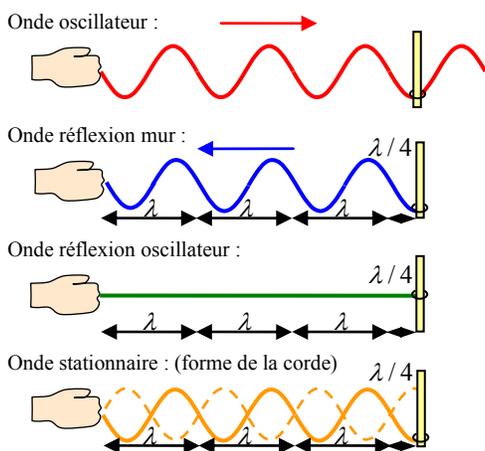
## Onde stationnaire sur une corde fixée à un anneau

Reprenons la démonstration précédente en effectuant maintenant une réflexion molle à l'aide d'une corde fixée à un anneau pouvant bouger seulement verticalement. Le décalage entre toutes les ondes stationnaires dépend encore une fois de la longueur de la corde et nous observons à nouveau deux types de comportement pour deux types de longueur de corde :

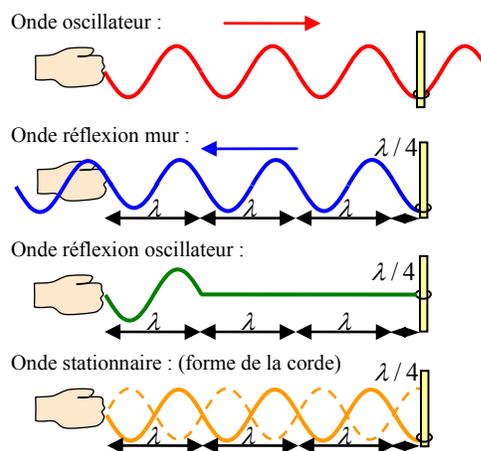
### 1) Longueur multiple de $\lambda/2$ plus $\lambda/4$ : ( $L = N\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}$ , $N \in \mathbb{N}$ )

Nombre pair de  $\lambda/2$  : (Dessin après un temps de  $6,5T$ )

Temps :  $t = 0$

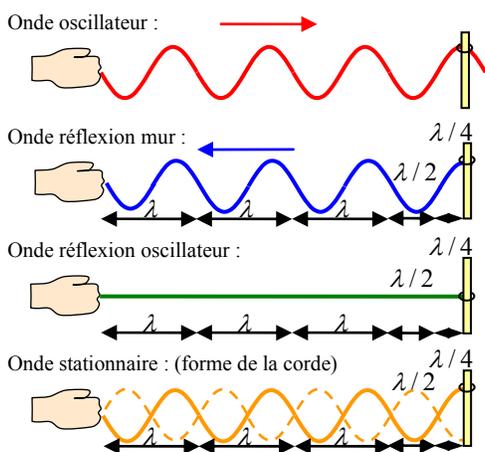


Temps :  $t = T$

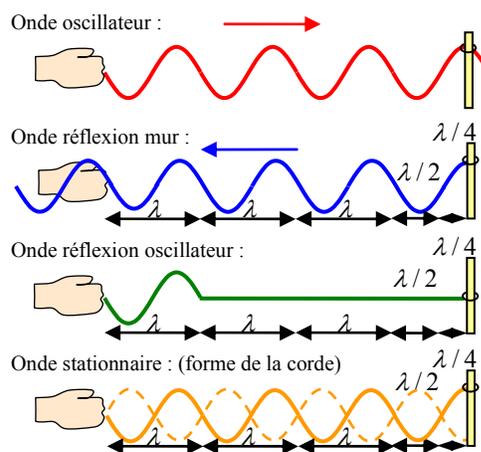


Nombre impair  $\lambda/2$  : (Dessin après un temps de  $7,5T$ )

Temps :  $t = 0$



Temps :  $t = T$



Comme dans le cas de la corde fixée à un mur, l'onde qui réfléchit sur l'oscillateur (**bleu**) produit une onde (**verte**) en phase avec l'onde produite par l'oscillateur (**rouge**) ce qui produit des ondes stationnaires en interférence constructive.

Nous pouvons établir la relation suivante entre la fréquence de l'oscillateur, la longueur de la corde et le nombre de ventre. Nous voulons que le **mode d'oscillation**  $N$  de la **corde** soit déterminé par le **nombre de ventres** observés dans l'**onde stationnaire**. Par contre, le **premier mode** est **accessible sans ventre** :

$$\begin{aligned}
 L = N \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} &\Rightarrow 2L = N\lambda + \frac{\lambda}{2} && \text{(Multiplication par 2)} \\
 &\Rightarrow 2L = \left(N + \frac{1}{2}\right)\lambda && \text{(Factoriser } \lambda \text{)} \\
 &\Rightarrow 2L = \left(N + \frac{1}{2}\right)(vT) && \text{(Remplacer, } \lambda = vT \text{)} \\
 &\Rightarrow \frac{1}{T} = \left(N + \frac{1}{2}\right) \frac{v}{2L} && \text{(Isoler } 1/T \text{)} \\
 &\Rightarrow f = \left(N + \frac{1}{2}\right) \frac{v}{2L} && \text{(Remplacer, } f = 1/T \text{)} \\
 &\Rightarrow \boxed{f_N = \left(N + \frac{1}{2}\right) \frac{v}{2L}} && \text{(Fréquence du } N^{\text{ième}} \text{ mode d'oscillation, } N \in \mathbb{N}^* \text{)}
 \end{aligned}$$

Pour respecter la définition de la variable  $N$  ( $N \equiv$  mode d'oscillation), il est préférable d'écrire l'équation précédente sous la forme suivante :

$$f_N = \left(N - \frac{1}{2}\right) \frac{v}{2L} \quad \text{où} \quad N \in \mathbb{N}, N^{\text{ième}} \text{ mode d'oscillation}$$

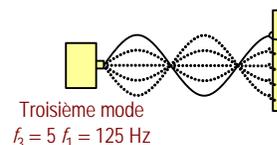
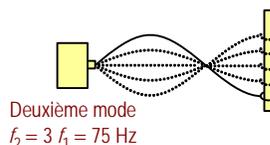
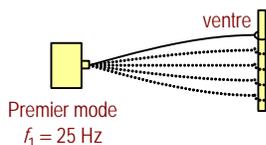
Exemple : Observation de 3 modes d'oscillation d'une corde ayant les caractéristiques

Longueur :  $L = 1,2 \text{ m}$       Calcul de la densité :  $\mu = m/L = 0,0833 \text{ kg/m}$

Masse :  $m = 0,1 \text{ kg}$       Calcul de la vitesse :  $v = \sqrt{F/\mu} = 120 \text{ m/s}$

Tension :  $F = 1200 \text{ N}$

$$\begin{array}{ccc}
 \text{1}^{\text{ier}} \text{ mode} & \text{2}^{\text{ième}} \text{ mode} & \text{3}^{\text{ième}} \text{ mode} \\
 f_1 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \frac{(120)}{2(1,2)} = 25 \text{ Hz} & f_2 = \left(2 - \frac{1}{2}\right) \frac{(120)}{2(1,2)} = 75 \text{ Hz} & f_3 = \left(3 - \frac{1}{2}\right) \frac{(120)}{2(1,2)} = 125 \text{ Hz}
 \end{array}$$



## 2) Longueur quelconque : ( $L = \text{quelconque}$ )

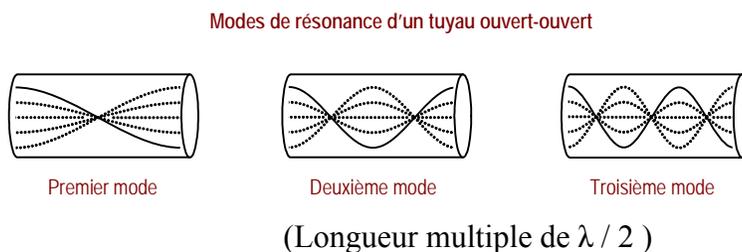
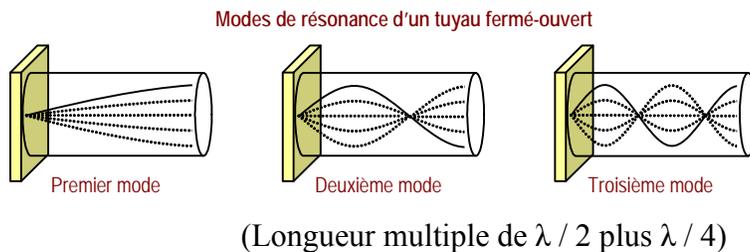
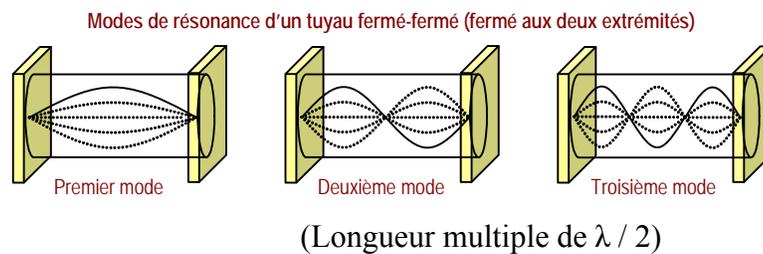
Lorsque la **corde** possède une **longueur quelconque**, les **ondes stationnaires** sont **décalées** entre elles ce qui produit de la **superposition destructive partielle**. La corde aura donc une **amplitude comparable** à l'amplitude de l'**oscillateur**.

## L'onde stationnaire dans un tuyau

Il est possible de produire des ondes stationnaires dans un tuyau grâce aux molécules d'air qui transportent les ondes longitudinales. Lorsqu'une onde atteint une des extrémités du tuyau, elle peut entrer en contact avec une surface fermée où une section ouverte. La réflexion de l'onde due à un changement d'interface respecte les règles suivantes :

- 1) Section fermée  $\Rightarrow$  Réflexion dure (avec inversion)
- 2) Section ouverte  $\Rightarrow$  Réflexion molle (sans inversion)

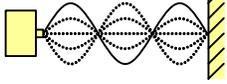
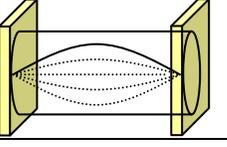
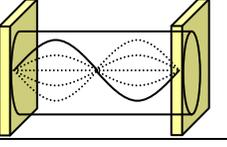
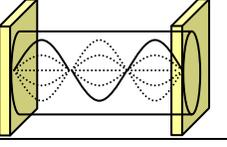
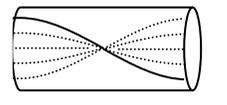
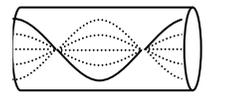
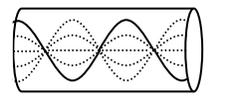
Ainsi, nous pouvons retrouver les différents modes de vibration suivants selon les différentes combinaisons d'ouvertures : (Amplitude du mouvement horizontal)

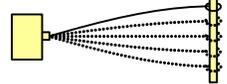
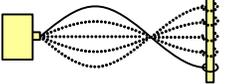
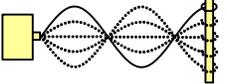
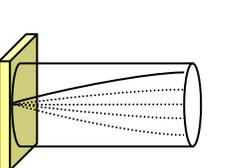
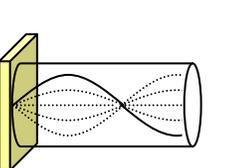
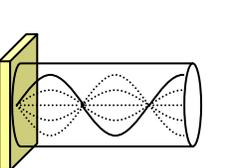


Nous pouvons utiliser les mêmes règles que celles utilisées avec la vibration d'une corde afin d'établir la fréquence des différents modes de vibration de l'air en fonction de la longueur du tuyau et de ses types ouvertures.

## La résonance d'une onde stationnaire

La **résonance** est l'**excitation** d'un **système** avec une **fréquence égale** à la **fréquence naturelle d'oscillation** du système. Lorsqu'un système possède **plusieurs fréquences naturelles** (ex : corde, tuyau), on identifie à chaque fréquence naturelle (valeur propre) un **mode d'oscillation** (mode propre). Lorsqu'un système entre en résonance, l'**amplitude** associée au mouvement du milieu est **amplifiée**. L'amplitude atteindra une valeur maximale lorsque le rythme auquel l'appart en énergie est donnée au milieu est égal au rythme auquel le milieu dissipe son énergie (ex : frottement, dégagement de chaleur).

Longueur multiple de $\lambda / 2$				
Situation	Équation	Mode 1	Mode 2	Mode 3
Corde fixée à un mur	$L = N \frac{\lambda}{2}$ $f_N = N \frac{v}{2L}$ $N \in \mathbb{N}, (N^{\text{ième}} \text{ mode d'oscillation})$			
Tuyau fermé-fermé				
Tuyau ouvert-ouvert				

Longueur multiple de $\lambda / 2$ plus $\lambda / 4$				
Situation	Équation	Mode 1	Mode 2	Mode 3
Corde fixée à un anneau	$L = (N - 1) \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}$ $f_N = \left(N - \frac{1}{2}\right) \frac{v}{2L}$ $N \in \mathbb{N}, (N^{\text{ième}} \text{ mode d'oscillation})$			
Tuyau fermé-ouvert				

Définitions des paramètres :

$f_N$  : Fréquence de résonance du  $N^{\text{ième}}$  mode (Hz ou  $s^{-1}$ )

$N$  : Numéro du mode de résonance ( $N \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ )

$v$  : Vitesse de propagation des ondes dans le milieu (m/s)

$L$  : Longueur du milieu où il y a l'onde stationnaire (m)

$\lambda$  : Longueur d'onde produite par la fréquence de stimulation (m)

$$(\lambda = v / f)$$

## Les effets de bord

Dans un tuyau réel, les conditions aux frontières ne sont pas toujours respectées entièrement, car :

- une section fermée peut quand même osciller avec une petite amplitude.
- une section ouverte n'est jamais parfaitement ouverte.

Pour évaluer la **longueur d'onde**  $\lambda$  de l'**onde stationnaire** et ainsi déterminer le mode de résonance, il est préférable d'évaluer la **distance entre deux nœuds consécutifs** et d'évaluer  $\lambda/2$ . Mesurer la distance entre une frontière et le premier nœud devient alors une estimation de la longueur d'onde  $\lambda$ .

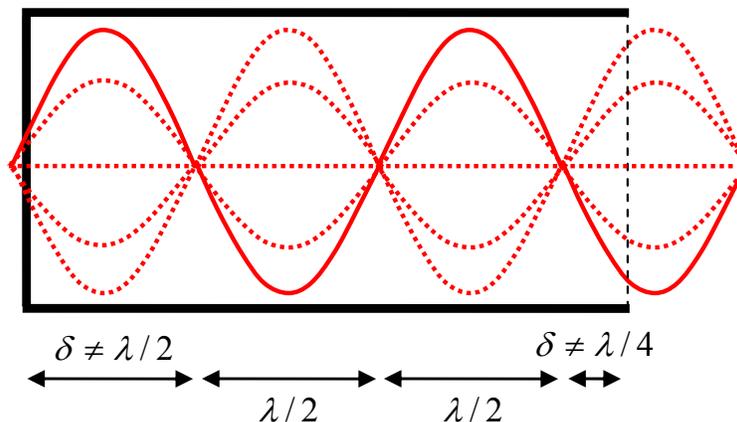
### Mesure idéale :

- Distance entre deux nœuds consécutifs  $\Rightarrow \delta = \lambda/2$

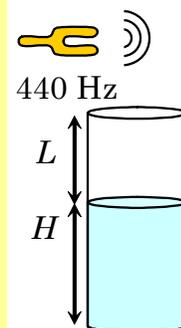
### Mesure approximative :

- Distance entre une ouverture fermée et le 1<sup>er</sup> nœud  $\Rightarrow \delta \approx \lambda/2$
- Distance entre une ouverture ouverte et le 1<sup>er</sup> nœud  $\Rightarrow \delta \approx \lambda/4$

Exemple : 4<sup>ème</sup> mode de résonance d'un tuyau réel ouvert-fermé



**Situation 4 : L'amplification du son par résonance.** En faisant vibrer un diapason ( $f = 440$  Hz) au-dessus d'un cylindre gradué de 1 m de hauteur partiellement rempli d'eau, on s'aperçoit que le son résultant est plus intense lorsque la hauteur de l'eau dans le cylindre possède certaines valeurs bien précises. On désire les déterminer. (Le module de la vitesse du son est égal à 340 m/s. On néglige les effets de bord).

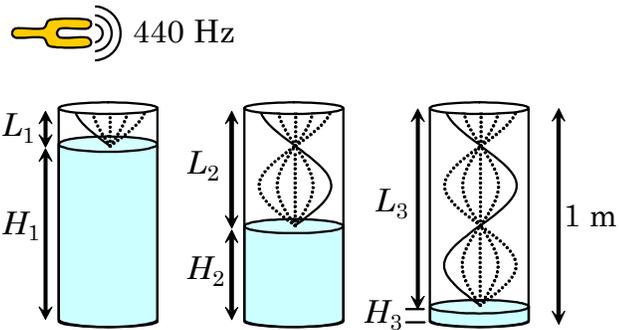


L'amplification du son sera présente lorsque le cylindre vibrera en résonance sous la présence du diapason (oscillateur). Évaluons la longueur du tuyau requis pour exciter les différents modes de résonance.

Puisque le tuyau est ouvert (contact avec l'air) et fermé (contact avec l'eau), nous utiliserons l'expression suivante :

$$f_N = \left( N - \frac{1}{2} \right) \frac{v}{2L_N}$$

où  $L_N$  : Longueur pour le  $N^{\text{ième}}$  mode



$$\text{Pour } N = 1 : f_1 = \left( 1 - \frac{1}{2} \right) \frac{v}{2L_1} \Rightarrow (440) = \frac{1}{2} \frac{(340)}{2L_1} \Rightarrow \boxed{L_1 = 0,193 \text{ m}}$$

$$\text{Pour } N = 2 : f_2 = \left( 2 - \frac{1}{2} \right) \frac{v}{2L_2} \Rightarrow (440) = \frac{3}{2} \frac{(340)}{2L_2} \Rightarrow \boxed{L_2 = 0,580 \text{ m}}$$

$$\text{Pour } N = 3 : f_3 = \left( 3 - \frac{1}{2} \right) \frac{v}{2L_3} \Rightarrow (440) = \frac{5}{2} \frac{(340)}{2L_3} \Rightarrow \boxed{L_3 = 0,966 \text{ m}}$$

Ainsi, nous pouvons évaluer la colonne d'eau nécessaire grâce à la hauteur de notre tuyau initial de 1 m :

$$H = 1 - L \Rightarrow H_1 = 1 - (0,193) \Rightarrow \boxed{H_1 = 0,807 \text{ m}}$$

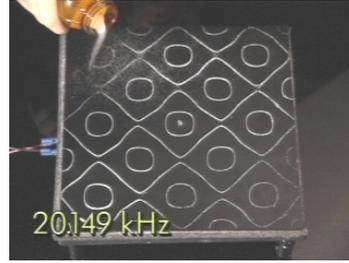
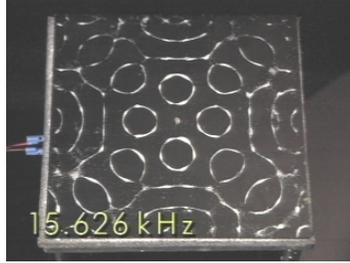
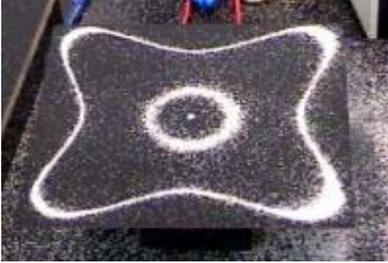
$$\Rightarrow H_2 = 1 - (0,580) \Rightarrow \boxed{H_2 = 0,420 \text{ m}}$$

$$\Rightarrow H_3 = 1 - (0,966) \Rightarrow \boxed{H_3 = 0,034 \text{ m}}$$

## Différentes situations de résonance

Voici différentes situations où un milieu entre en résonance :

Table à vibration : (nœuds situés où le sable se retrouve)



L'effondrement du pont de Tacoma<sup>1</sup> en 1940 (État-Unis) : (vitesse du vent : 67 km/h)



## Instruments de musique

Vibration d'une corde (vibration indirecte de l'air) :



Guitare (Corde pincée)



Piano (Corde frappée)



Violon (Corde frottée)

Vibration directe de l'air avec longueur de tuyau variable :



Flûte de pan



Flûte à bec



Trombone

<sup>1</sup> D'autres théories proposent une autre explication à l'effondrement du pont de Tacoma qu'une excitation d'un mode de torsion du pont par résonance (stimulation à la fréquence propre du mode de vibration).



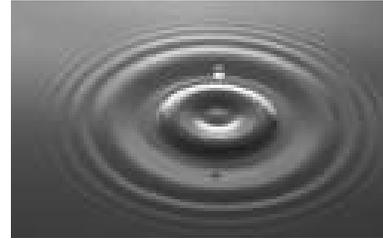




# Chapitre 1.13 – L'effet Doppler sonore

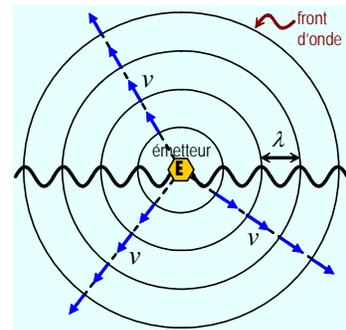
## L'onde à deux dimensions

Lorsqu'on fait tomber une goutte d'eau dans un lac calme, nous pouvons observer la propagation d'une onde à deux dimensions (voir schéma ci-contre).



L'onde associée à la chute d'une goutte d'eau diffuse son énergie en deux dimensions de façon circulaire.

Cependant, l'expression mathématique d'une onde en trois dimension est très complexe, car l'amplitude de l'onde  $A$  diminue en fonction du carré de la distance  $r^2$  (distance entre la source et l'élément du milieu  $x$  déplacé par le passage de l'onde) en raison de la conservation de l'énergie (voir schéma ci-contre).



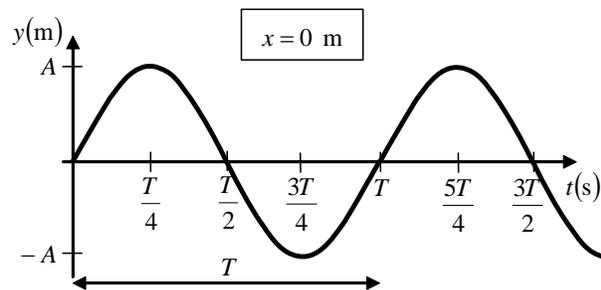
Lorsqu'on représente graphiquement une onde à deux dimensions, il est préférable de dessiner seulement le **maximum** de **chaque front d'onde** séparé par une longueur d'onde  $\lambda$  (schéma ci-contre). Chaque front d'onde prend de l'expansion à vitesse  $v$ .

## Émetteur en mouvement

Analysons l'influence d'une onde produite par émetteur produisant un mouvement harmonique simple.

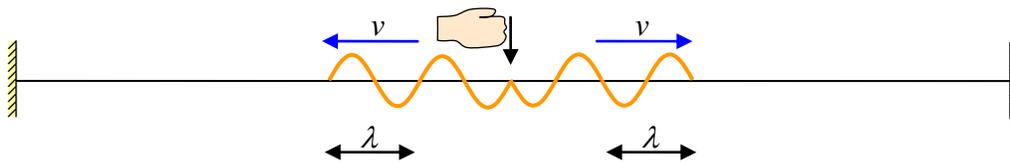
Voici notre mouvement harmonique simple :

$$y(t) = A \sin(\omega t)$$

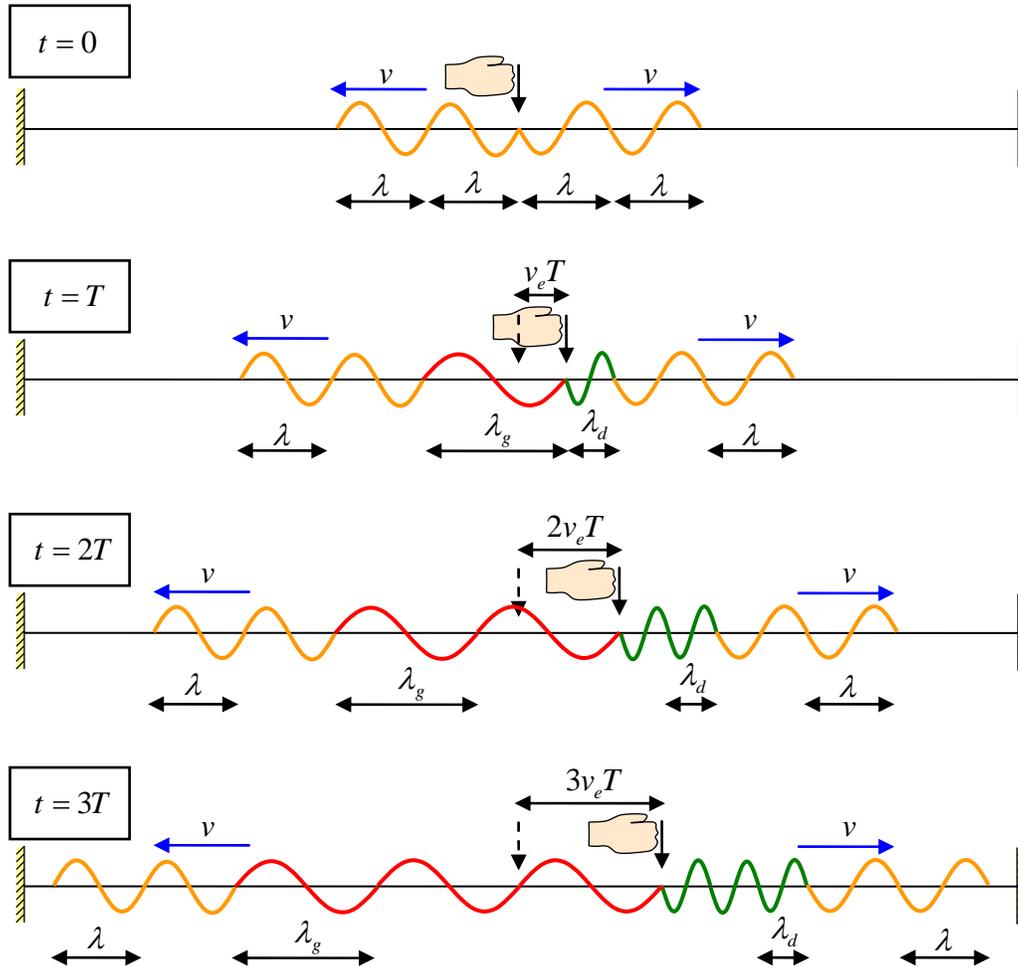


un

Agitons le centre d'une corde fixée aux deux extrémités durant deux périodes  $T$  à l'aide du mouvement décrit précédemment. Nous observons alors une onde se déplaçant vers la gauche et vers la droite à vitesse  $v$  dont la longueur d'onde est  $\lambda$  : ( $\lambda = vT$ )



Déplaçons maintenant notre émetteur vers la droite à une vitesse  $v_e$  inférieure à la vitesse de propagation du milieu  $v$ . La formation de l'onde sur la corde sera influencée par le module et le sens de la vitesse de l'émetteur. Il est important de préciser que la **vitesse de l'onde**  $v$  est **égale** à la **vitesse de propagation du milieu même si l'émetteur est en mouvement**. L'onde ne peut pas être poussée par l'émetteur, car l'émetteur produit la perturbation et le milieu s'occupe de propager la perturbation.



Nous pouvons évaluer la longueur d'onde  $\lambda$  modifiée par le module et le sens de la vitesse de l'émetteur  $v_e$  de la façon suivante :

Émetteur immobile :

$$\lambda = vT \quad (\text{Émetteur immobile par rapport aux récepteurs gauche et droit})$$

Émetteur se déplaçant vers la droite :

$$\lambda_d = \lambda - v_e T \quad (\text{Émetteur s'approche du récepteur de droite})$$

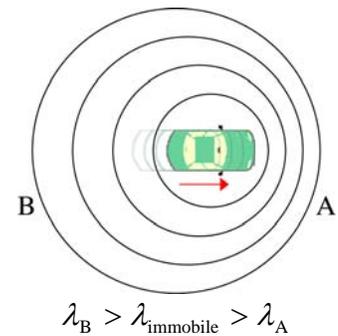
$$\lambda_g = \lambda + v_e T \quad (\text{Émetteur s'éloigne du récepteur de gauche})$$

## Longueur d'onde produite par un émetteur en mouvement

Lorsqu'un émetteur produit une onde dans un milieu, la longueur d'onde  $\lambda'$  mesurée par un récepteur sera influencée par le module et le sens de la vitesse de l'émetteur  $v_e$ . Cette relation est valide seulement lorsque la vitesse de l'émetteur  $v_e$  est inférieure à la vitesse de propagation de l'onde  $v$  :

$$\lambda' = \lambda \pm v_e T$$

(lorsque  $v_e < v$ )



$$\lambda_B > \lambda_{\text{immobile}} > \lambda_A$$

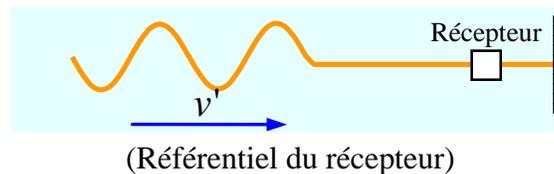
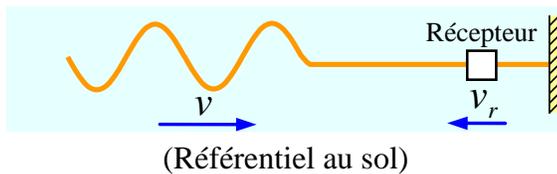
- où
- $\lambda'$  : Longueur d'onde mesurée par le récepteur (m)
  - $\lambda$  : Longueur d'onde naturelle de l'émetteur immobile (m) ( $\lambda = vT$ )
  - $v_e$  : Module de la vitesse de l'émetteur orientée vers le récepteur (m/s)
  - $v$  : Vitesse de propagation de l'onde (m/s)
  - $T$  : Période de la perturbation de l'émetteur (s)
  - $\pm$  : (Positif) Émetteur s'éloigne du récepteur (étirement de la longueur d'onde)  
(Négatif) Émetteur s'approche du récepteur (contraction de la longueur d'onde)

## Récepteur en mouvement

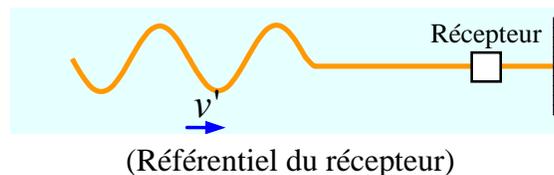
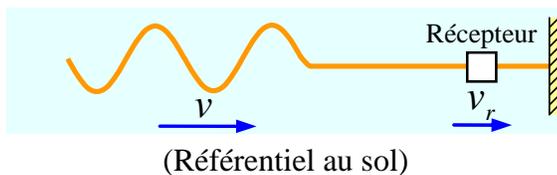
Lorsqu'un émetteur en mouvement produit une onde, l'onde se déplace quand même à la vitesse  $v$  caractérisée par le milieu. Par contre, la vitesse de l'onde  $v'$  par rapport au récepteur sera perçue différemment si le récepteur est en mouvement à vitesse  $v_r$ .

Supposons que  $v_r < v$  :

Récepteur s'approche l'onde :  $v' = v + v_r$  (Vitesse de l'onde augmente)



Récepteur s'éloigne de l'onde :  $v' = v - v_r$  (Vitesse de l'onde diminue)



## Vitesse de l'onde par rapport à un récepteur en mouvement

Lorsqu'un récepteur mesure la vitesse  $v'$  d'une onde par rapport à lui-même, celle-ci est influencée par la vitesse du récepteur  $v_r$ . Cette relation est valide seulement lorsque la vitesse du récepteur  $v_r$  est inférieure à la vitesse de propagation de l'onde  $v$  :

$$v' = v \pm v_r$$

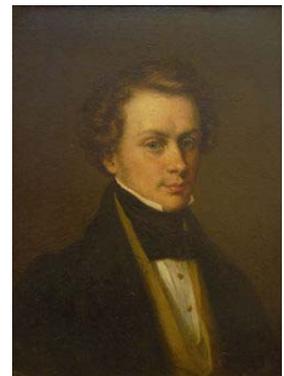
(lorsque  $v_r < v$ )

- où  $v'$  : Vitesse de l'onde par rapport au récepteur (m/s)  
 $v$  : Vitesse de l'onde dans son milieu (m/s)  
 $v_r$  : Vitesse du récepteur (m/s)  
 $\pm$  : (Positif) Récepteur fonce vers l'onde (augmentation de la vitesse)  
 (Négatif) Récepteur se sauve de l'onde (diminution de la vitesse)

## L'effet Doppler sonore

En 1842, le physicien autrichien Christian Andreas Doppler réalise que lorsqu'un émetteur sonore produit un son dans l'air de fréquence  $f$ , la fréquence  $f'$  mesurée par un récepteur dépend de la vitesse de l'émetteur  $v_e$  et de la vitesse du récepteur  $v_r$ . La vitesse du son  $v_s$  (vitesse de l'onde par rapport à son milieu qui est l'air) est également un facteur à considérer dans la relation. Cet effet porte de nos jours le nom d'effet Doppler sonore :

$$f' = \left( \frac{v_s \pm v_r}{v_s \pm v_e} \right) f$$



Christian Doppler  
(1803-1853)

- où  $f'$  : Fréquence du son mesurée par le récepteur (Hz ou  $s^{-1}$ )  
 $f$  : Fréquence émise par l'émetteur (Hz ou  $s^{-1}$ )  
 $v_s$  : Vitesse du son dans l'air sans vent (habituellement 340 m/s) (m/s)  
 $v_r$  : Vitesse du récepteur (m/s)  
 Signe + : s'approche du son (plus aigu, fréquence augmente,  $f' > f$ )  
 Signe - : s'éloigne du son (plus grave, fréquence diminue,  $f' < f$ )  
 $v_e$  : Vitesse de l'émetteur (m/s)  
 Signe - : s'approche du récepteur (plus aigu, fréquence augmente,  $f' > f$ )  
 Signe + : s'éloigne du récepteur (plus grave, fréquence diminue,  $f' < f$ )

Preuve :

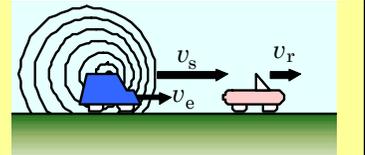
Évaluons une expression permettant d'évaluer une fréquence  $f$  à partir de la vitesse de l'onde  $v$  par rapport au récepteur et de la longueur d'onde  $\lambda$  mesurée par le récepteur :

$$\lambda = vT \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{T} = \frac{v}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f = \frac{v}{\lambda}}$$

À partir de l'expression de la fréquence, évaluons une fréquence  $f'$  modifiée par une vitesse de l'onde influencée par un récepteur en mouvement et modifiée par une longueur d'onde influencée par un émetteur en mouvement :

$$\begin{aligned} f' &= \frac{v'}{\lambda'} & \Rightarrow & \quad f' = \frac{(v \pm v_r)}{(\lambda \pm v_e T)} & \quad & \text{(Remplacer, } v' = v \pm v_r \text{ et } \lambda' = \lambda \pm v_e T \text{)} \\ & & \Rightarrow & \quad f' = \frac{v \pm v_r}{(vT) \pm v_e T} & \quad & \text{(Longueur d'onde naturelle, } \lambda = vT \text{)} \\ & & \Rightarrow & \quad f' = \frac{1}{T} \left( \frac{v \pm v_r}{v \pm v_e} \right) & \quad & \text{(Factoriser de } 1/T \text{)} \\ & & \Rightarrow & \quad f' = \left( \frac{v \pm v_r}{v \pm v_e} \right) f & \quad \blacksquare & \quad \text{(Fréquence, } f = 1/T \text{)} \end{aligned}$$

**Situation 3 : Poursuivi par la justice!** Un malfaiteur roulant à 126 km/h dans une voiture volée est poursuivi par un policier roulant à 180 km/h; la sirène de la voiture de police émet un son de 1000 Hz. On désire déterminer la fréquence entendue par le malfaiteur.



Évaluons la vitesse de la police (émetteur) et la vitesse du malfaiteur (récepteur) en m/s :

$$v_e = 180 \text{ km/h} = \frac{180 \text{ km}}{\text{h}} \times \frac{1 \text{ h}}{60 \text{ min}} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \times \frac{1000 \text{ m}}{\text{km}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_e = 50 \text{ m/s}}$$

$$v_r = 126 \text{ km/h} = \frac{126 \text{ km}}{\text{h}} \times \frac{1 \text{ h}}{60 \text{ min}} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \times \frac{1000 \text{ m}}{\text{km}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_r = 35 \text{ m/s}}$$

Évaluons la fréquence entendue par le malfaiteur :

$$\begin{aligned} f' &= \left( \frac{v_s \pm v_r}{v_s \pm v_e} \right) f & \Rightarrow & \quad f' = \left( \frac{v_s - v_r}{v_s \pm v_e} \right) f & \quad & \text{(Récepteur contre son, signe négatif car } f \downarrow \text{)} \\ & & \Rightarrow & \quad f' = \left( \frac{v_s - v_r}{v_s - v_e} \right) f & \quad & \text{(Émetteur vers le récepteur, signe négatif car } f \uparrow \text{)} \\ & & \Rightarrow & \quad f' = \left( \frac{(340) - (35)}{(340) - (50)} \right) (1000) & \quad & \text{(Remplacer valeurs num.)} \\ & & \Rightarrow & \quad \boxed{f' = 1052 \text{ Hz}} & \quad & \text{(Fréquence du son)} \end{aligned}$$

**Situation 4 : Une réflexion sur un camion.** Un après-midi de pluie, Albert roule en motocyclette à 90 km/h sur l'autoroute. Il se fait doubler par un camion qui roule à 144 km/h. Exaspéré par la manœuvre, il klaxonne : le klaxon émet une onde sonore à 756 Hz qui rebondit sur la porte arrière du camion et revient à lui. On désire déterminer la fréquence de l'écho qu'il entend.

Évaluons la vitesse d'Albert  $v_A$  et la vitesse du camion  $v_C$  en m/s :

$$v_A = 90 \text{ km/h} = \frac{90 \text{ km}}{\text{h}} \times \frac{1 \text{ h}}{60 \text{ min}} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \times \frac{1000 \text{ m}}{\text{km}} \Rightarrow \boxed{v_A = 25 \text{ m/s}}$$

$$v_C = 144 \text{ km/h} = \frac{144 \text{ km}}{\text{h}} \times \frac{1 \text{ h}}{60 \text{ min}} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \times \frac{1000 \text{ m}}{\text{km}} \Rightarrow \boxed{v_C = 40 \text{ m/s}}$$

Dans le premier mouvement du son, Albert est l'émetteur ( $v_e = v_A$ ) et le camion est le récepteur ( $v_r = v_C$ ). Évaluons la fréquence mesurée à l'arrière du camion :

$$f' = \left( \frac{v_s \pm v_r}{v_s \pm v_e} \right) f \Rightarrow f' = \left( \frac{v_s - v_r}{v_s \pm v_e} \right) f \quad (\text{Récepteur contre son, signe négatif car } f \downarrow)$$

$$\Rightarrow f' = \left( \frac{v_s - v_r}{v_s - v_e} \right) f \quad (\text{Émetteur vers le récepteur, signe négatif car } f \uparrow)$$

$$\Rightarrow f' = \left( \frac{(340) - (40)}{(340) - (25)} \right) (756) \quad (\text{Remplacer valeurs num.})$$

$$\Rightarrow \boxed{f' = 720 \text{ Hz}} \quad (\text{Fréquence du son})$$

Dans le deuxième mouvement du son, la réflexion du son sur le camion permet au camion de devenir l'émetteur ( $v_e = v_C$ ) et Albert devient le récepteur ( $v_r = v_A$ ). Évaluons la fréquence mesurée par l'Albert. La fréquence d'émission est celle calculée auparavant :

$$f' = \left( \frac{v_s \pm v_r}{v_s \pm v_e} \right) f \Rightarrow f' = \left( \frac{v_s + v_r}{v_s \pm v_e} \right) f \quad (\text{Récepteur vers le son, signe positif car } f \uparrow)$$

$$\Rightarrow f' = \left( \frac{v_s + v_r}{v_s + v_e} \right) f \quad (\text{Émetteur contre le récepteur, signe positif car } f \downarrow)$$

$$\Rightarrow f' = \left( \frac{(340) + (25)}{(340) + (40)} \right) (720) \quad (\text{Remplacer valeurs num.})$$

$$\Rightarrow \boxed{f' = 692 \text{ Hz}} \quad (\text{Fréquence du son})$$

## La vitesse du son dans le vent

Le vent permet de déplacer l'air qui est le milieu propagateur du son. La **vitesse de l'onde sonore** par rapport au sol  $v_s$  est influencée par le **module** et le **sens** de la **vitesse du vent**  $v_{\text{vent}}$  ainsi que par la **vitesse** de propagation  $v$  de **l'onde dans l'air**. Lorsque l'onde voyage dans le sens du vent, la vitesse augmente et lorsque l'onde voyage dans le sens contraire du vent, la vitesse diminue :

$$v_s = v \pm v_{\text{vent}}$$

où  $v_s$  : Vitesse du son (m/s)

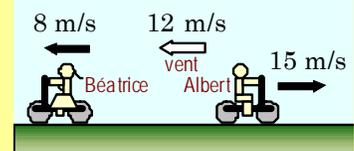
$v$  : Vitesse de propagation du milieu (m/s)

$v_{\text{vent}}$  : Vitesse du vent (m/s)

$\pm$  : (Positif) Le son voyage dans le sens du vent.

(Négatif) Le son voyage dans le sens contraire du vent.

**Situation 6 : Siffler dans le vent.** Dans un vent constant qui souffle à 12 m/s vers la gauche, Albert roule en bicyclette à 15 m/s vers la droite. Il croise Béatrice qui roule à 8 m/s vers la gauche. Après avoir croisé Béatrice, il siffle à 500 Hz. On désire déterminer la fréquence entendue par Béatrice.



Dans le problème suivant, nous avons les informations suivantes :

- Fréquence initiale :  $f = 500$  Hz
- Vitesse du son dans l'air :  $v = 340$  m/s
- Émetteur (Albert) :  $v_e = 15$  m/s (vers la droite)
- Récepteur (Béatrice) :  $v_r = 8$  m/s (vers la gauche)
- Souffle du vent :  $v_{\text{vent}} = 12$  m/s (vers la gauche)

Avec l'équation de l'effet Doppler, évaluons la fréquence mesurée par Béatrice :

$$f' = \left( \frac{v_s \pm v_r}{v_s \pm v_e} \right) f \Rightarrow f' = \left( \frac{v_s - v_r}{v_s \pm v_e} \right) f \quad (\text{Récepteur contre le son, signe négatif})$$

$$\Rightarrow f' = \left( \frac{v_s - v_r}{v_s + v_e} \right) f \quad (\text{Émetteur contre le récepteur, signe positif})$$

$$\Rightarrow f' = \left( \frac{(v + v_{\text{vent}}) - v_r}{(v + v_{\text{vent}}) + v_e} \right) f \quad (\text{Son voyage dans le sens du vent})$$

$$\Rightarrow f' = \left( \frac{((340) + (12)) - (8)}{((340) + (12)) + (15)} \right) (500) \quad (\text{Remplacer valeurs num.})$$

$$\Rightarrow \boxed{f' = 468,7 \text{ Hz}} \quad (\text{Fréquence du son})$$

## Briser le mur du son

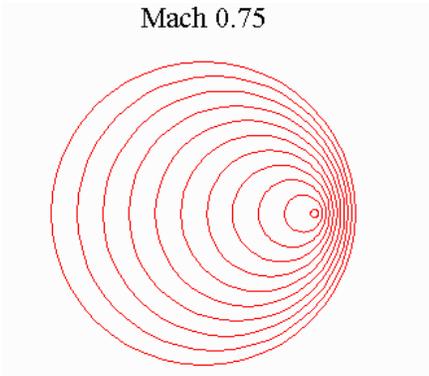
Lorsqu'un émetteur se déplace plus rapidement que la vitesse de propagation du milieu ( $v_e > v$ ), l'équation associée à l'effet Doppler ne s'applique plus.

Avion de chasse se déplaçant à une vitesse supérieure à Mach 1 : (Mach 1  $\equiv$  vitesse du son)



Effet Doppler à Mach 0,75 :

Mach 0.75



Balle de fusil : (artistique)



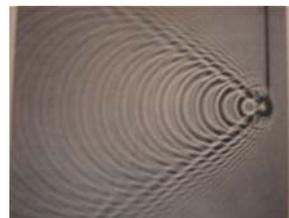
Lorsque la vitesse du son est presque atteinte, l'émetteur subit beaucoup de perturbation, car les fronts d'onde se superposent (émetteur se déplace au même rythme que l'onde).

Cette accumulation d'onde est représentée par un mur. Ceci explique pourquoi l'expression « briser le mur du son » est utilisée lorsqu'un émetteur se déplace plus rapidement que le son. Le mur se transforme alors en cône, car l'émetteur se déplace plus rapidement que le son qu'il produit.

Avant le mur du son :



Après le mur du son :



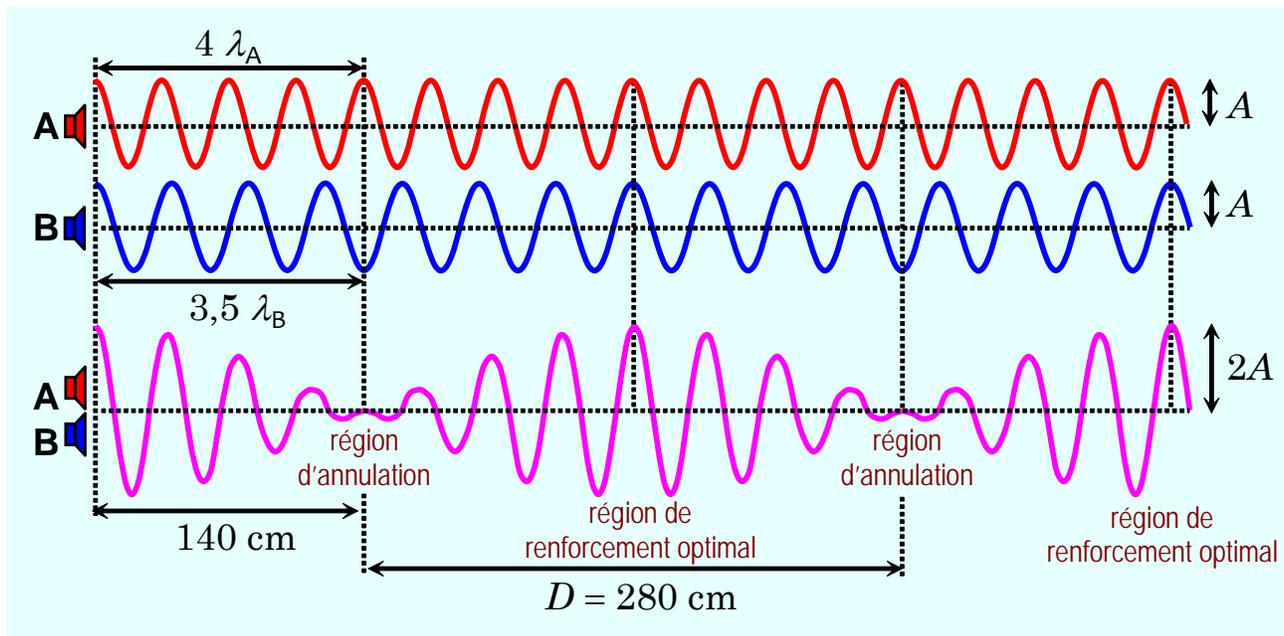
# Chapitre 1.14 – Les battements

## Les battements

Le **battement** est la **superposition** de **deux ondes** de **fréquences différentes** (mais relativement rapprochées). Le battement s'observe lorsqu'il y a une variation périodique de l'amplitude des oscillations, car les ondes se synchronisent et se désynchronisent périodiquement en raison de leur longueur d'onde différente.

Exemple : **Haut-parleur A** (971,4 Hz)  $\lambda_A = vT_A = \frac{v}{f_A} = \frac{(340)}{(971,4)} \Rightarrow \boxed{\lambda_A = 0,35 \text{ m}}$

**Haut-parleur B** (850 Hz)  $\lambda_B = vT_B = \frac{v}{f_B} = \frac{(340)}{(850)} \Rightarrow \boxed{\lambda_B = 0,40 \text{ m}}$



- **L'onde A+B** se déplace à la vitesse de 340 m/s (même vitesse que l'onde A et B).
- **L'onde A+B** possède une longueur d'onde égale à  $D = 2,80 \text{ m}$ .
- **L'onde A+B** possède une fréquence (fréquence de battement) de  $f_b = \frac{v}{\lambda_b} = \frac{(340)}{(2,80)} = 121,4 \text{ Hz}$ .
- La fréquence de battement est égale à  $f_b = f_A - f_B = (971,4) - (850) = 121,4 \text{ Hz}$ .

## Fréquence de battement

Deux ondes en phase de fréquences différentes produisent par superposition une onde dont la fréquence est définie de la façon suivante :

$$f_b = |f_1 - f_2|$$

où  $f_b$  : Fréquence de l'onde superposée, l'onde de battement (Hz)

$f_1$  : Fréquence de l'onde #1 (Hz)

$f_2$  : Fréquence de l'onde #2 (Hz)

Preuve :

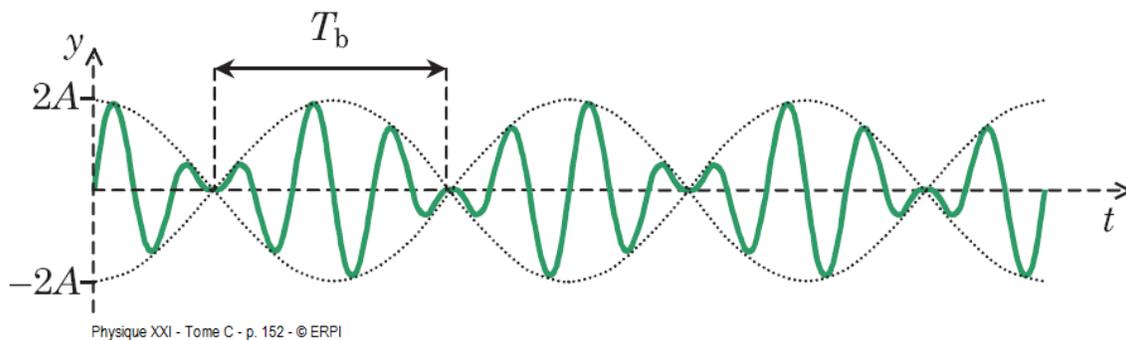
En construction ...

## L'équation des battements

En construction ...

Pour  $x = 0$ , nous avons

$$y = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)$$



- $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$  Fréquence angulaire du mouvement interne de l'enveloppe
- $\omega_b = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$  Fréquence angulaire de l'enveloppe (le battement)

**Situation 1 : Des battements entre deux haut-parleurs.** Deux haut-parleurs immobiles sont placés face à face. Ils émettent chacun un son de même amplitude à 680 Hz. Albert est situé entre les haut-parleurs et marche à 2 m/s vers l'un d'eux. On désire déterminer la fréquence des battements qu'il entend. (On suppose que le son se déplace à  $v_s = 340$  m/s).

Évaluons la fréquence  $f_1$  du son entendu par Albert du haut-parleur vers lequel il s'approche :

$$f' = \left( \frac{v_s \pm v_r}{v_s \pm v_e} \right) f \quad \Rightarrow \quad f_1 = \left( \frac{v_s + v_r}{v_s} \right) f \quad (\text{Rapprochement du récepteur, donc } f \uparrow)$$

$$\Rightarrow \quad f_1 = \left( \frac{(340) + (2)}{(340)} \right) (680) \quad (\text{Remplacer valeurs numériques})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f_1 = 684 \text{ Hz}} \quad (\text{Évaluer } f_1)$$

Évaluons la fréquence  $f_2$  du son entendu par Albert du haut-parleur vers lequel il s'éloigne :

$$f' = \left( \frac{v_s \pm v_r}{v_s \pm v_e} \right) f \quad \Rightarrow \quad f_2 = \left( \frac{v_s - v_r}{v_s} \right) f \quad (\text{Éloignement du récepteur, donc } f \downarrow)$$

$$\Rightarrow \quad f_2 = \left( \frac{(340) - (2)}{(340)} \right) (680) \quad (\text{Remplacer valeurs numériques})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f_2 = 676 \text{ Hz}} \quad (\text{Évaluer } f_2)$$

Évaluons la fréquence de battement  $f_b$  à partir des deux fréquences entendues par Albert :

$$f_b = |f_1 - f_2| \quad \Rightarrow \quad f_b = |(684) - (676)| \quad (\text{Remplacer valeurs numériques})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f_b = 8 \text{ Hz}} \quad (\text{Évaluer } f_b)$$











# Chapitre 1.15 – La puissance et l'intensité

## L'intensité

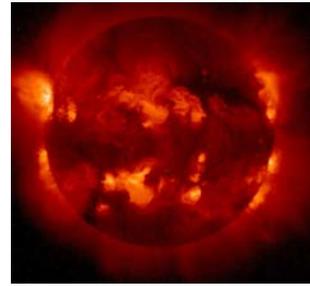
L'intensité mesure la répartition de la puissance<sup>1</sup> dans l'espace et correspond à une puissance par unité de surface. On peut également définir l'intensité comme étant une mesure d'énergie interceptée par une cible de 1 m<sup>2</sup> par unité de temps.

Intensité moyenne :

$$\bar{I} = \frac{P}{A}$$

Intensité instantanée :

$$I = \frac{dP}{dA}$$



L'intensité lumineuse du soleil diminue avec le carré de la distance, car le rayonnement est sphérique.

où  $I$  : Intensité de l'énergie (W/m<sup>2</sup>)

$P$  : La puissance (W)

$A$  : Surface sur laquelle la puissance est répartie (m<sup>2</sup>)

$$(P = dE / dt)$$

## Intensité d'une onde sonore omnidirectionnelle

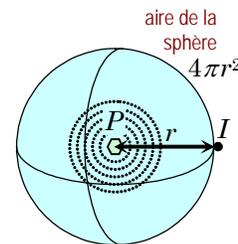
Puisque les fronts d'ondes associées à une source omnidirectionnelle sont représentés par des sphères dont le rayon augmente en fonction du temps, la conservation de l'énergie impose que l'intensité doit diminuer en fonction du carré de la distance puisque l'onde stimule un milieu toujours de plus en plus grand à mesure que l'onde se diffuse :

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}$$

où  $I$  : Intensité de l'onde sonore (W/m<sup>2</sup>)

$P$  : La puissance du haut-parleur (W)

$r$  : Distance entre l'observateur et la source (m)



## Intensité d'une onde sonore quelconque

L'expression de l'intensité d'une onde sonore peut être très complexe, car cela dépend de la forme de l'émetteur. Dans un cas d'un haut-parleur, la construction fait en sorte qu'il y a maximisation de l'intensité à l'avant du haut-parleur et minimisation de l'intensité à l'arrière. Puisque les fronts d'onde sont de forme conique, l'expression de la surface  $A$  associé au calcul de l'intensité  $I$  n'est pas égale à  $4\pi r^2$ .



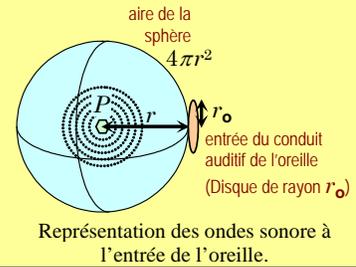
Un haut-parleur typique n'est pas une source omnidirectionnelle.



Image synthétique des ondes sonores générées par un haut-parleur

<sup>1</sup> La puissance correspond au rythme auquel l'énergie varie dans le temps ( $P = \Delta E / \Delta t$ ).

**Situation 1 : La puissance sonore captée par une oreille.** Un haut-parleur omnidirectionnel émet une puissance sonore de 10 W. On désire déterminer la puissance qui pénètre dans le conduit auditif de l'oreille d'une personne située à 20 m de distance : le conduit a un rayon de 3 mm. (On néglige l'effet de concentration des ondes sonores qui résulte de la forme du pavillon de l'oreille.)



Évaluons l'intensité du son à l'entrée de l'oreille :

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} \Rightarrow I = \frac{(10)}{4\pi(20)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{I = 1,99 \times 10^{-3} \text{ W/m}^2}$$

Évaluons la puissance qui entre dans l'oreille. Supposons que l'intensité est constante sur l'ensemble du conduit auditif de l'oreille :

$$I = \frac{P}{A} \Rightarrow P = IA \quad (\text{Isoler } P)$$

$$\Rightarrow P = I(\pi r_o^2) \quad (\text{Aire du disque, } A = \pi r_o^2)$$

$$\Rightarrow P = (1,99 \times 10^{-3})\pi(0,003)^2 \quad (\text{Remplacer valeurs numériques})$$

$$\Rightarrow \boxed{P = 5,63 \times 10^{-8} \text{ W}}$$

## Le décibel

Le décibel est une mesure de rapport d'intensité utilisant une échelle logarithmique. Cette mesure est basée sur l'intensité sonore minimum  $I_0$  qu'une oreille humaine peut percevoir :

$$\beta = 10 \log \left( \frac{I}{I_0} \right)$$



où  $\beta$  : Intensité sonore en décibel (dB)

$I$  : Intensité sonore en watt par mètre carré ( $\text{W/m}^2$ )

$I_0$  : Intensité sonore minimum perceptible par l'humain,  $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$

## Puissance sonore et ordre de grandeur

L'oreille humaine peut s'adapter à une grande variété d'intensité sonore<sup>2</sup> :

Action sonore	Intensité (W/m <sup>2</sup> )	Intensité (dB)
Son impossible à entendre	10 <sup>-13</sup> à 10 <sup>-12</sup>	-10 à 0
Seuil d'audibilité	10 <sup>-12</sup>	0
Cabine prise de son	10 <sup>-11</sup> à 10 <sup>-10</sup>	10 à 20
Conversation à voix basses	10 <sup>-10</sup> à 10 <sup>-9</sup>	20 à 30
Le bruit de la forêt	10 <sup>-9</sup> à 10 <sup>-8</sup>	30 à 40
Bibliothèque	10 <sup>-8</sup> à 10 <sup>-7</sup>	40 à 50
Lave-vaisselle	10 <sup>-7</sup> à 10 <sup>-6</sup>	50 à 60
Téléviseur, conversation	10 <sup>-6</sup> à 10 <sup>-5</sup>	60 à 70
Aspirateur	10 <sup>-5</sup> à 10 <sup>-4</sup>	70 à 80
Tondeuse à gazon	10 <sup>-4</sup> à 10 <sup>-3</sup>	80 à 90
Route à circulation dense	10 <sup>-3</sup> à 10 <sup>-2</sup>	90 à 100
Marteau-piqueur	10 <sup>-2</sup> à 10 <sup>-1</sup>	100 à 110
Discothèque, concert rock	10 <sup>-1</sup> à 10 <sup>0</sup>	110 à 120
Avion au décollage (300m)	10 <sup>0</sup> à 10 <sup>1</sup>	120 à 130

## Doubler l'intensité

Puisque l'intensité sonore en décibel est basée sur une échelle logarithmique, doubler l'intensité en W/m<sup>2</sup> n'est pas équivalent à doubler l'intensité sonore en décibel.

Propriété :  $\log(AB) = \log(A) + \log(B)$  (Produit dans un logarithme)

$$10\log(2) = 3,01 \quad (\log(2) = 0,301)$$

$$10\log(1/2) = -3,01 \quad (\log(-1/2) = -0,301)$$

Multiplicateur de l'intensité en W/m <sup>2</sup>	Expression de l'intensité en dB
0,125 ou 1 / 8	$\beta - 9,03$
0,25 ou 1 / 4	$\beta - 6,02$
0,5 ou 1 / 2	$\beta - 3,01$
1	$\beta$
2	$\beta + 3,01$
4	$\beta + 6,02$
8	$\beta + 9,03$

<sup>2</sup> Référence : <http://fr.wikipedia.org/wiki/D%C3%A9cibel>

Référence : Marc Séguin, Physique XXI Tome C

Note de cours rédigée par : Simon Vézina

**Situation 2 : L'intensité combinée de deux sources sonores.** Deux haut-parleurs génèrent chacun, à l'endroit où se trouve un auditeur, un son de 40 dB. On désire déterminer le nombre de décibels entendus par l'auditeur.

Puisque le décibel est une échelle logarithmique d'intensité, nous ne pouvons pas simplement additionner les décibels de chaque haut-parleur et donner comme puissance totale 80 dB. Nous devons additionner la puissance de chaque haut-parleur en  $\text{W/m}^2$  et reconvertir le tout en décibel.

Évaluons la puissance en d'un haut-parleur en  $\text{W/m}^2$  :

$$\begin{aligned} \beta &= 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right) &\Rightarrow & \frac{\beta}{10} = \log\left(\frac{I}{I_0}\right) && \text{(Isoler le log)} \\ & &\Rightarrow & \frac{(40)}{10} = \log\left(\frac{I}{(10^{-12})}\right) && \text{(Remplacer valeurs numériques)} \\ & &\Rightarrow & 4 = \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) && \\ & &\Rightarrow & 10^4 = \frac{I}{10^{-12}} && \text{(Mettre à l'exposant 10, } 10^{\log(a)} = a \text{)} \\ & &\Rightarrow & \boxed{I = 10^{-8} \text{ W/m}^2} && \end{aligned}$$

Notre puissance totale est alors :

$$I_{tot} = 2I = 2(10^{-8}) \Rightarrow I_{tot} = 2 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2$$

Évaluons maintenant la puissance en dB :

$$\begin{aligned} \beta &= 10 \log\left(\frac{I_{tot}}{I_0}\right) &\Rightarrow & \beta = 10 \log\left(\frac{(2 \times 10^{-8})}{(10^{-12})}\right) && \text{(Remplacer valeurs numériques)} \\ & &\Rightarrow & \boxed{\beta = 43,0 \text{ dB}} && \text{(Puissance totale en dB)} \end{aligned}$$

Nous pouvons également calculer plus rapidement ce résultat de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \beta &= 10 \log\left(\frac{I_{tot}}{I_0}\right) &\Rightarrow & \beta = 10 \log\left(\frac{2I}{I_0}\right) = 10 \log\left(2 \frac{I}{I_0}\right) && \text{(Remplacer } I_{tot} = 2I \text{)} \\ & &\Rightarrow & \beta = 10 \left[ \log(2) + \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \right] && \text{(} \log(ab) = \log(a) + \log(b) \text{)} \\ & &\Rightarrow & \beta = 10 \log(2) + 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right) && \text{(Distribution)} \\ & &\Rightarrow & \boxed{\beta = 3,01 + 40 = 43,0 \text{ dB}} && \text{(Puissance totale en dB)} \end{aligned}$$







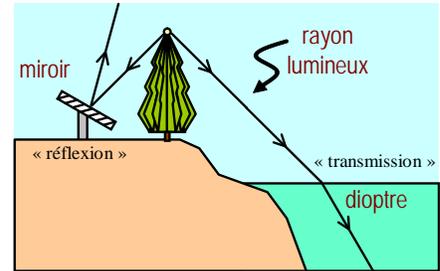


# Chapitre 2.1a – L'optique géométrique

## L'optique géométrique

L'optique est la branche de la physique qui étudie la lumière et ses propriétés. Cette théorie s'intéresse au processus de production de la lumière, à sa cinématique et de son interaction avec son environnement.

L'optique géométrique est une sous branche de l'optique qui étudie la cinématique de la lumière comme étant un **rayon** se déplaçant en **ligne droit** dans un **milieu homogène**. Cette théorie permet à la lumière d'effectuer des **réflexions** et des **réfractions** (transmission) lorsque la lumière rencontre une interface.



Un rayon va réfléchir sur les miroirs et va réfracter sur un dioptré.

On dénote deux types d'interface :

- 1) Miroir (réflexion) : Interface qui fait réfléchir un rayon incident à celle-ci.
- 2) Dioptré (transmission) : Interface qui fait transmettre un rayon incident à celle-ci.

## Le principe de Fermat

En 1657, le mathématicien Pierre de Fermat propose un principe permettant de justifier le comportement de la lumière en optique géométrique :

*La lumière se propage d'un point à l'autre de l'espace sur une trajectoire qui minimise le temps de parcours.*

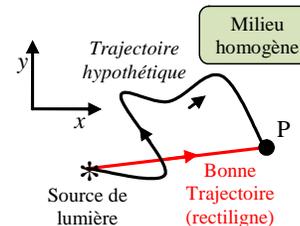


Pierre de Fermat (1601-1665)

Ce principe permet d'expliquer que la lumière se déplace sur une trajectoire rectiligne dans un milieu homogène respectant ainsi la règle de Pythagore :

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

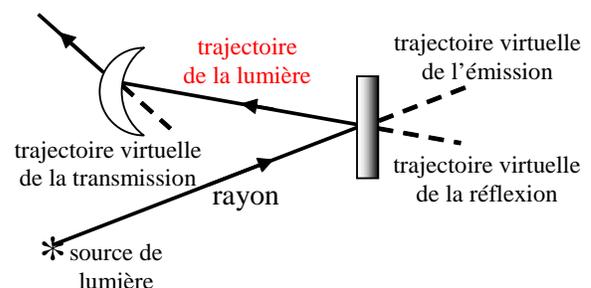
(preuve au chapitre 2.1b)



## Un rayon réel et virtuel

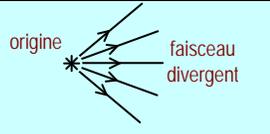
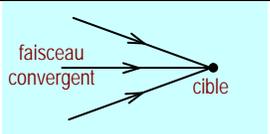
Un **rayon réel** est dessiné en **trait plein** et représente **la trajectoire réelle** du rayon.

Un **rayon virtuel** est dessiné en **trait pointillé** et représente le déplacement d'un rayon s'il n'avait pas subi de déviation ou représente le sens contraire du déplacement du rayon après déviation (son prolongement inverse).



# Un faisceau de lumière

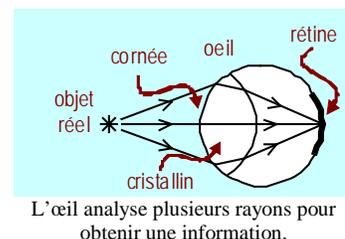
Un faisceau de lumière correspond à un groupe de rayon transportant une information commune, mais se déplaçant dans des directions différentes. En optique géométrique, on étudie deux types de faisceaux :

Divergent	Convergent
Faisceau ayant comme <b>origine</b> un point de référence dont les rayons s'éloignent de l'origine en étant de <b>plus en plus espacés</b> .	Faisceau ayant comme <b>cible</b> un point de référence dont les rayons se rapproche de la cible en étant de <b>moins en moins espacés</b> .
	

## Un objet

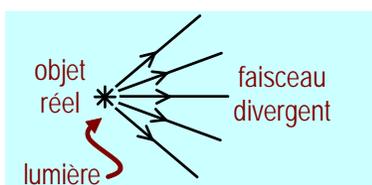
En optique géométrique, un **objet** est un point ponctuel faisant parti d'un corps à partir duquel un faisceau de rayons divergents est émis permettant de propager l'information du positionnement du point ponctuel.

Pour **interpréter** cette information, il est important de capter plusieurs de ces rayons et de les **recombinaer adéquatement** afin de concentrer l'énergie transportée par ces rayons pour stimuler le dispositif optique. Pour l'œil humain, la cornée et le cristallin joue le rôle de regrouper les rayons et la rétine interprète l'information transportée par les rayons (origine des rayons, couleurs).

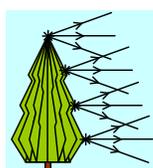


On distingue deux types d'objets :

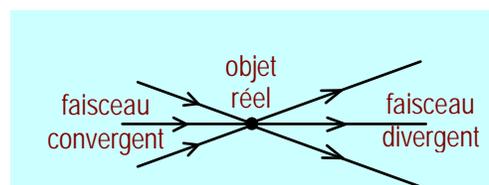
- Un **objet réel** est un **point de départ** pour un **faisceau divergent** issu d'une source de lumière, d'un objet qui réfléchit la lumière ambiant ou d'un faisceau convergent qui ne rencontre pas d'interface. Un objet réel est **toujours devant une interface**. Un objet réel **émet** des **rayons réels** (trait plein).



Objet réel étant la source primitive des rayons

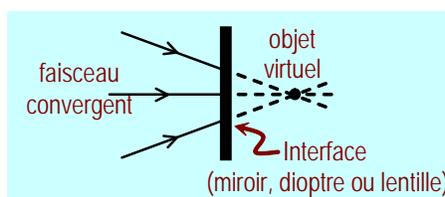


Un corps comporte plusieurs objets réels



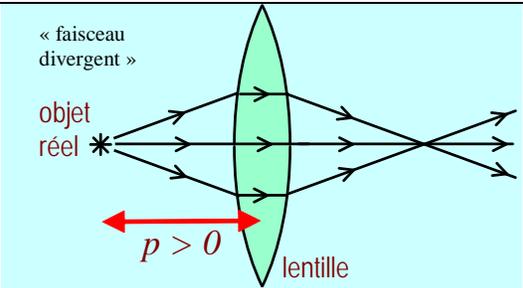
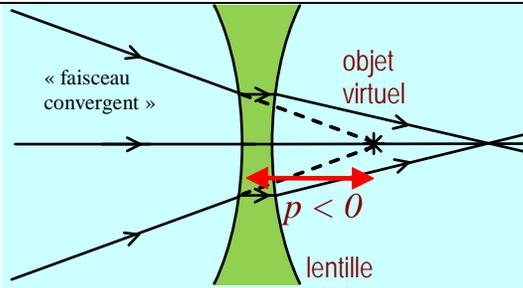
Objet réel résultant d'une déviation de rayons.

- Un **objet virtuel** est un **point d'arrivée** pour un **faisceau convergent** se dirigeant vers une interface qui intercepte le faisceau. Un objet virtuel est **toujours derrière une interface** et ne peut pas être créé naturellement. Un objet virtuel **reçoit** des **rayons virtuels** (trait pointillé).



# Équation en optique géométrique avec un objet

Dans un calcul de déviation d'un faisceau de lumière, on utilise la lettre «  $p$  » pour désigner la **distance** entre la **position de l'objet et l'interface** (lieu qui provoque la déviation du rayon). Le signe associé à «  $p$  » dépend du type de faisceau intercepté par l'interface :

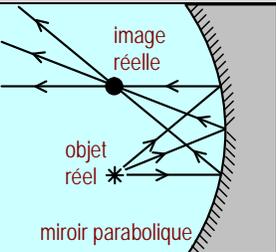
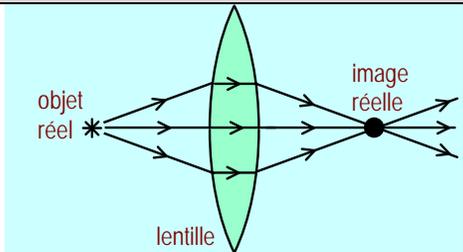
Objet réel (faisceau divergent)	Objet virtuel (faisceau convergent)
$p > 0$ (positif)	$p < 0$ (négatif)
 <p>« faisceau divergent » objet réel * <math>p &gt; 0</math> lentille</p> <p>Une lentille convergente qui fait dévier un faisceau divergent (objet réel) en faisceau convergent.</p>	 <p>« faisceau convergent » objet virtuel * <math>p &lt; 0</math> lentille</p> <p>Une lentille divergente qui fait dévier un faisceau convergent (objet virtuel) en faisceau moins convergent.</p>

## Une image

En optique géométrique, une **image** est un point ponctuel qui permet de réorientation un faisceau de rayons après la rencontre d'une interface.

On distingue deux types d'image :

- Une **image** est **réelle** si le **faisceau dévié converge** vers la position de l'image. L'image réelle sera toujours située du côté où les rayons voyagent après la déviation (devant pour un miroir et derrière pour un dioptré).

Image réelle en réflexion	Image réelle en transmission
 <p>image réelle * objet réel * miroir parabolique</p> <p>Un faisceau divergent réfléchi sur un miroir pour former un faisceau convergent.</p>	 <p>objet réel * image réelle * lentille</p> <p>Un faisceau divergent traverse une lentille pour former un faisceau convergent.</p>

- Une **image** est **virtuelle** si le **faisceau dévié diverge** et que le prolongement des rayons (sens contraire du déplacement du rayon) est orienté vers la position de l'image. L'image virtuelle sera toujours située du côté opposé où les rayons voyagent après la déviation (derrière pour un miroir et devant pour un dioptré).

Image virtuelle en réflexion	Image virtuelle en transmission
<p>Un faisceau divergent réfléchi sur un miroir pour former un faisceau divergent.</p>	<p>Un faisceau convergent traverse une lentille pour former un faisceau divergent.</p>

## Équation en optique géométrique avec une image

Dans un calcul de déviation d'un faisceau de lumière, on utilise la lettre «  $q$  » pour désigner la **distance** entre la **position de l'image** et **l'interface**. Le signe associé à «  $q$  » dépend du type de faisceau dévié par l'interface :

Image réelle (faisceau convergent)	Image virtuelle (faisceau divergent)
<p><math>q &gt; 0</math> (positif)</p> <p>Un miroir concave fait réfléchir un faisceau divergent (objet réel) en faisceau convergent (image réelle).</p>	<p><math>q &lt; 0</math> (négatif)</p> <p>Un miroir plan fait réfléchir un faisceau divergent (objet réel) en faisceau divergent (image virtuelle).</p>
<p>Une lentille convergente transmet un faisceau divergent (objet réel) en faisceau convergent (image réelle).</p>	<p>Une lentille divergente transmet un faisceau convergent (objet virtuel) en un faisceau divergent (image virtuelle).</p>

# L'équation générale de l'optique géométrique sous approximation

Tout au long de ce chapitre, vous devrez déterminer comment un groupe de rayons issus d'un même point (l'objet) sont déviés pour se diriger vers un même point (l'image) unique si une image nette peut être formée. Sous une certaine approximation<sup>1</sup>, nous utiliserons l'équation

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = D$$

pour déterminer la position d'une image  $q$  à partir de la position d'un objet  $p$ .

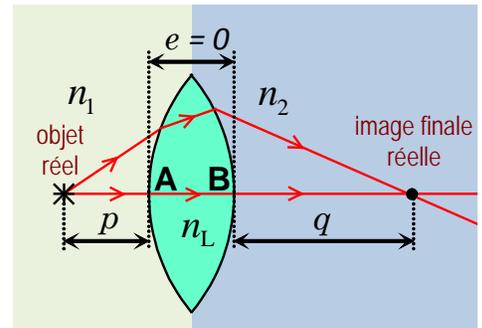


Illustration de l'équation ci-contre pour un double dioptre (chapitre 2.10).

Les paramètres :  $n_1$  et  $n_2$  (sans unité)

Le paramètre  $n$  portant le nom d'**indice de réfraction** correspond au rapport  $c/v$  tel que  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide et  $v$  est la vitesse de la lumière dans un matériau translucide. Ainsi, la déviation dépend du milieu d'où provient le rayon et du milieu où ils seront déviés. Il y aura réflexion si  $n_1 = n_2$  et transmission si  $n_1 \neq n_2$ .

Les paramètres :  $p$  et  $q$  (en m)

Ces paramètres dépendent de la distance entre l'objet et le déviateur (pour  $p$ ) puis de la distance entre l'image et le déviateur (pour  $q$ ). Un signe positif sera associé au terme « réel » et un signe négatif sera associé au terme « virtuelle ».

Le paramètre :  $D$  (en  $m^{-1}$ )

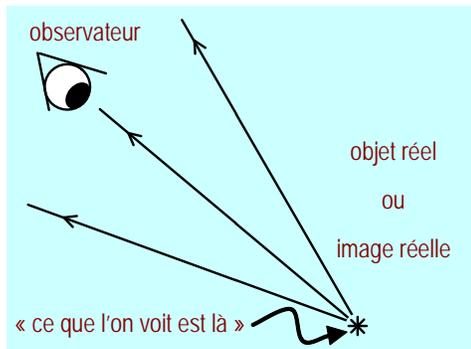
Le paramètre  $D$  (pour déviation) dépend du type de déviation (réflexion ou transmission) ainsi que de la forme géométrique sur laquelle tous les rayons seront déviés.

Miroir plan (chapitre 2.2)	Miroir sphérique (chapitre 2.3)	Dioptre sphérique (chapitre 2.5a)	Lentille mince (air) (chapitre 2.7)
$D = 0$	$D = \frac{2}{R}$	$D = \frac{n_2 - n_1}{R}$	$D = (n_L - 1) \left( \frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right)$

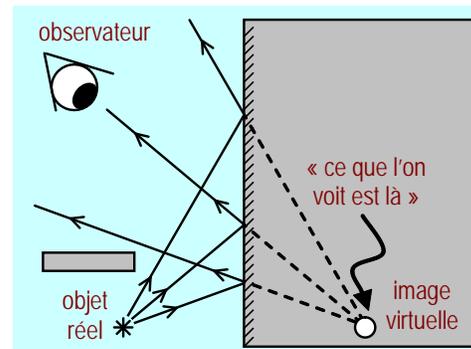
<sup>1</sup> L'approximation qui sera utilisée portera le nom de l'approximation des rayons paraxiaux.

## « Voir à l'œil » une image réelle ou virtuelle

Pour « voir à l'œil » une image, il faut obligatoirement que des rayons se dirigent vers l'œil. L'interprétation de l'œil revient à considérer que la lumière a toujours voyagé en ligne droite même s'il y a eu déviation antérieure. La coordonnée de l'image correspondra à la position de ce qui est vu par l'œil (que l'image soit réelle ou virtuelle).

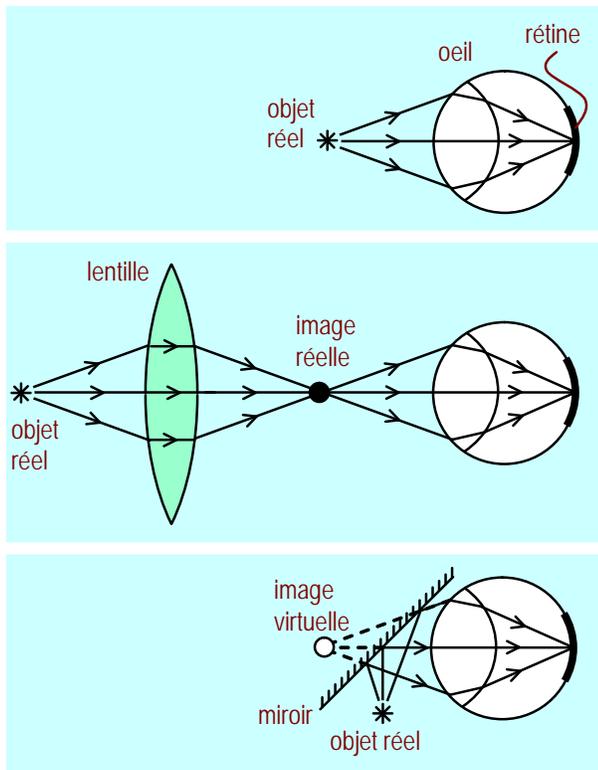


Un observateur localise une information correspondant à un objet réel ou une image réelle.

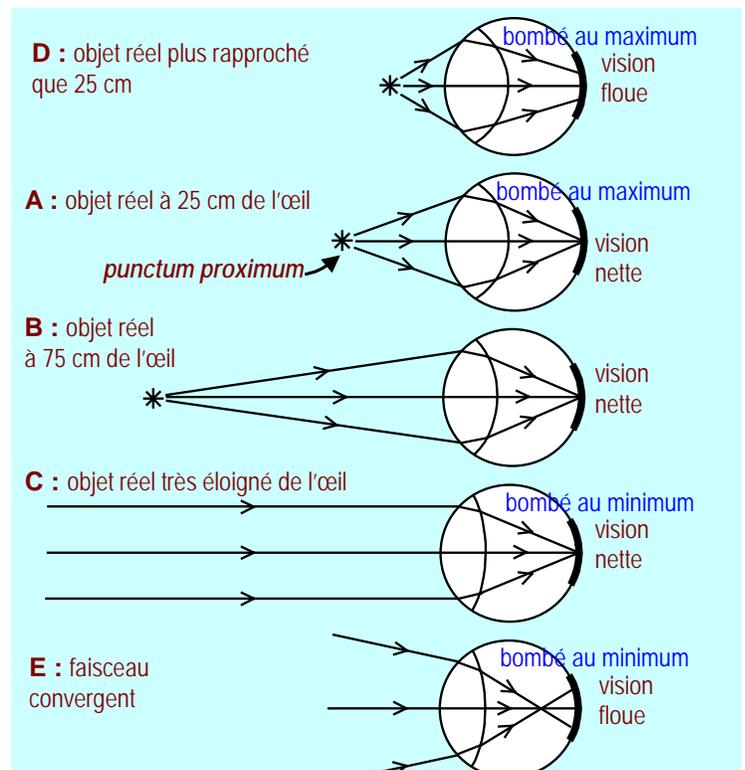


Un observateur localise une information correspondant à une image virtuelle.

Puisque l'œil doit capter plusieurs rayons pour interpréter une information, un **œil normal** peut interpréter uniquement un **faisceau divergent**. Le rôle de l'œil sera alors de faire converger le faisceau divergent sur la rétine grâce à la cornée et le cristallin. Un objet trop près de l'œil émettra un faisceau trop divergent et empêchera l'œil de former une image réelle unique sur la rétine dispersant ainsi l'information pour donner une vision floue.



Trois perceptions identiques pour l'œil.



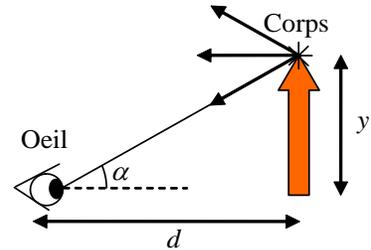
Vision de l'œil en fonction de la distance d'un objet devant l'œil.

## La taille angulaire

Dans un champ de vision, la perception de la taille d'un corps dépend de la taille angulaire qu'il occupe. On détermine la taille angulaire  $\alpha$  d'un corps avec un rapport entre la taille linéaire  $y$  du corps et la distance  $d$  qu'il est situé de l'observateur :

$$\alpha = \arctan\left(\frac{y}{d}\right)$$

où  $\alpha$  : Taille angulaire du corps  
 $y$  : Taille linéaire du corps (m)  
 $d$  : Distance du corps (m)

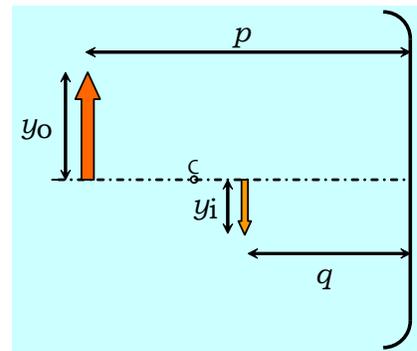


## Le grandissement linéaire

Le grandissement linéaire  $g$  correspond au rapport de la taille linéaire  $y_i$  d'une image créée par un déviateur de la lumière sur la taille linéaire  $y_o$  d'un objet :

$$g = \frac{y_i}{y_o}$$

où  $g$  : Grandissement linéaire  
 $y_i$  : Taille linéaire de l'image (m)  
 $y_o$  : Taille linéaire de l'objet (m)



Exemple :  $g < 0$  et  $|g| < 0$   
 Formation d'une image après une réflexion sur un miroir sphérique concave.

Signe :  $g > 0$  : image non inversée       $|g| > 1$  : image agrandie  
 $g < 0$  : image inversée                       $|g| < 1$  : image rapetissée

## Le grandissement angulaire

Le grandissement angulaire  $G$  correspond au rapport de la taille angulaire  $\alpha_i$  d'une image créée par un déviateur de la lumière sur la taille angulaire  $\alpha_o$  d'un objet observé à l'œil nu.

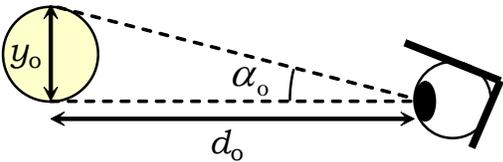
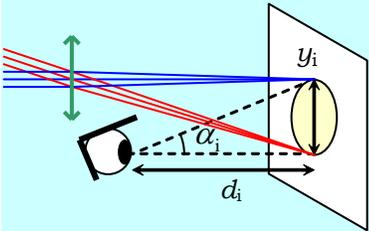
$$G = \frac{\alpha_i}{\alpha_o}$$

où  $G$  : Grandissement angulaire.  
 $\alpha_i$  : Taille angulaire de l'image.  
 $\alpha_o$  : Taille angulaire de l'objet à l'œil nu.

Signe :  $G > 0$  : image non inversée  
 $G < 0$  : image inversée  
 $|G| > 1$  : image apparaît plus grande  
 $|G| < 1$  : image apparaît plus petite

**Situation 1 : La taille de la Lune et de son image.** La Lune a un diamètre de 3480 km et elle se trouve à une distance de 384 000 km. À l'aide d'une lentille, Béatrice projette une image de la Lune sur un écran : l'image est inversée et son diamètre est de 2 cm. Béatrice se place à 50 cm de l'écran afin d'observer l'image de la Lune. On désire déterminer **(a)** le grandissement linéaire et **(b)** le grandissement angulaire. **P.S.** L'écran sera situé à la position de l'image.

Voici les informations disponibles dans l'énoncé :

Objet		Image	
Taille de l'objet	Distance de l'objet	Taille de l'image	Distance de l'image
$y_o = 3,48 \times 10^6 \text{ m}$	$d_o = 3,84 \times 10^8 \text{ m}$	$y_i = -2 \times 10^{-2} \text{ m}$ (image inversée)	$d_i = 50 \times 10^{-2} \text{ m}$
			

Évaluons le grandissement linéaire :

$$g = \frac{y_i}{y_o} \Rightarrow g = \frac{(-2 \times 10^{-2})}{(3,48 \times 10^6)} \Rightarrow \boxed{g = -5,75 \times 10^{-9}} \quad \text{(a)}$$

Évaluons la taille angulaire de l'objet et de l'image :

$$\alpha_o = \arctan\left(\frac{y_o}{d_o}\right) \qquad \alpha_i = \arctan\left(\frac{y_i}{d_i}\right)$$

$$\Rightarrow \alpha_o = \arctan\left(\frac{(3,48 \times 10^6)}{(3,84 \times 10^8)}\right) \qquad \Rightarrow \alpha_i = \arctan\left(\frac{(-2 \times 10^{-2})}{(50 \times 10^{-2})}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha_o = 0,5192^\circ} \qquad \Rightarrow \boxed{\alpha_i = -2,291^\circ}$$

Évaluons le grandissement angulaire :

$$G = \frac{\alpha_i}{\alpha_o} \Rightarrow G = \frac{(-2,291)}{(0,5192)} \Rightarrow \boxed{G = -4,41} \quad \text{(b)}$$

# Chapitre 2.1b – Le principe de Fermat

## Une fonctionnelle

Une fonctionnelle est une fonction prenant comme argument d'autres fonctions. Dans le cas de notre étude, la fonctionnelle en jeu sera une relation établissant une fonction  $x(t)$  et sa dérivée première  $\dot{x}(t) = dx/dt$  dont les deux fonctions sont paramétrisées par le temps  $t$  :

$$f = f(t, x(t), \dot{x}(t))$$

(fonctionnelle à une fonction  $x$  paramétrisée selon  $t$ )

L'objectif de la fonctionnelle sera de représenter/modéliser un concept physique.

Exemple : Fonctionnelle de l'énergie dans un mouvement à la verticale

$$E = \frac{1}{2}mv_y^2 + mgy \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + mgy$$

## L'équation d'Euler-Lagrange

Considérons une fonctionnelle  $J$  telle que son expression nécessite une intégrale par rapport au paramètre de paramétrisation  $t$  associé aux fonctions internes  $x(t)$  et  $\dot{x}(t)$  de la fonctionnelle  $f = f(t, x(t), \dot{x}(t))$  étant elle-même paramètre de la fonctionnelle  $J$  :

$$J = \int_{t=t_0}^t f(t, x(t), \dot{x}(t)) dt$$

(fonctionnelle  $J$  prenant comme paramètre la fonctionnelle  $f$ )

L'équation d'Euler-Lagrange correspond à l'équation différentielle correspondant à la condition nécessaire que doivent respecter les fonctions  $x(t)$  et  $\dot{x}(t)$  à l'intérieur de la fonctionnelle  $f$  pour que la fonctionnelle  $J$  soit stationnaire (minimale/maximale) :

$$\text{Si } J = \int_{t=t_0}^t f(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \text{ est stationnaire, alors } \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) = 0$$

En d'autres mots, la fonctionnelle  $J$  donne différents résultats selon l'expression de  $f$  qui dépend elle-même des expressions des fonctions  $x(t)$  et  $\dot{x}(t)$ . Si l'on veut que la fonctionnelle  $J$  donne un résultat extrénum (exemple : minimiser  $J$ ), les fonctions  $x(t)$  et  $\dot{x}(t)$  auront une forme particulière. Elles doivent nécessairement respecter l'équation d'Euler-Lagrange.

L'intérêt de ce théorème est le suivant :

*Tout concept physique ayant la modélisation de la fonctionnelle  $J$  pourra être maximisé/minimisé et l'expression des fonctions  $x(t)$  et  $\dot{x}(t)$  qui permettront cette minimisation pourront être obtenues après avoir résolu l'équation d'Euler-Lagrange appliquée à la fonction  $f$ .*

Preuve :

Considérons la fonctionnelle  $f$  tel que

$$f = f(t, x(t), \dot{x}(t))$$

où  $f$  dépend explicitement de  $x(t)$  et de  $\dot{x}(t)$ , mais ne dépend qu'implicitement de  $t$  par son lien avec  $x(t)$  et  $\dot{x}(t)$ .

Construisons également la fonctionnelle  $J$  tel que

$$J = \int f(t, x(t), \dot{x}(t)) dt .$$

Cherchons les solutions  $x(t)$  et  $\dot{x}(t)$  lorsque  **$J$  est stationnaire** (recherche d'un maximum/minimum). Nous devons satisfaire la **condition variationnelle**  $\delta J = 0$  (voir définition dans le bas de la page). Développons l'expression de  $J$  afin de déterminer les contraintes permettant d'obtenir notre fonctionnelle à l'état stationnaire :

$$\delta J = 0 \quad \text{(Condition de stationnarité)}$$

$$\Rightarrow \delta \int f dt = 0 \quad \text{(Remplacer } J \text{)}$$

$$\Rightarrow \int \delta f dt = 0 \quad \text{(Distribuer l'opérateur)}$$

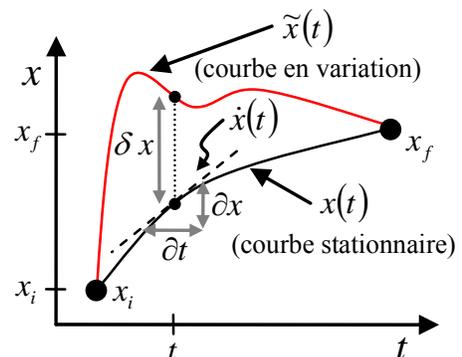
$$\Rightarrow \int \left( \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial t} \delta t \right) dt = 0 \quad \left( \delta f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\int \left( \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right) dt = 0} \quad \left( \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \text{ car } f \text{ dépend impli. de } t \right)$$

Expliquons en quelques mots la signification des termes en variations  $\partial x$ ,  $\delta x$ ,  $\partial \dot{x}$  et  $\delta \dot{x}$  :

- $\partial x$  : Variation infinitésimale de la fonction  $x(t)$  sous un voisinage  $dt$ .
- $\dot{x} = \partial x / \partial t$  : Fonction du taux de variation de la fonction  $x(t)$  en fonction du temps  $t$ .
- $\delta x$  : Variation infinitésimale entre la fonction en variation  $\tilde{x}(t)$  et la fonction stationnaire  $x(t)$  à un temps précis  $t$ .
- $\partial \dot{x}$  : Variation infinitésimale du taux de variation de la fonction  $x(t)$  (portant le nom de  $\dot{x}$ ) sous un voisinage  $dt$ .
- $\delta \dot{x}$  : Variation infinitésimale entre la fonction en variation  $\tilde{\dot{x}}(t)$  et la fonction stationnaire  $\dot{x}(t)$  à un temps précis  $t$ .
- Puisque les fonctions  $\tilde{x}(t)$  et  $x(t)$  débutent en  $x_i$  et se terminent en  $x_f$ , nous avons aucune variation possible entre ces deux fonctions en  $t_i$  et  $t_f$  ce qui nous donne la relation suivante :

$$\delta x_i = \delta x_f = 0$$



Effectuons la dérivée totale au produit des deux fonctions  $u$  et  $v$  suivantes afin de remplacer le tout dans l'intégrale précédente nous permettant de factoriser un terme  $\delta x$  commun :

$$\begin{aligned}
 uv &= \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \delta x && (u = \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \text{ et } v = \delta x) \\
 \Rightarrow \frac{d}{dt} uv &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \delta x \right) && (\text{Dérivée totale selon } t) \\
 \Rightarrow \frac{d}{dt} uv &= \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \frac{d}{dt} (\delta x) + \delta x \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) && (d(uv) = u dv + v du) \\
 \Rightarrow \frac{d}{dt} uv &= \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \delta \left( \frac{dx}{dt} \right) + \delta x \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) && \left( \frac{d}{dt} (\delta x) = \delta \frac{dx}{dt} \right) \\
 \Rightarrow \frac{d}{dt} uv &= \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} + \delta x \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) && \left( \dot{x} = \frac{dx}{dt} \right) \\
 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \delta x \right) &= \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) \delta x && (\text{Réécrire } \frac{d}{dt} uv = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \delta x \right)) \\
 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \delta x \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) \delta x} &&& (\text{Isoler } \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x})
 \end{aligned}$$

Remplaçons cette nouvelle expression dans notre intégrale d'origine :

$$\begin{aligned}
 \int \left( \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right) dt &= 0 && (\text{Équation précédente}) \\
 \Rightarrow \int \left( \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \delta x \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) \delta x \right) dt &= 0 && (\text{Remplacer } \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x}) \\
 \Rightarrow \int \left( \left( \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) \right) \delta x + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \delta x \right) \right) dt &&& (\text{Factoriser } \delta x) \\
 \Rightarrow \int \left( \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) \right) \delta x dt + \int \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \delta x \right) dt &= 0 && (\text{Distribuer l'intégrale}) \\
 \Rightarrow \int_{t_i}^{t_f} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) \right) \delta x dt + \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \delta x \right) dt &= 0 && (\text{Poser les bornes de l'intégrale}) \\
 \Rightarrow \int_{t_i}^{t_f} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) \right) \delta x dt + \left[ \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \delta x \right]_{t_i}^{t_f} &= 0 && (2^{\text{ième}} \text{ intégrale : } \int \frac{df}{dx} dx = f + C) \\
 \Rightarrow \int_{t_i}^{t_f} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) \right) \delta x dt + \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_f} \delta x_f - \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_i} \delta x_i \right) &= 0 && (\text{Borne : } \int_A^B f(x) dx = F(B) - F(A)) \\
 \Rightarrow \boxed{\int_{t_i}^{t_f} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) \right) \delta x dt = 0} &&& (\text{Condition : } \delta x_i = \delta x_f = 0)
 \end{aligned}$$

Puisque l'ensemble des  $\delta x$  ne sont pas nuls sauf aux extrémités de la courbe, nous pouvons satisfaire notre sommation égale à zéro uniquement si l'ensemble des termes associés à chaque  $\delta x$  sont nuls. Ainsi, la fonctionnelle  $J$  sera stationnaire ( $\delta J = 0$ ) uniquement sous la condition suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad \blacksquare$$

(condition nécessaire pour obtenir l'état stationnaire)

## Le principe de Fermat

Le mathématicien français Pierre de Fermat énonce en 1657 un principe permettant d'évaluer la trajectoire d'un rayon de lumière :

*La lumière se propage d'un point à un autre de l'espace en suivant une trajectoire telle que la durée du parcours est minimale.*

Ce principe fait intervenir un concept de recherche de trajectoire  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$  paramétrisées dans le temps  $t$  dont la solution de ces trajectoires minimise le temps de parcours. La modélisation de ce principe prend la forme alors d'une fonctionnelle  $J$  et l'application des équations d'Euler-Lagrange permettra d'évaluer la forme de la trajectoire admissible pour la lumière.



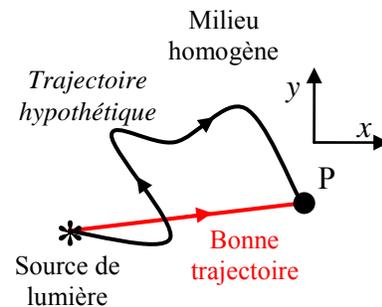
Pierre de Fermat  
(1601-1665)

## La trajectoire rectiligne dans un milieu homogène

Dans un milieu homogène, le principe de Fermat propose que la trajectoire d'un rayon de lumière corresponde à l'équation d'une droite qui respecte le théorème de Pythagore :

$$y = mx + b \quad \text{et} \quad T = \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{v}$$

(trajectoire de la lumière dans un milieu homogène)



Preuve : (en deux dimensions)

Considérons un élément de déplacement infinitésimal  $ds$  dans un plan cartésien  $xy$  et le temps de parcours infinitésimal  $dt$  requis pour effectuer le déplacement :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad \text{et} \quad dt = \frac{ds}{v} \quad (\text{car } v = \frac{ds}{dt})$$

Développons une expression totalisant le temps de parcours  $T$  :

$$T = \int dt \quad \Rightarrow \quad T = \int \frac{ds}{v} \quad (\text{Remplacer } dt)$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{1}{v} \int \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad (v \text{ constante, } ds = \sqrt{dx^2 + dy^2})$$

Puisque nous cherchons à établir le lien entre le changement des coordonnées  $x$  et  $y$  de la lumière dans le temps, nous savons que ces deux fonctions peuvent être paramétrisées dans le temps :

$$x = x(t) \quad \text{et} \quad y = y(t)$$

Nous allons maintenant réécrire l'expression du temps  $T$  sous une autre forme :

$$T = \frac{1}{v} \int \sqrt{dx^2 + dy^2} \Rightarrow T = \frac{1}{v} \int \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} dt\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} dt\right)^2} \quad (\text{Dérivée totale : } dx(t) = \frac{dx(t)}{dt} dt)$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{v} \int \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 dt^2} \quad (\text{Algèbre : } (AB)^2 = A^2 B^2)$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{v} \int \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \quad (\text{Factoriser } dt^2 \text{ et sortir racine})$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{v} \int_{t=t_0}^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt} \quad (\text{Notation : } \dot{x} = \frac{dx}{dt})$$

Puisque l'objectif est de minimiser  $T$  est que cette fonctionnelle respecte la forme requise pour appliquer les équations d'Euler-Lagrange, nous savons que les trajectoires  $x(t)$  et  $y(t)$  devons respecter les équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) = 0 \quad \text{tel que} \quad f = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

Calculons les termes associés aux équations d'Euler-Lagrange selon les dérivées en  $x$  :

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \right) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = 0} \quad (\text{car } f = f(\dot{x}, \dot{y}))$$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left( \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \right) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad \left( \frac{d f(x)^n}{dx} = n f(x)^{n-1} \frac{d f(x)}{dx} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} 2\dot{x} \quad \left( \frac{d x^n}{dx} = n x^{n-1} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{f}} \quad (\text{Simplifier avec } f = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} )$$

Par analogie avec les calculs effectués selon la variable  $x$ , nous avons pour la variable  $y$  :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{\dot{y}}{f}$$

(par analogie avec les calculs en  $x$ )

Regroupons nos calculs dans l'équation d'Euler-Lagrange pour la fonction  $x(t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) = 0 &\Rightarrow (0) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{x}}{f} \right) = 0 && \text{(Remplacer termes)} \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{x}}{f} \right) = 0 && \text{(Simplifier)} \\ &\Rightarrow \boxed{\frac{\dot{x}}{f} = k_x} && \left( \frac{df}{dx} = 0 \Leftrightarrow f = \text{constant} \right) \end{aligned}$$

Par analogie pour la fonction  $y(t)$ , nous avons :

$$\frac{\dot{y}}{f} = k_y$$

(par analogie avec les calculs en  $x$ )

En isolant  $f$  dans les deux équations précédentes, nous obtenons l'équation d'une droite  $y$  paramétrisée selon l'axe  $x$  ce qui décrit la trajectoire rectiligne ( $y = mx + b$ ) du rayon de lumière :

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}}{f} = k_x \quad \text{et} \quad \frac{\dot{y}}{f} = k_y &\Rightarrow \frac{\dot{y}}{k_y} = \frac{\dot{x}}{k_x} && \text{(Isoler } f \text{ et égaliser)} \\ &\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{k_y}{k_x} \frac{dx}{dt} && \text{(Notation : } \dot{x} = \frac{dx}{dt} \text{)} \\ &\Rightarrow dy = \frac{k_y}{k_x} dx && \text{(Simplifier } dt \text{)} \\ &\Rightarrow dy = m dx && \text{(Remplacer } m = \frac{k_y}{k_x} \text{)} \\ &\Rightarrow \int dy = \int m dx && \text{(Appliquer l'intégrale)} \\ &\Rightarrow y + C_y = m x + C_x && \left( \int dx = x + C \right) \\ &\Rightarrow y = m x + b \quad \blacksquare && \text{(Remplacer } b = C_x - C_y \text{)} \end{aligned}$$





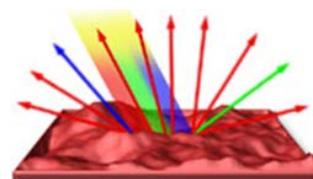
# Chapitre 2.2 – La réflexion et les miroirs plans

## La loi de la réflexion

La **réflexion** est le phénomène qui permet à la lumière de subir un changement de direction à la rencontre d'une interface principalement dans la direction perpendiculaire à la surface afin de demeurer dans le milieu d'origine.



Réflexion spéculaire



Réflexion diffuse

Une réflexion est **spéculaire** lorsqu'elle répond à la loi de la réflexion ( $\theta = \theta'$ ) et se comporte alors comme un miroir. Une réflexion est **diffuse** lorsque la lumière est réfléchi dans différentes directions. Un objet qui n'est pas une source de lumière se comporte comme un **objet réel** lorsqu'il réfléchit de façon diffuse la lumière provenant de son environnement.



La sphère réfléchit la lumière ambiante comme un miroir.



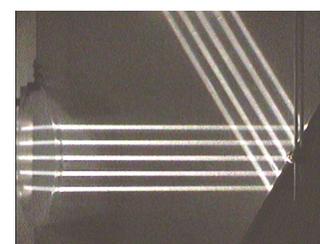
La poussière déposée sur la Lune réfléchit la lumière directionnelle provenant du Soleil dans toutes les directions.

La loi de la réflexion permet d'évaluer l'angle de réflexion  $\theta'$  à partir d'un angle d'incidence  $\theta$  d'un rayon de lumière par rapport à la normale à la surface (perpendiculaire à la surface). Le trajet optique respecte le principe de Fermat :

$$\theta' = \theta$$

où  $\theta'$  : Angle de réflexion par rapport à la normale à la surface.

$\theta$  : Angle incident par rapport à la normale à la surface

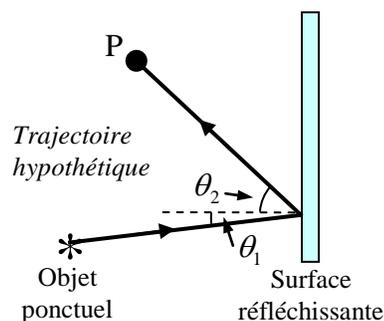


Un faisceau parallèle demeure parallèle après une réflexion sur un miroir.

### Preuve :

Considérons un objet ponctuel qui émet de la lumière dans toutes les directions. Étudions la trajectoire de la lumière qui réfléchit sur une surface plane et qui passe par un point P.

Grâce au **principe de Fermat**, évaluons la **trajectoire** de la lumière qui **minimise le temps de parcours  $t$**  afin d'établir un lien entre l'angle d'incidence  $\theta_1$  et l'angle de réflexion  $\theta_2$ .



Puisque la lumière voyage toujours dans le même milieu, elle se déplace donc à vitesse constante  $c$ . À partir des équations du MUA, nous pouvons déterminer la relation suivante entre le temps de parcours  $t$  et la distance à parcourir  $D$ , car la **lumière voyage en ligne droite** :

$$\Delta x = vt \quad \Rightarrow \quad (D) = (c)t$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{t = (D_1 + D_2)/c}$$

À partir du théorème de Pythagore, nous pouvons évaluer la distance  $D_1$  à partir de  $x_1$  et  $y_1$  et la distance  $D_2$  à partir de  $x_2$  et  $y_2$  :

$$D_1 = D_1(y_1) = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}, \quad x_1 = \text{constante}$$

et

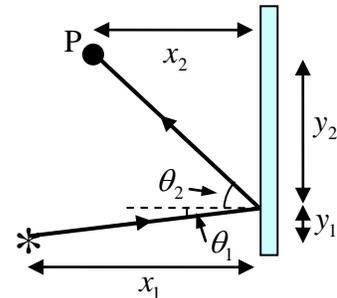
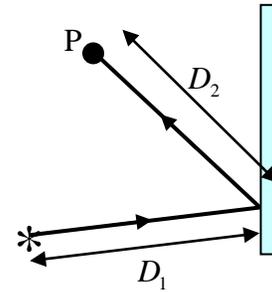
$$D_2 = D_2(y_2) = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}, \quad x_2 = \text{constante}$$

Important :  $y_1 + y_2 = \text{constante}$ , donc  $dy_1 + dy_2 = 0$

Dans le calcul, les **variables libres** sont  $y_1$  et  $y_2$ . Ces variables détermineront l'endroit où se produira la réflexion le long du miroir.

Appliquons la **dérivée à l'équation du temps de parcours**  $t$  précédente et égalisons la à **zéro** afin de trouver la **solution qui minimise le temps de parcours** :

$dt = 0$	(Minimiser $t$ )
$\Rightarrow d\left(\frac{D_1 + D_2}{c}\right) = 0$	(Remplacer $t = \frac{D_1 + D_2}{c}$ )
$\Rightarrow \frac{1}{c}d(D_1 + D_2) = 0$	(Factoriser $1/c$ )
$\Rightarrow d(D_1 + D_2) = 0$	(Multiplier par $c$ )
$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y_1}(D_1 + D_2)dy_1 + \frac{\partial}{\partial y_2}(D_1 + D_2)dy_2 = 0$	(Différentiel : $df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ )
$\Rightarrow \left(\frac{\partial D_1}{\partial y_1} + \frac{\partial D_2}{\partial y_1}\right)dy_1 + \left(\frac{\partial D_1}{\partial y_2} + \frac{\partial D_2}{\partial y_2}\right)dy_2 = 0$	(Distribuer la dérivée)
$\Rightarrow \frac{\partial D_1}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial D_2}{\partial y_2}dy_2 = 0$	( $\frac{\partial D_1}{\partial y_2} = 0$ et $\frac{\partial D_2}{\partial y_1} = 0$ )
$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial D_1}{\partial y_1}dy_1 = -\frac{\partial D_2}{\partial y_2}dy_2}$	(Séparer les termes)

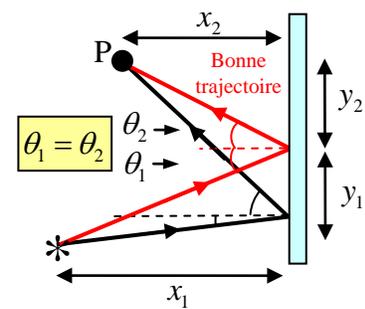


Lorsqu'on recherche la position où se produit la réflexion sur la surface, il faut faire varier  $y_1$  par  $dy_1$  et  $y_2$  par  $dy_2$ . Étant donné que  $y_1$  et  $y_2$  se partagent un espace constant ( $y_1 + y_2 = \text{constante}$ ), les variations de ces deux variables sont toujours de sens contraire (si  $dy_1 \uparrow$ , alors  $dy_2 \downarrow$ ). On peut donc affirmer la relation suivante :

$$dy_1 + dy_2 = 0 \Rightarrow dy_2 = -dy_1$$

Cette relation nous permet alors d'obtenir :

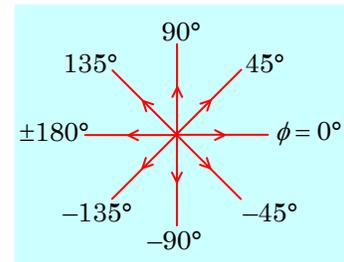
$\frac{\partial D_1}{\partial y_1} dy_1 = -\frac{\partial D_2}{\partial y_2} dy_2$	(Équation précédente)
$\Rightarrow \frac{\partial D_1}{\partial y_1} dy_1 = -\frac{\partial D_2}{\partial y_2} (-dy_1)$	(Remplacer $dy_2 = -dy_1$ )
$\Rightarrow \frac{\partial D_1}{\partial y_1} = \frac{\partial D_2}{\partial y_2}$	(Simplifier $dy_1$ )
$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y_1} (\sqrt{x_1^2 + y_1^2}) = \frac{\partial}{\partial y_2} (\sqrt{x_2^2 + y_2^2})$	(Pythagore : $D_{1,2} = \sqrt{x_{1,2}^2 + y_{1,2}^2}$ )
$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \frac{\partial (x_1^2 + y_1^2)}{\partial y_1} = \frac{1}{2\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \frac{\partial (x_2^2 + y_2^2)}{\partial y_2}$	(Dérivée : $\frac{\partial (f(x)^n)}{\partial x} = n f(x)^{n-1} \frac{\partial f(x)}{\partial x}$ )
$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} (2y_1) = \frac{1}{2\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} (2y_2)$	(Dérivée : $\frac{\partial (x^n)}{\partial x} = n x^{n-1}$ )
$\Rightarrow \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = \frac{y_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$	(Simplifier facteur 2)
$\Rightarrow y_1 \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = y_2 \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$	(Multiplier pour retirer dénomi.)
$\Rightarrow y_1^2 (x_2^2 + y_2^2) = y_2^2 (x_1^2 + y_1^2)$	(Mettre au carré)
$\Rightarrow y_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 = y_2^2 x_1^2 + y_2^2 y_1^2$	(Distribution)
$\Rightarrow y_1^2 x_2^2 = y_2^2 x_1^2$	(Soustraire $y_1^2 y_2^2$ )
$\Rightarrow y_1 x_2 = y_2 x_1$	(Appliquer racine)
$\Rightarrow \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$	(Exprimer en $y/x$ )
$\Rightarrow \tan(\theta_1) = \tan(\theta_2)$	( $\tan(\theta) = y/x$ )
$\Rightarrow \theta_1 = \theta_2$ ■	(Solution unique)



(schéma de la bonne trajectoire)

# L'angle de déviation

Lorsqu'un rayon de lumière subit un changement de direction, il est alors dévié de sa trajectoire rectiligne d'origine dont l'orientation est selon un angle  $\phi_i$  par un angle de déviation  $\delta$  ce qui lui donne une orientation selon un angle  $\phi_f$ . La déviation correspond alors à la soustraction entre l'orientation finale et l'orientation initiale :



L'orientation d'un rayon est basée sur le cercle trigonométrique.

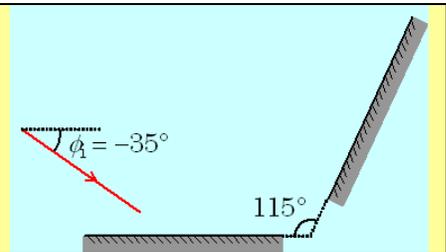
$$\phi_2 = \phi_1 + \delta_{12} \quad \text{ou bien} \quad \delta_{12} = \phi_2 - \phi_1$$

- où  $\delta_{12}$  : Angle de déviation d'un rayon (degré ou rad)
- $\phi_1$  : Orientation initiale d'un rayon (degré ou rad)
- $\phi_2$  : Orientation finale d'un rayon (degré ou rad)

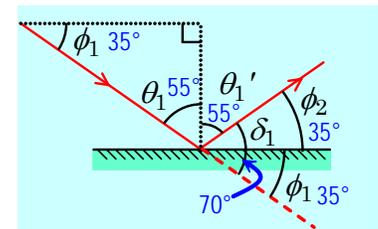
Exemple : ( $\phi_i = 0$  et  $\phi_f = \delta$ )



**Situation 1 : Une double réflexion.** Un rayon dont l'orientation initiale est  $\phi_i = -35^\circ$  est réfléchi par un miroir horizontal, puis par un second miroir incliné à  $115^\circ$  par rapport au premier (schéma ci-contre). On désire déterminer (a) l'angle de déviation total par rapport au rayon initial ainsi que (b) l'orientation finale du rayon (après la seconde réflexion)

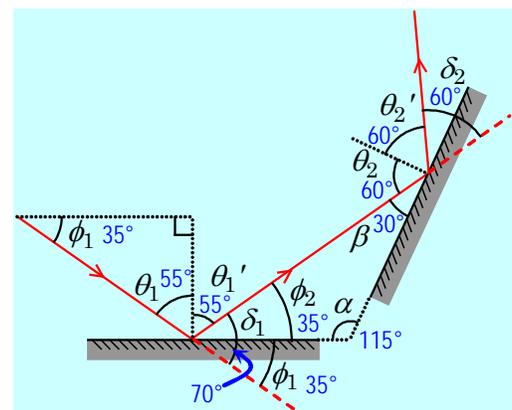


Évaluons l'angle de réflexion  $\theta_1'$  à partir de la loi de la réflexion et l'orientation initiale  $\phi_i$  : (avec angle en valeur absolue)



$$\begin{aligned} \theta_1' = \theta_1 &\Rightarrow \theta_1' = (180^\circ - 90^\circ - \phi_1) \quad (180^\circ \text{ dans triangle}) \\ &\Rightarrow \theta_1' = 90^\circ - (35^\circ) \quad (\text{Remplacer val. num.}) \\ &\Rightarrow \boxed{\theta_1' = 55^\circ} \quad (\text{Évaluer } \theta_1') \end{aligned}$$

Évaluons l'angle de réflexion  $\theta_2'$  :



$$\begin{aligned} \theta_2' = \theta_2 &\quad (\text{Loi de la réflexion}) \\ \Rightarrow \theta_2' = (90^\circ - \beta) &\quad (\text{Angle droit}) \\ \Rightarrow \theta_2' = 90^\circ - (180^\circ - \phi_2 - \alpha) &\quad (180^\circ \text{ dans triangle}) \\ \Rightarrow \theta_2' = -90^\circ + \phi_2 + \alpha &\quad (\text{Simplifier}) \\ \Rightarrow \theta_2' = -90^\circ + (90^\circ - \theta_1') + \alpha &\quad (\text{Angle droit}) \\ \Rightarrow \theta_2' = -(55^\circ) + (115^\circ) &\quad (\text{Simplifier et rempl.}) \\ \Rightarrow \boxed{\theta_2' = 60^\circ} \end{aligned}$$

Nous pouvons évaluer la déviation du rayon incident en effectuant les calculs suivants :

$$\delta_1 = 180^\circ - \theta_1 - \theta_1' \Rightarrow \delta_1 = 180^\circ - (55^\circ) - (55^\circ)$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta_1 = 70^\circ}$$

$$\delta_2 = 180^\circ - \theta_2 - \theta_2' \Rightarrow \delta_2 = 180^\circ - (60^\circ) - (60^\circ)$$

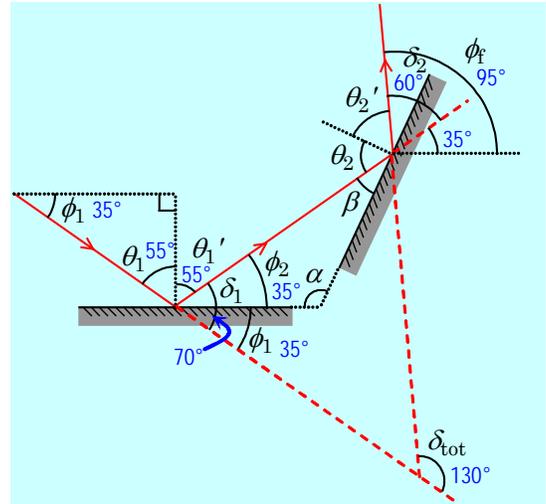
$$\Rightarrow \boxed{\delta_2 = 60^\circ}$$

$$\delta_{\text{tot}} = \delta_1 + \delta_2 \Rightarrow \delta_{\text{tot}} = (70^\circ) + (60^\circ)$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta_{\text{tot}} = 130^\circ} \quad \text{(a)}$$

$$\delta_{\text{tot}} = \phi_f - \phi_i \Rightarrow (130^\circ) = \phi_f - (-35^\circ)$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi_f = 95^\circ} \quad \text{(b)}$$



### Remarque :

On réalise que la déviation d'un rayon sous une réflexion correspond à

$$\delta = 180^\circ - 2\theta$$

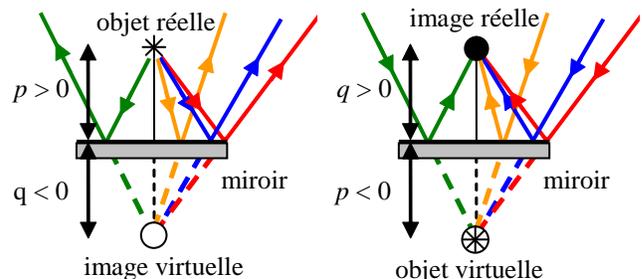
où  $\delta$  est la déviation du rayon sous une réflexion et  $\theta$  est l'angle d'incidence du rayon réfléchi.

## La position des images avec réflexion sur un miroir plan

La position d'une image associée à la réflexion sur un miroir plan d'un objet (réel ou virtuel) est située face à l'objet de l'autre côté du miroir :

$$q = -p$$

où  $q$  : Distance entre l'image et le miroir (m)  
 $p$  : Distance entre l'objet et le miroir (m)



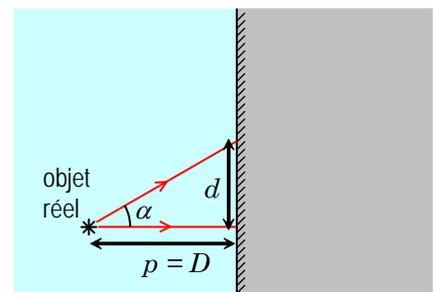
### Convention :

- $p > 0$  : objet réel
- $p < 0$  : objet virtuel
- $q > 0$  : image réelle
- $q < 0$  : image virtuelle

### Preuve :

Considérons un objet situé à une distance  $p = D$  d'un miroir. Lançons un 1<sup>er</sup> rayon perpendiculairement sur la surface du miroir et un 2<sup>ème</sup> à un angle  $\alpha$  par rapport à l'autre rayon. C'est deux rayons toucherons le miroir séparé par une distance  $d$  tel que

$$\tan(\alpha) = \frac{d}{D} .$$



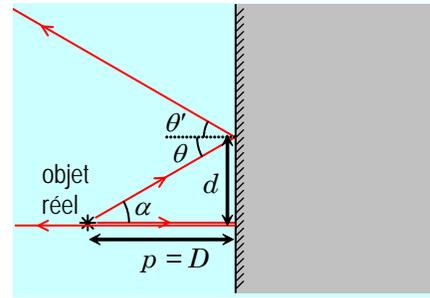
En appliquant la **loi de la réflexion**, le 1<sup>ier</sup> rayon est dévié d'un angle  $\delta_1 = 180^\circ$  (revient sur ses pas) et le 2<sup>ième</sup> sera dévié d'un angle

$$\delta_2 = 180^\circ - 2\alpha$$

(remarque précédente)

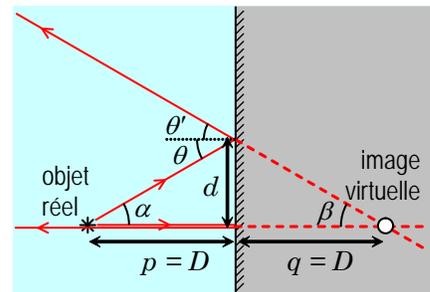
car nous avons les relations d'égalité suivante entre nos angles :

- $\alpha = \theta$  (angle alterne-interne)
- $\theta' = \theta$  (loi de la réflexion)



Si l'on prolonge du côté virtuel nos deux rayons réfléchis, nous trouvons un point d'intersection à une distance  $q$  du miroir dont le croisement fait un angle  $\alpha$  par rapport au 1<sup>ier</sup> rayon. Par une analyse de triangle semblable, nous pouvons démontrer que  $q = -p$  :

$$\begin{aligned} \tan(\beta) = \frac{d}{q} &\Rightarrow \tan(\theta') = \frac{d}{q} && \text{(angle correspondant)} \\ &\Rightarrow \tan(\theta) = \frac{d}{q} && \text{(loi de la réflexion)} \\ &\Rightarrow \tan(\alpha) = \frac{d}{q} && \text{(angle alterne-interne)} \\ &\Rightarrow \frac{d}{D} = \frac{d}{q} && \text{(définition tangente)} \\ &\Rightarrow q = D && \text{(Simplifier } d) \\ &\Rightarrow q = p && \text{(Remplacer } p = D) \\ &\Rightarrow q = -p \quad \blacksquare && \text{(Appliquer conven. signe)} \end{aligned}$$



Cette démonstration est effectuée avec un objet réel, mais elle reste valable avec un objet virtuel.

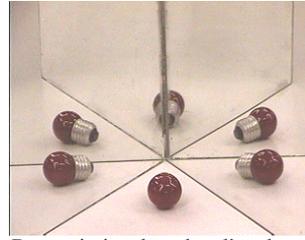
## Une réflexion multiple et procédure itérative

Après une réflexion sur un miroir, l'**image formée** devient source d'un faisceau divergent et joue le rôle d'**objet** pour une **seconde déviation**. L'équation précédente s'applique seulement si le second miroir se retrouve dans le champ de réflexion du premier miroir.

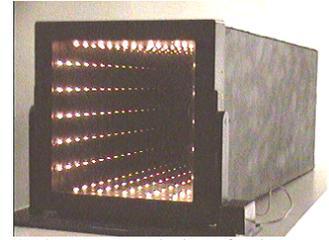
Double réflexion	Réflexion simple

Pour trouver l'ensemble des images formées à partir d'un objet réel initial, il faut itérer sur l'ensemble des possibilités admissibles de réflexion.

Selon la configuration des miroirs, nous pouvons observer un nombre fini ou infini d'image.

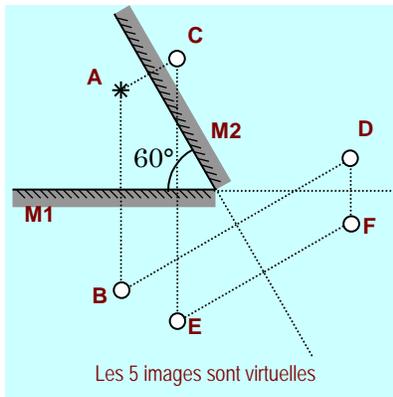


Deux miroirs plans dont l'angle qui les sépare est inférieur de  $60^\circ$ . (5 images)



Boîte avec un miroir au fond et une plaque semi-transparente à l'avant. (nombre infini d'images)

**Situation 2 : Combien d'images?** On place un objet réel entre deux miroirs qui font un angle de  $60^\circ$  entre eux. On désire représenter la situation sur un schéma en indiquant la position de toutes les images qui se forment. (On peut placer l'objet n'importe où entre les deux miroirs.)



- A : objet réel;
- B : image de A dans le miroir M1
- C : image de A dans le miroir M2
- D : image de B dans le prolongement du miroir M2
- E : image de C dans le miroir M1
- F : image de E dans le prolongement du miroir M2  
ou image de D dans le prolongement du miroir M1

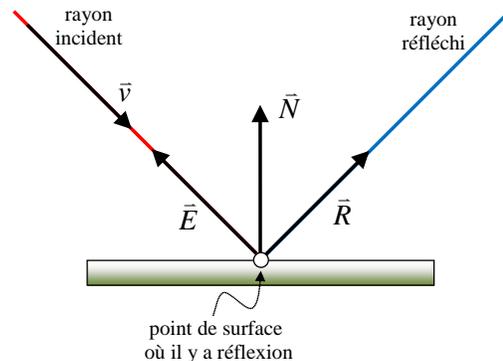
Toutes les autres réflexions se superposent sur les images déjà existantes (images toutes localisées).

## La réflexion sous forme vectorielle (complément informatique)

À l'aide d'une représentation vectorielle d'un rayon, un rayon incident  $\vec{v}$  à une normale à la surface  $\vec{N}$  peut être réorienté dans la direction  $\vec{R}$  par la loi de la réflexion grâce à l'équation suivante :

$$\vec{R} = \vec{v} + 2(\vec{E} \cdot \vec{N})\vec{N}$$

et  $\vec{E} = -\vec{v}$



- où  $\vec{R}$  : Orientation du rayon réfléchi (vecteur unitaire,  $|\vec{R}| = 1$ ).
- $\vec{v}$  : Orientation du rayon incident (vecteur unitaire,  $|\vec{v}| = 1$ ).
- $\vec{N}$  : Orientation de la normale à la surface (vecteur unitaire,  $|\vec{N}| = 1$ ).
- $\vec{E}$  : Orientation inverse du rayon incident (vecteur unitaire,  $|\vec{E}| = 1$ ).

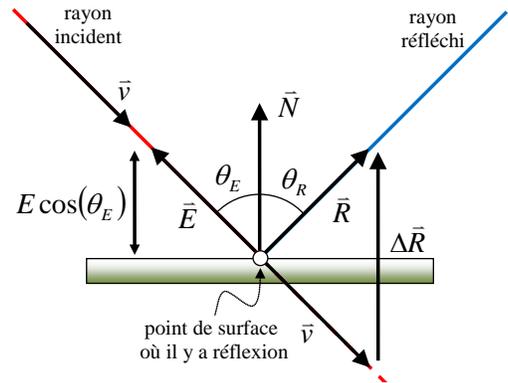
Preuve :

Considérons un rayon incident d'orientation (vecteur unitaire)  $\vec{v}$  se dirigeant vers une surface dont la normale est orientée selon le vecteur  $\vec{N}$  tel qu'illustré sur le schéma ci-contre.

Évaluons le vecteur réfléchi  $\vec{R}$  à l'aide du vecteur  $\vec{E} = -\vec{v}$  en respectant la loi de la réflexion étant

$$\theta_R = \theta_E$$

où  $\theta_R$  représente l'angle entre le rayon réfléchi et la normale à la surface et  $\theta_E$  représente l'angle entre le rayon incident inversé et la normale à la surface.



Puisque la réflexion nécessite d'inverser la composante du vecteur  $\vec{v}$  orientée selon la normale  $\vec{N}$ , nous réalisons que  $E \cos(\theta_E)$  correspond au module de la composante de  $\vec{v}$  parallèle à  $\vec{N}$  puisque  $\vec{E} = -\vec{v}$ . En ajoutant deux fois cette contribution dans le sens de la normale  $\vec{N}$  au vecteur  $\vec{v}$  sous la forme d'un changement de direction  $\Delta\vec{R}$ , nous obtenons le vecteur  $\vec{R}$  :

$$\begin{aligned} \vec{R} = \vec{v} + \Delta\vec{R} &\Rightarrow \vec{R} = \vec{v} + 2E \cos(\theta_E) \vec{N} && \text{(Remplacer } \Delta\vec{R} = 2E \cos(\theta_E) \vec{N} \text{)} \\ &\Rightarrow \vec{R} = \vec{v} + 2|\vec{E}| \cos(\theta_E) |\vec{N}| \vec{N} && \text{(Remplacer } E = |\vec{E}| = 1 \text{ et } \vec{N} = |\vec{N}| \vec{N} \text{)} \\ &\Rightarrow \vec{R} = \vec{v} + 2|\vec{E}| |\vec{N}| \cos(\theta_E) \vec{N} && \text{(Réorganisation)} \\ &\Rightarrow \vec{R} = \vec{v} + 2(\vec{E} \cdot \vec{N}) \vec{N} \quad \blacksquare && \text{(Remplacer } \vec{E} \cdot \vec{N} = |\vec{E}| |\vec{N}| \cos(\theta_E) > 0 \text{)} \end{aligned}$$

# Chapitre 2.3 – Les miroirs sphériques

## La forme d'un miroir sphérique

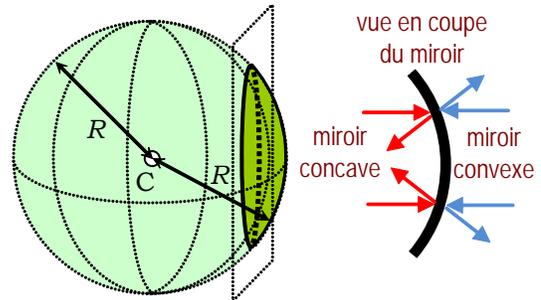
Un miroir sphérique est un miroir courbé tel que tout élément de surface du miroir est à une distance  $R$  du centre de courbure  $C$ . Le miroir sphérique correspondra alors à une tranche provenant d'une coquille sphérique.

Concave :

Réflexion sur la courbure interne de la sphère.

Convexe :

Réflexion sur la courbure externe de la sphère.



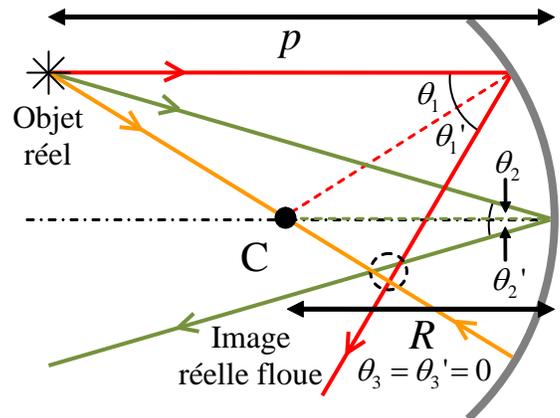
## La formation d'une image nette sous une approximation

Pour former une image nette, il est primordial que l'ensemble des rayons issus d'un objet se dirigeant vers un déviateur puissent être redirigés vers un même point. Nous remarquons que ce n'est malheureusement pas le cas pour un miroir sphérique.

Suivons la trajectoire de trois rayons issus d'un objet réel qui effectue une réflexion sur un miroir concave de rayon de courbure  $R$ . L'objet est situé à une distance  $y_o$  d'un axe optique (passant par le centre du miroir) et à une distance  $p$  du centre du miroir.

Les trois rayons respectant la loi de la réflexion sont :

- 1) Parallèle à l'axe optique :  $\theta_1' = \theta_1$
- 2) Visé le centre du miroir :  $\theta_2' = \theta_2$
- 3) Passé par le centre de courbure :  $\theta_3' = \theta_3 = 0$



Puisque les trois rayons ne se croisent pas au même endroit graphiquement, l'image finale est floue.

Afin de régler cette situation, nous allons introduire **l'approximation des rayons paraxiaux** (approximation de Gauss). Cela consiste à considérer que l'ensemble des rayons réfléchis par le miroir formant l'image sont relativement parallèle à l'axe optique.

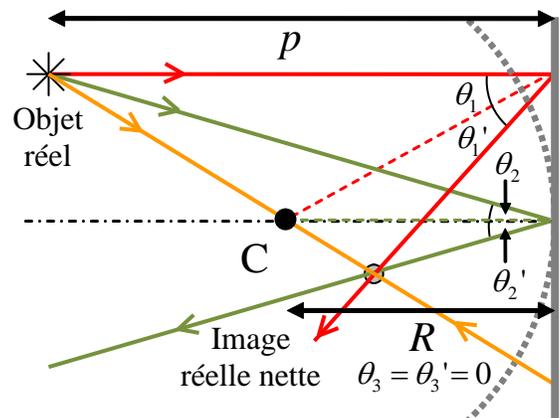
Ainsi :

- Les angles en jeu sont donc beaucoup plus petit que 1 radian ( $\theta \ll 1 \text{ rad}$ ).
- Tous les rayons parcourent une distance  $p$  parallèle à l'axe optique avant de réfléchir sur le miroir.

Référence : Marc Séguin, Physique XXI Tome C

Page 1

Note de cours rédigée par : Simon Vézina

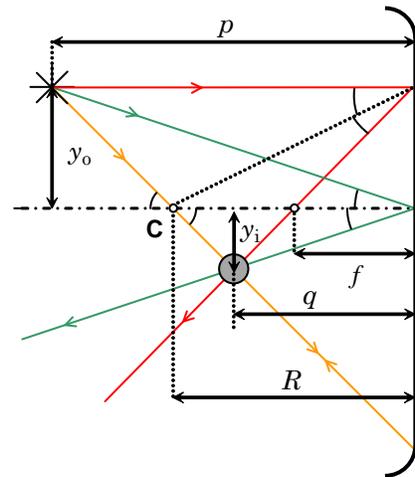


# Les équations du miroir sphérique

La position d'une image  $q$  nette associée à la position d'un objet  $p$  devant un miroir sphérique dépend uniquement du rayon de courbure  $R$  lorsque l'on applique la **contrainte des rayons paraxiaux** :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{R} \quad \text{et} \quad \frac{y_i}{y_o} = -\frac{q}{p}$$

- où
- $p$  : Distance entre l'objet et le miroir (m)
  - $q$  : Distance entre l'image et le miroir (m)
  - $R$  : Rayon de courbure du miroir (m)



### Convention :

- $R > 0$  : miroir convexe
- $R < 0$  : miroir concave
- $p > 0$  : objet réel
- $p < 0$  : objet virtuel
- $q > 0$  : image réelle
- $q < 0$  : image virtuelle

### Preuve :

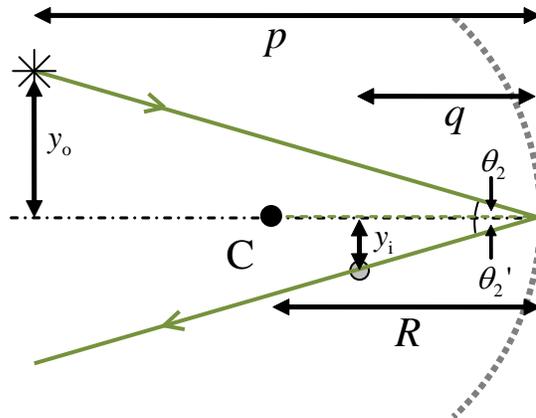
À partir d'un rayon passant par le centre du miroir, nous pouvons établir la relation géométrique suivante :

$$\tan(\theta_2) = \frac{y_o}{p} \quad \text{et} \quad \tan(\theta_2') = \frac{y_i}{q}$$

En utilisant la loi de la réflexion ( $\theta' = \theta$ ), nous pouvons conclure que :

$$\tan(\theta_2) = \tan(\theta_2') \Rightarrow \frac{y_o}{p} = \frac{y_i}{q} \quad (\text{Remplacer})$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{y_i}{y_o} = -\frac{q}{p}} \quad (\text{Isoler})$$



Il est important de remarquer que pour respecter la convention de signe, nous devons formuler la dernière équation de la façon suivante :

$$\frac{y_i}{y_o} = -\frac{q}{p} \quad \blacksquare (1)$$

(avec convention de signe,  $y_i < 0$  implique une inversion de l'image)

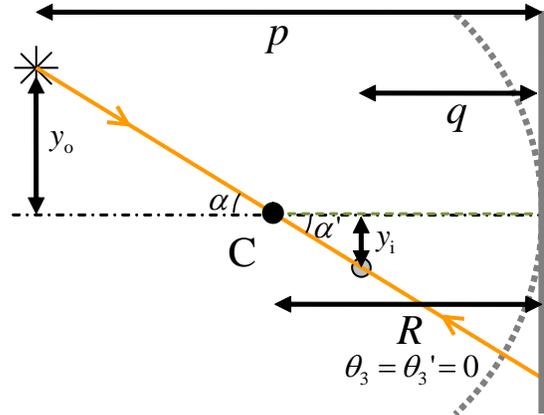
À partir du rayon passant par le centre de courbure du miroir, nous pouvons établir la relation géométrique suivante :

$$\tan(\alpha) = \frac{y_o}{p - R} \quad \text{et} \quad \tan(\alpha') = \frac{y_i}{R - q}$$

Puisque les deux angles  $\alpha$  et  $\alpha'$  sont des angles opposés par le sommet, nous pouvons conclure que :

$$\tan(\alpha) = \tan(\alpha') \Rightarrow \frac{y_o}{p - R} = \frac{y_i}{R - q} \quad (\text{Remplacer})$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{y_i}{y_o} = \frac{R - q}{p - R}} \quad (\text{Isoler})$$



Regroupons les deux expressions  $y_i / y_o$  afin de former l'expression désirée :

$$\begin{aligned} \frac{q}{p} &= \frac{R - q}{p - R} && \Rightarrow && q(p - R) = p(R - q) && (\text{Multiplier par les dénominateurs}) \\ &&& \Rightarrow && pq - qR = pR - pq && (\text{Distribution}) \\ &&& \Rightarrow && 2pq = pR + qR && (\text{Regrouper terme } pq) \\ &&& \Rightarrow && 2pq = R(p + q) && (\text{Factorier } R) \\ &&& \Rightarrow && \frac{2}{R} = \frac{p}{pq} + \frac{q}{pq} && (\text{Diviser par } pq) \\ &&& \Rightarrow && \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{R} \quad \blacksquare (2) && (\text{Simplifier}) \end{aligned}$$

## Le foyer d'un miroir sphérique

Le foyer d'un miroir sphérique est un point situé sur l'axe optique où est dévié un ensemble de rayons voyageant parallèlement à l'axe optique. De plus, un ensemble de rayons passant par ce foyer avant de réfléchir sur le miroir seront redirigés avec une orientation parallèle à l'axe optique.

Objet à l'infini	Objet sur le foyer
<p>Lorsqu'un objet est situé à une très grande distance (<math>p = \infty</math>) du miroir, tous les rayons réfléchis passeront par le foyer et y formera une image (<math>q = \pm f</math>).</p>	<p>Lorsqu'un objet est situé sur le foyer (<math>p = \pm f</math>) du miroir, tous les rayons réfléchis seront parallèles à l'axe central et l'image se formera à l'infini (<math>q = \infty</math>).</p>

La relation entre le rayon de courbure d'un miroir sphérique et son foyer est la suivante :

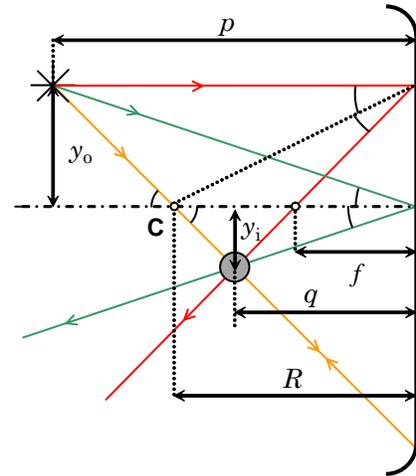
$$f = \frac{R}{2}$$

(miroir sphérique)

où  $f$  : Distance focal du miroir (m)  
 $R$  : Rayon de courbure du miroir (m)

Convention :

- $f > 0$  : miroir convexe
- $f < 0$  : miroir concave



Preuve :

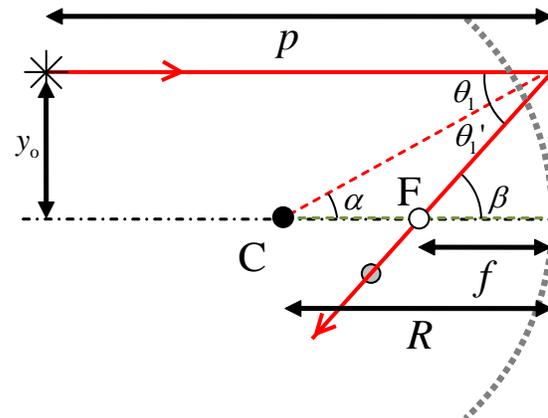
À partir du rayon voyageant parallèlement à l'axe central, nous pouvons établir la relation géométrique suivante :

$$\alpha = \theta_1 \quad \text{et} \quad \beta = \theta_1 + \theta_1'$$

(angle alterne interne)

En utilisant la loi de la réflexion ( $\theta' = \theta$ ), nous pouvons conclure que :

$$\begin{aligned} \beta = \theta_1 + \theta_1' &\Rightarrow \beta = \theta_1 + (\theta_1) \quad (\text{loi : } \theta_1' = \theta_1) \\ &\Rightarrow \boxed{\beta = 2\alpha} \quad (\text{avec } \alpha = \theta_1) \end{aligned}$$



Utilisons la définition de la fonction tangente et l'application de l'approximation des rayons paraxiaux ( $\tan(\theta) \approx \theta$  car  $\theta \ll 1$ ) afin d'obtenir :

$$\tan(\alpha) = \frac{y_o}{R} \quad \text{donc} \quad \alpha \approx \frac{y_o}{R} \qquad \tan(\beta) = \frac{y_o}{f} \quad \text{donc} \quad \beta \approx \frac{y_o}{f}$$

Relions nos deux approximations afin d'établir une relation entre  $f$  et  $R$  :

$$\begin{aligned} \beta = \frac{y_o}{f} &\Rightarrow (2\alpha) = \frac{y_o}{f} && \text{(Remplacer } \beta = 2\alpha \text{)} \\ &\Rightarrow 2\left(\frac{y_o}{R}\right) = \frac{y_o}{f} && \text{(Remplacer } \alpha = \frac{y_o}{R} \text{)} \\ &\Rightarrow f = \frac{R}{2} \quad \blacksquare \text{ (1)} && \text{(Simplifier et isoler } f \text{)} \end{aligned}$$

# Le four solaire

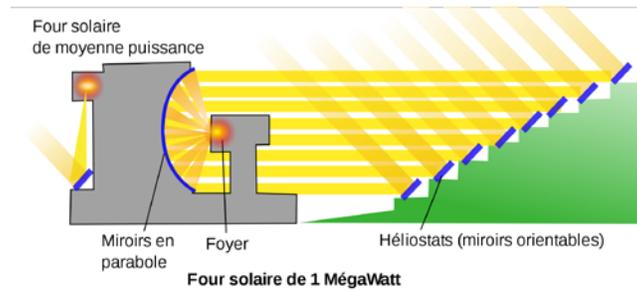
Un four solaire est une installation permettant de rediriger la lumière du Soleil par réflexion sur un miroir. Afin d'éviter la contrainte des rayons paraxiaux, on y utilise habituellement un miroir parabolique.

Le grand four d'Odeillo fut construit en 1962 en France et génère 1 MW de puissance à l'aide de son miroir parabolique de 54 m de hauteur et 48 m de largeur. Le site exploite 63 miroirs orientables afin de rediriger la lumière du Soleil vers le miroir afin que celui-ci puisse le concentrer.



LE PLUS GRAND FOUR SOLAIRE RAYONNE DANS LES PYRENEES  
<https://www.youtube.com/watch?v=bHAj0YI7ofI>  
 Le grand four d'Odeillo, un laboratoire de recherche du CNRS, France

En quelques secondes, ce dispositif permet d'atteindre des températures de 3500 °C au foyer de l'installation (température du Soleil : 5505 °C).



Four solaire de 1 MégaWatt  
[https://fr.wikipedia.org/wiki/Four\\_solaire\\_d%27Odeillo](https://fr.wikipedia.org/wiki/Four_solaire_d%27Odeillo)

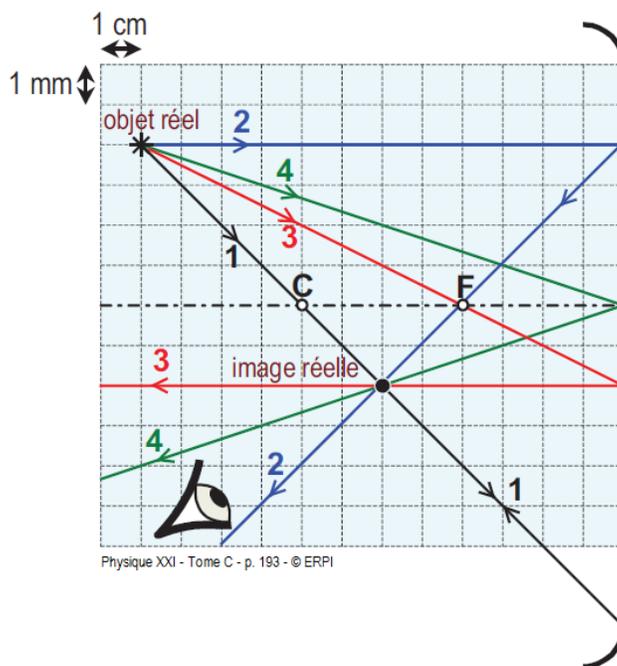
## Les rayons principaux d'un miroir sphérique

Voici les quatre rayons principaux d'un miroir sphérique en approximation des rayons paraxiaux :

<p>Passe par le centre de courbure et réfléchi sur lui-même.</p>	<p>Parallèle à l'axe, est réfléchi en passant par le foyer.</p>	<p>Passe par le foyer, et réfléchi parallèlement à l'axe.</p>	<p>Frappe le centre du miroir et est réfléchi de façon symétrique par rapport à l'axe.</p>

**Situation 2&3 : Le tracé des rayons principaux.** Un miroir sphérique *concave* possède un rayon de courbure de 8 cm. Un objet réel est situé à  $y_o = 4$  mm de l'axe optique, vis-à-vis d'un point situé à  $p = 12$  cm du miroir. On désire tracer les rayons principaux et déterminer la position de l'image par les équations.

En effectuant le tracé des rayons principaux, nous obtenons le résultat suivant :



Évaluons la position de l'image à partir de l'équation des miroirs sphériques :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{(R/2)} \quad (\text{Remplacer } f = \frac{R}{2})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{2}{R} - \frac{1}{p} \quad (\text{Isoler } \frac{1}{q})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{2}{(8\text{cm})} - \frac{1}{(12\text{cm})} \quad (\text{Objet réel : } p > 0, \text{ Miroir concave : } R > 0)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{q} = 0,1667 \text{ cm}^{-1} \quad (\text{Calcul})$$

$$\Rightarrow \boxed{q = 6 \text{ cm}} \quad (\text{Inversion, image réelle car } q > 0)$$

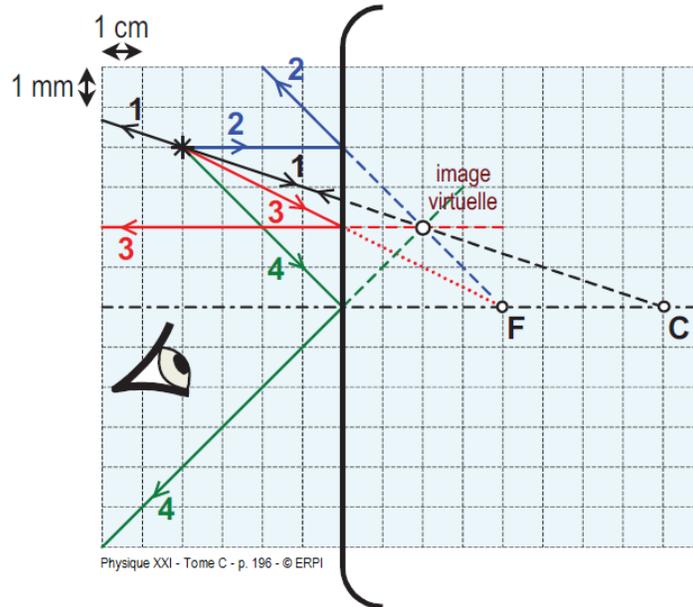
Évaluons la distance entre l'image et l'axe optique (taille de l'image) :

$$\frac{y_i}{y_o} = -\frac{q}{p} \Rightarrow \frac{y_i}{(4\text{mm})} = -\frac{(6\text{cm})}{(12\text{cm})} \quad (\text{Remplacer valeurs})$$

$$\Rightarrow \boxed{y_i = -2 \text{ mm}} \quad (\text{Calcul, image inversée car } y_i < 0)$$

**Situation 4 : Le tracé des rayons principaux pour un miroir convexe.** Un miroir sphérique *convexe* possède un rayon de courbure de 8 cm. Un objet réel est situé à  $y_o = 4$  mm de l'axe optique, vis-à-vis d'un point situé à  $p = 4$  cm du miroir. On désire tracer les rayons principaux et déterminer la position de l'image par les équations.

En effectuant le tracé des rayons principaux, nous obtenons le résultat suivant :



Évaluons la position de l'image à partir de l'équation des miroirs sphériques :

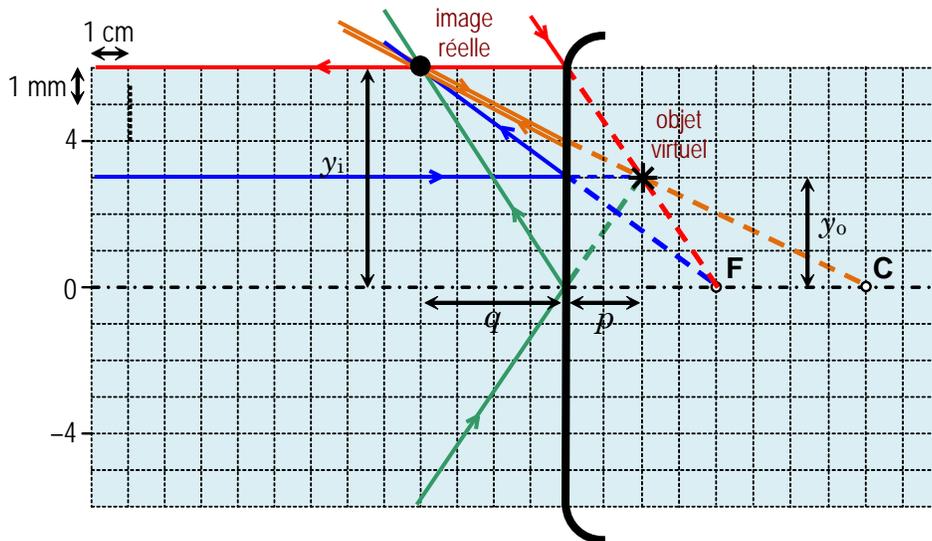
$$\begin{aligned} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} &= \frac{1}{f} &\Rightarrow &\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{(R/2)} && \text{(Remplacer } f = \frac{R}{2} \text{)} \\ &&\Rightarrow &\frac{1}{q} = \frac{2}{R} - \frac{1}{p} && \text{(Isoler } \frac{1}{q} \text{)} \\ &&\Rightarrow &\frac{1}{q} = \frac{2}{(-8\text{cm})} - \frac{1}{(4\text{cm})} && \text{(Objet réel : } p > 0, \text{ Miroir convexe : } R < 0 \text{)} \\ &&\Rightarrow &\frac{1}{q} = -0,5 \text{ cm}^{-1} && \text{(Calcul)} \\ &&\Rightarrow &\boxed{q = -2 \text{ cm}} && \text{(Inversion, image virtuelle car } q < 0 \text{)} \end{aligned}$$

Évaluons la distance entre l'image et l'axe optique (taille de l'image) :

$$\begin{aligned} \frac{y_i}{y_o} &= -\frac{q}{p} &\Rightarrow &\frac{y_i}{(4\text{mm})} = -\frac{(-2\text{cm})}{(4\text{cm})} && \text{(Remplacer valeurs)} \\ &&\Rightarrow &\boxed{y_i = 2 \text{ mm}} && \text{(Calcul, image non inversée car } y_i > 0 \text{)} \end{aligned}$$

**Situation A : Le tracé des rayons principaux pour un miroir convexe avec objet imaginaire.** Un miroir sphérique *convexe* possède un rayon de courbure de 8 cm. La lumière provenant d'un objet réel subit une déviation « inconnue » pour former une image réelle située à  $y_o = 3$  mm de l'axe optique, vis-à-vis d'un point situé à 2 cm derrière le miroir. On désire tracer les rayons principaux et déterminer la position de l'image par les équations.

Puisque l'image associée à la déviation « inconnue » génère une image réelle derrière le miroir, cette image sera associée à un objet virtuel pour la réflexion du miroir. Le faisceau d'origine sera alors convergent vers le miroir. En effectuant le tracé des rayons principaux, nous obtenons le résultat suivant :



Évaluons la position de l'image à partir de l'équation des miroirs sphériques :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{(R/2)} \quad (\text{Remplacer } f = \frac{R}{2})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{2}{R} - \frac{1}{p} \quad (\text{Isoler } \frac{1}{q})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{2}{(-8\text{ cm})} - \frac{1}{(-2\text{ cm})} \quad (\text{Objet virtuel : } p < 0, \text{ Miroir convexe : } R < 0)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{q} = 0,25 \text{ cm}^{-1} \quad (\text{Calcul})$$

$$\Rightarrow \boxed{q = 4 \text{ cm}} \quad (\text{Inversion, image réelle car } q > 0)$$

Évaluons la distance entre l'image et l'axe optique (taille de l'image) :

$$\frac{y_i}{y_o} = -\frac{q}{p} \Rightarrow \frac{y_i}{(3\text{ mm})} = -\frac{(4\text{ cm})}{(-2\text{ cm})} \quad (\text{Remplacer valeurs})$$

$$\Rightarrow \boxed{y_i = 6 \text{ mm}} \quad (\text{Calcul, image non inversée car } y_i > 0)$$

# Chapitre 2.4 – La réfraction

## La vitesse de la lumière dans un milieu

La lumière voyage dans le vide à une vitesse  $c = 3 \times 10^8$  m/s. Lorsqu'elle voyage dans un milieu, la lumière se déplace à vitesse  $v$  égale à la vitesse dans le vide divisé par un facteur  $n$  portant le nom d'**indice de réfraction** :

$$v = \frac{c}{n}$$

- où  $v$  : Vitesse de la lumière dans un milieu (m/s)
- $c$  : Vitesse de la lumière dans le vide,  $c = 3 \times 10^8$  m/s
- $n$  : Indice de réfraction du milieu

Voici une table d'indice de réfraction :

Air  $n = 1,0003$	Eau  $n = 1,33$	Plexiglas  $n = 1,49$	Verre crown  $n = 1,52$	Diamant  $n = 2,42$
--	--	--	---	--

## La loi de la réfraction

La **réfraction** est le phénomène qui permet à la lumière de passer d'un milieu à un autre ce qui occasionne une déviation. La **loi de la réfraction** établit un lien entre l'angle d'incidence  $\theta_1$  d'un rayon voyageant dans un milieu  $n_1$  et l'angle de réfraction  $\theta_2$  du même rayon réfracté dans un milieu  $n_2$ . Les angles sont mesurés par rapport à la normale à la surface de l'interface (dioptre) délimitant les deux milieux. Cette relation fut établie par Willebord Snell et René Descartes au 17<sup>e</sup> siècle :



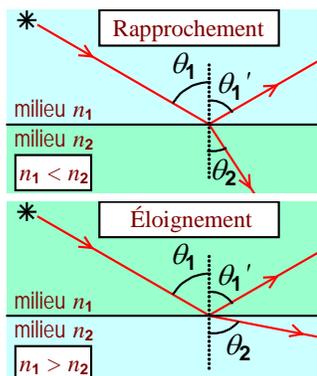
Willebord Snell  
(1580-1626)



René Descartes  
(1596-1650)

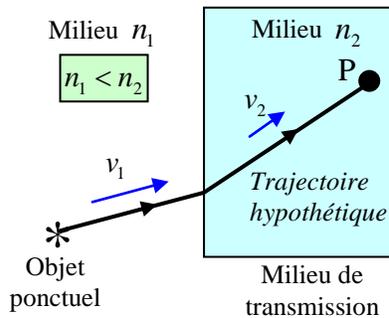
$$n_2 \sin(\theta_2) = n_1 \sin(\theta_1)$$

- où  $n_2$  : Indice de réfraction du milieu de réfraction
- $\theta_2$  : Angle de réfraction par rapport à la normale
- $n_1$  : Indice de réfraction du milieu incident
- $\theta_1$  : Angle incident par rapport à la normale



Preuve : (principe de Fermat)

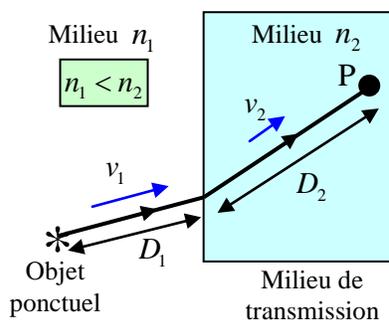
Considérons un objet ponctuel qui émet de la lumière dans toutes les directions. Étudions la trajectoire de la lumière qui est transmise via une interface plane (dioptré plan) d'un milieu d'indice de réfraction  $n_1$  vers un milieu d'indice de réfraction  $n_2$  et qui se dirige vers un point P. Considérons  $n_1 < n_2$ .



À partir du **principe de Fermat**, évaluons la **trajectoire** de la lumière qui **minimise** le **temps de parcours**  $t$  afin d'établir un lien entre l'angle d'incidence  $\theta_1$  et l'angle de réfraction  $\theta_2$ .

Puisque la lumière ne voyage pas toujours dans le même milieu, elle ne se déplace pas toujours à la même vitesse. Utilisons l'indice de réfraction afin de définir la vitesse de la lumière dans un milieu d'indice  $n$  :

$$v = c / n$$



À partir des équations du MUA, nous pouvons déterminer une relation de temps de parcours  $t_1$  et  $t_2$  pour la lumière dans le milieu  $n_1$  et dans le milieu de réfraction  $n_2$  sachant que la **lumière voyage en ligne droite**. Le temps de parcours total  $t$  sera l'addition de ces deux temps :

$$\Delta x = vt \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{Milieu } n_1 : \quad D_1 = v_1 t_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = D_1 / v_1 \\ \text{Milieu } n_2 : \quad D_2 = v_2 t_2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = D_2 / v_2 \end{array}$$

Alors :

$$t = t_1 + t_2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{D_1}{v_1} + \frac{D_2}{v_2}$$

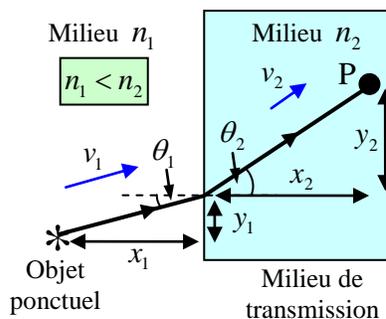
À partir du théorème de Pythagore, nous pouvons évaluer la distance  $D_1$  à partir de  $x_1$  et  $y_1$  et la distance  $D_2$  à partir de  $x_2$  et  $y_2$  :

$$D_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

et

$$D_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

Important :  $y_1 + y_2 = \text{constante}$



Dans le calcul du temps de parcours  $t$ , les variables sont  $y_1$  et  $y_2$  (distance verticale variable à parcourir verticalement dans chaque milieu) et les constantes sont  $x_1$  et  $x_2$  (distance horizontale obligatoire à parcourir dans chaque milieu).

Appliquons la **dérivée à l'équation du temps de parcours  $t$**  et égalisons la à **zéro** afin de trouver la **solution** qui **minimise le temps de parcours** :

$$dt = 0 \quad (\text{Minimiser } t)$$

$$\Rightarrow d\left(\frac{D_1}{v_1} + \frac{D_2}{v_2}\right) = 0 \quad (\text{Remplacer } t)$$

$$\Rightarrow d\left(\frac{D_1}{c/n_1} + \frac{D_2}{c/n_2}\right) = 0 \quad (\text{Remplacer } v = c/n)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c}d(n_1D_1 + n_2D_2) = 0 \quad (\text{Simplifier et factoriser } 1/c)$$

$$\Rightarrow d(n_1D_1 + n_2D_2) = 0 \quad (\text{Multiplier par } c)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y_1}(n_1D_1 + n_2D_2)dy_1 + \frac{\partial}{\partial y_2}(n_1D_1 + n_2D_2)dy_2 = 0 \quad (\text{Différentiel : } df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy)$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\partial(n_1D_1)}{\partial y_1} + \frac{\partial(n_2D_2)}{\partial y_1}\right]dy_1 + \left[\frac{\partial(n_1D_1)}{\partial y_2} + \frac{\partial(n_2D_2)}{\partial y_2}\right]dy_2 = 0 \quad (\text{Distribuer la dérivée})$$

$$\Rightarrow \left[n_1 \frac{\partial D_1}{\partial y_1} + n_2 \frac{\partial D_2}{\partial y_1}\right]dy_1 + \left[n_1 \frac{\partial D_1}{\partial y_2} + n_2 \frac{\partial D_2}{\partial y_2}\right]dy_2 = 0 \quad (\text{Factoriser constante } n)$$

Puisque la distance  $D_1$  ne dépend pas de  $y_2$ , alors :

Puisque la distance  $D_2$  ne dépend pas de  $y_1$ , alors :

$$\frac{\partial D_1}{\partial y_2} = \frac{\partial(\sqrt{x_1^2 + y_1^2})}{\partial y_2} = 0$$

$$\frac{\partial D_2}{\partial y_1} = \frac{\partial(\sqrt{x_2^2 + y_2^2})}{\partial y_1} = 0$$

Ces calculs permettent de simplifier l'équation précédente de la façon suivante :

$$\left[n_1 \frac{\partial D_1}{\partial y_1} + n_2 \frac{\partial D_2}{\partial y_1}\right]dy_1 + \left[n_1 \frac{\partial D_1}{\partial y_2} + n_2 \frac{\partial D_2}{\partial y_2}\right]dy_2 = 0 \quad (\text{Équation précédente})$$

$$\Rightarrow n_1 \frac{\partial D_1}{\partial y_1} dy_1 + n_2 \frac{\partial D_2}{\partial y_2} dy_2 = 0 \quad \left(\frac{\partial D_1}{\partial y_2} = 0 \text{ et } \frac{\partial D_2}{\partial y_1} = 0\right)$$

$$\Rightarrow n_1 \frac{\partial D_1}{\partial y_1} dy_1 = -n_2 \frac{\partial D_2}{\partial y_2} dy_2 \quad (\text{Séparer les termes})$$

Lorsqu'on recherche la position où se produit le changement de milieu, il faut faire varier  $y_1$  par  $dy_1$  et  $y_2$  par  $dy_2$ . Étant donné que  $y_1$  et  $y_2$  se partagent un espace constant ( $y_1 + y_2 = \text{constante}$ ), les variations de ces deux variables sont toujours de sens contraire (si  $dy_1 \uparrow$ , alors  $dy_2 \downarrow$ ). On peut donc affirmer la relation suivante :

$$dy_2 = -dy_1 \quad (\text{car } y_1 + y_2 = \text{constante})$$

Cette relation nous permet alors d'obtenir :

$$n_1 \frac{\partial D_1}{\partial y_1} dy_1 = -n_2 \frac{\partial D_2}{\partial y_2} dy_2 \quad (\text{Équation précédente})$$

$$\Rightarrow n_1 \frac{\partial D_1}{\partial y_1} dy_1 = -n_2 \frac{\partial D_2}{\partial y_2} (-dy_1) \quad (\text{Remplacer } dy_2 = -dy_1)$$

$$\Rightarrow n_1 \frac{\partial D_1}{\partial y_1} = n_2 \frac{\partial D_2}{\partial y_2} \quad (\text{Simplifier } dy_1)$$

$$\Rightarrow n_1 \frac{\partial(\sqrt{x_1^2 + y_1^2})}{\partial y_1} = n_2 \frac{\partial(\sqrt{x_2^2 + y_2^2})}{\partial y_2} \quad (\text{Pythagore : } D_{1,2} = \sqrt{x_{1,2}^2 + y_{1,2}^2})$$

$$\Rightarrow n_1 \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \frac{\partial(x_1^2 + y_1^2)}{\partial y_1} = n_2 \frac{1}{2\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \frac{\partial(x_2^2 + y_2^2)}{\partial y_2} \quad (\text{Dérivée : } \frac{\partial(f(x)^n)}{\partial x} = n f(x)^{n-1} \frac{\partial f(x)}{\partial x})$$

$$\Rightarrow n_1 \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} (2y_1) = n_2 \frac{1}{2\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} (2y_2) \quad (\text{Dérivée : } \frac{\partial(x^n)}{\partial x} = n x^{n-1})$$

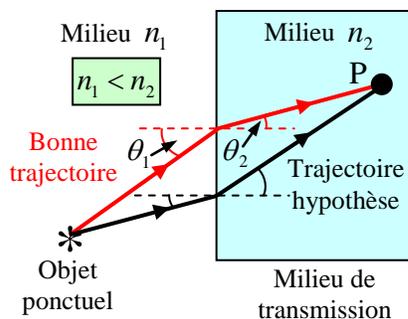
$$\Rightarrow \frac{n_1 y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = \frac{n_2 y_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \quad (\text{Simplifier facteur 2})$$

$$\Rightarrow n_1 \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = n_2 \frac{y_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \quad (\text{Réécriture})$$

$$\Rightarrow n_1 \frac{y_1}{D_1} = n_2 \frac{y_2}{D_2} \quad (\text{Remplacer } D = \sqrt{x^2 + y^2})$$

$$\Rightarrow n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2) \quad \blacksquare \quad (\text{Définition sinus : } \sin(\theta) = y/h)$$

Schéma :



Remarque :

- La lumière voyage plus de distance dans le milieu  $n_1$ , car la vitesse dans ce milieu est plus grande.
- La lumière voyage moins de distance dans le milieu  $n_2$ , car la vitesse dans ce milieu est plus petite.
- Ce choix minimise le temps de parcours  $t$  globalement.

**Situation 2 : Du verre à l'air.** Un rayon voyageant dans le verre ( $n = 1,5$ ) avec une orientation  $\phi = -50^\circ$  rencontre un dioptre horizontal qui sépare le verre et l'air. On désire déterminer l'angle (a) de réflexion et (b) de réfraction.

Évaluons l'angle d'incidence à la surface :

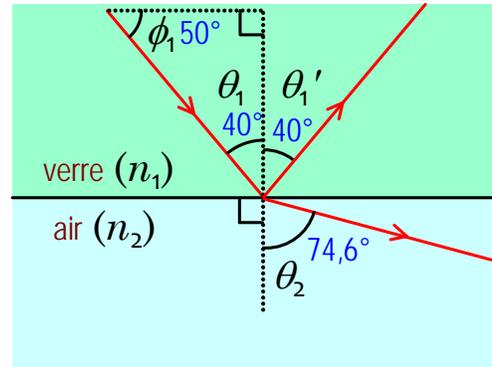
$$\theta_1 = 90 - \phi_1 \Rightarrow \theta_1 = 90 - (50^\circ)$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_1 = 40^\circ}$$

Appliquons la loi de la réflexion pour évaluer l'angle de réflexion :

$$\theta' = \theta \Rightarrow \theta_1' = \theta_1$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_1' = 40^\circ} \quad \text{(a)}$$



Appliquons la loi de la réfraction pour évaluer l'angle de réfraction :

$$n_2 \sin(\theta_2) = n_1 \sin(\theta_1) \Rightarrow (1)\sin(\theta_2) = (1,5)\sin(40^\circ) \quad \text{(Remplacer valeurs num.)}$$

$$\Rightarrow \theta_2 = \sin^{-1}(0,9642) \quad \text{(Isoler } \theta_2 \text{)}$$

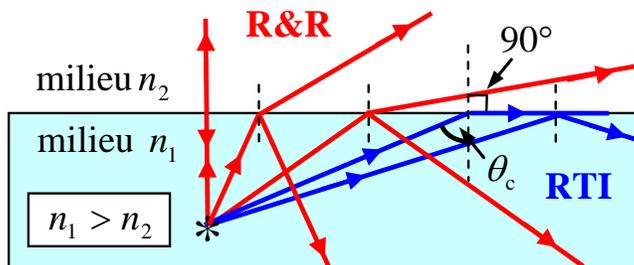
$$\Rightarrow \boxed{\theta_2 = 74,62^\circ} \quad \text{(b)} \quad \text{(Évaluer } \theta_2 \text{)}$$

## L'angle critique et la réflexion totale interne

L'angle critique  $\theta_c$  correspond à l'angle d'incidence où un rayon incident sera réfracté sur un dioptre avec un angle  $\theta_2 = 90^\circ$ . Lorsque l'angle d'incidence est supérieur à  $\theta_c$ , il n'y a pas de réfraction et la lumière est complètement réfléchi ce qui porte le nom de réflexion totale interne (RTI). Cela se produit uniquement lorsque la lumière passe d'un milieu tel que  $n_1 > n_2$  :

$$\theta_c = \arcsin(n_2 / n_1)$$

- où
- $\theta_c$  : Angle critique
  - $n_1$  : Indice de réfraction du milieu incident
  - $n_2$  : Indice de réfraction du milieu de réfraction



La surface de l'eau se comporte comme un miroir, car il y a RTI pour l'observateur dans l'eau.



Un diamant bien taillé favorise la sortie de la lumière sur le devant de la pierre par RTI.

Preuve :

Considérons un rayon incident à une surface avec un angle  $\theta_c$  tel que l'angle de réfraction est égal à  $90^\circ$ . À partir de la loi de la réfraction, établissons une relation entre les indices de réfraction des deux milieux et l'angle critique  $\theta_c$  :

$$\begin{aligned}n_2 \sin(\theta_2) &= n_1 \sin(\theta_1) &\Rightarrow & n_2 \sin(90^\circ) = n_1 \sin(\theta_c) && \text{(Remplacer } \theta_2 = 90^\circ \text{ et } \theta_1 = \theta_c \text{)} \\&&\Rightarrow & n_2 = n_1 \sin(\theta_c) && \text{(Simplifier } \sin(90^\circ) = 1 \text{)} \\&&\Rightarrow & \sin(\theta_c) = \frac{n_2}{n_1} && \text{(Isoler } \sin(\theta_c) \text{)} \\&&\Rightarrow & \theta_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) && \blacksquare \text{ (Isoler } \theta_c \text{)}\end{aligned}$$

**P.S.** Lors d'une réfraction avec  $n_1 > n_2$ , si l'on utilise un angle d'incidence  $\theta_1 > \theta_c$ , la loi de la réfraction donne un l'angle de réfraction  $\theta_2$  indéterminé, car :

$$\sin^{-1}(> 1) = \text{non défini}$$

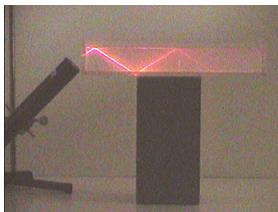
## La fibre optique

En 1970, l'entreprise américaine Corning Glass Works a développé la **fibre optique** pouvant **guider la lumière**<sup>1</sup> d'un laser d'un endroit à un autre par réflexion totale interne<sup>2</sup>. Fabriquée habituellement en verre ou en plastique, la fibre optique permet de transporter de l'information encodée dans un signal lumineux. La fibre optique est constituée d'un cœur d'indice de réfraction légèrement supérieure à la gaine qui recouvre le cœur et une gaine de protection recouvre le tout.

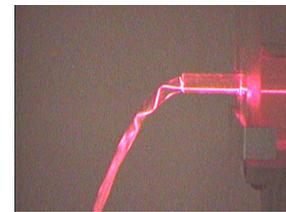
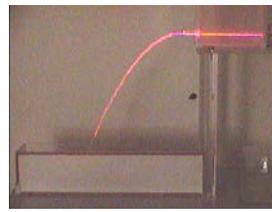
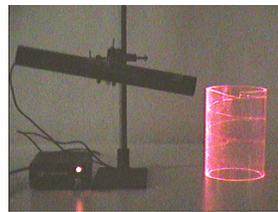


Regroupement de plusieurs fibres optiques

Voici le comportement de la lumière dans différents guides lumineux de grande taille :



Dans du verre



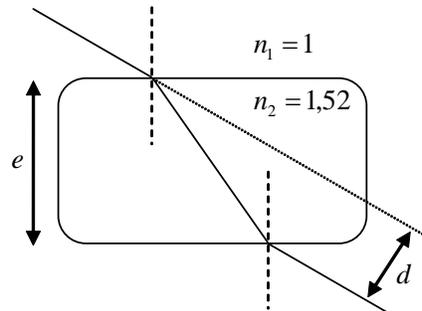
Dans de l'eau

<sup>1</sup> Dans la littérature, on mentionne également que la fibre optique est un guide d'onde, car la lumière est une onde électromagnétique dans le modèle ondulatoire de la lumière.

<sup>2</sup> Il est important de préciser que l'interprétation physique du comportement de la fibre optique devient très complexe lorsque la fibre devient très mince (taille  $\approx$  longueur d'onde de la lumière), car l'approximation de l'optique géométrique devient invalide et l'interprétation de la réflexion totale interne devient inappropriée pour expliquer la propagation de la lumière dans la fibre.

## Situation A : La déviation à la sortie d'un cube.

En construction ...



## Changement de milieu sans changement d'indice

L'indice de réfraction est une caractéristique très importante des objets transparents, car c'est la déviation qu'elle génère sur la lumière qui la traverse qui permet à un observateur de voir l'objet. Pour ne pas dévier de la lumière à une interface, il suffit d'avoir deux milieux de même indice de réfraction comme dans la situation illustré ci-contre. Plus les indices de réfraction sont semblables, plus les objets transparents nous paraissent « invisibles ».



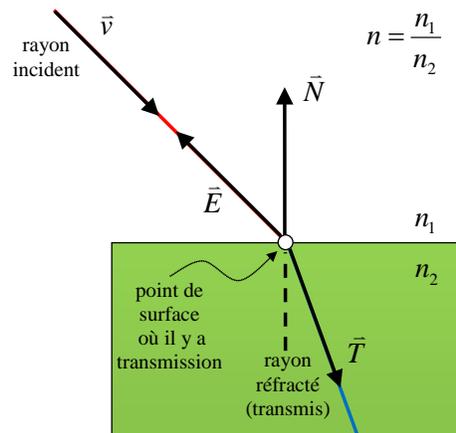
L'indice de réfraction du compte-goutte est identique à celui de l'huile dans la 3<sup>ème</sup> bouteille.

## La réfraction sous forme vectorielle (complément informatique)

À l'aide d'une représentation vectorielle, un rayon incident  $\vec{v}$  à une normale à la surface  $\vec{N}$  peut être réorienté dans la direction  $\vec{T}$  lors d'une transmission grâce à la loi de la réfraction suivante :

$$\vec{T} = n\vec{v} + \left( n(\vec{E} \cdot \vec{N}) - \sqrt{1 - n^2(1 - (\vec{E} \cdot \vec{N})^2)} \right) \vec{N}$$

$$\text{et} \quad \vec{E} = -\vec{v}, \quad n = \frac{n_1}{n_2}$$



- où  $\vec{T}$  : Orientation du rayon réfracté (vecteur unitaire,  $|\vec{T}| = 1$ ).  
 $\vec{v}$  : Orientation du rayon incident (vecteur unitaire,  $|\vec{v}| = 1$ ).  
 $\vec{N}$  : Orientation de la normale à la surface (vecteur unitaire,  $|\vec{N}| = 1$ ).  
 $\vec{E}$  : Orientation inverse du rayon incident ( $\vec{E} = -\vec{v}$ ).  
 $n$  : Rapport entre l'indice de réfraction incident sur réfracté.  
 $n_1$  : Indice de réfraction du milieu incident.  
 $n_2$  : Indice de réfraction du milieu réfracté.

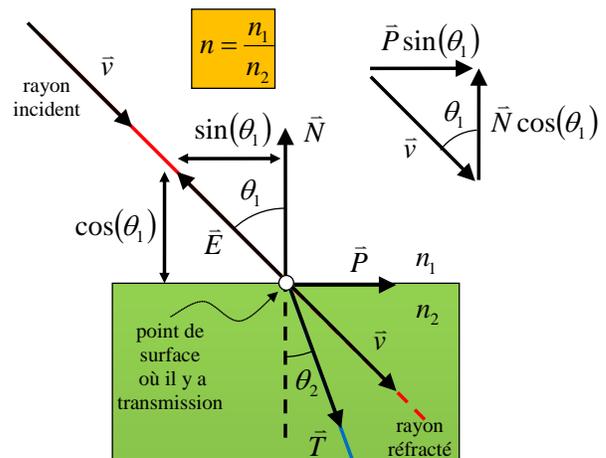
### Preuve :

Considérons un rayon incident d'orientation (vecteur unitaire)  $\vec{v}$  se dirigeant vers une surface dont la normale est orientée selon le vecteur  $\vec{N}$  tel qu'illustré sur le schéma ci-contre.

Évaluons le vecteur transmis  $\vec{T}$  à l'aide du vecteur  $\vec{E} = -\vec{v}$  en respectant la loi de la réfraction étant

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2)$$

où  $\theta_1$  représente l'angle entre  $\vec{E}$  et  $\vec{N}$  et  $\theta_2$  représente l'angle entre  $\vec{T}$  et  $-\vec{N}$ .



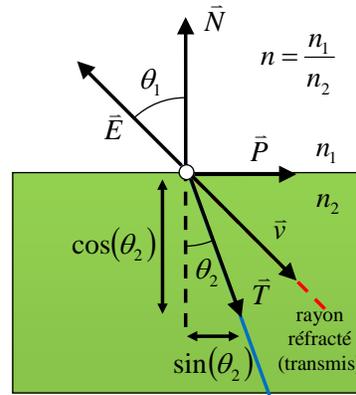
À partir de l'angle d'incidence  $\theta_1$ , nous pouvons construire un vecteur unitaire parallèle à la surface  $\vec{P}$  étant

$$\vec{P} \sin(\theta_1) = \vec{v} + \vec{N} \cos(\theta_1) \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = \frac{\vec{v} + \vec{N} \cos(\theta_1)}{\sin(\theta_1)}$$

À partir de l'angle de réfraction  $\theta_2$ , nous pouvons construire le vecteur unitaire  $\vec{T}$  étant

$$\vec{T} = \vec{P} \sin(\theta_2) - \vec{N} \cos(\theta_2).$$

Développons cette dernière expression afin d'obtenir une expression de  $\vec{T}$  sans faire référence à l'angle de réfraction  $\theta_2$  :



(Vecteur réfracté unitaire)

$$\Rightarrow \vec{T} = \left( \frac{\vec{v} + \vec{N} \cos(\theta_1)}{\sin(\theta_1)} \right) \sin(\theta_2) - \vec{N} \cos(\theta_2)$$

(Remplacer  $\vec{P} = \frac{\vec{v} + \vec{N} \cos(\theta_1)}{\sin(\theta_1)}$ )

$$\Rightarrow \vec{T} = (\vec{v} + \vec{N} \cos(\theta_1)) \frac{\sin(\theta_2)}{\sin(\theta_1)} - \vec{N} \cos(\theta_2)$$

(Regrouper  $\frac{\sin(\theta_2)}{\sin(\theta_1)}$ )

$$\Rightarrow \vec{T} = (\vec{v} + \vec{N} \cos(\theta_1)) n - \vec{N} \cos(\theta_2)$$

(Loi de la réfraction :  $n = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin(\theta_2)}{\sin(\theta_1)}$ )

$$\Rightarrow \vec{T} = n \vec{v} + \vec{N} (n \cos(\theta_1) - \cos(\theta_2))$$

(Distribution de  $n$ )

$$\Rightarrow \vec{T} = n \vec{v} + \vec{N} (n \cos(\theta_1) - \sqrt{\cos^2(\theta_2)})$$

( $\cos(\theta_2) = \sqrt{\cos^2(\theta_2)}$ )

$$\Rightarrow \vec{T} = n \vec{v} + \vec{N} (n \cos(\theta_1) - \sqrt{1 - \sin^2(\theta_2)})$$

( $\cos^2(\theta_2) = 1 - \sin^2(\theta_2)$ )

$$\Rightarrow \vec{T} = n \vec{v} + \vec{N} (n \cos(\theta_1) - \sqrt{1 - (n \sin(\theta_1))^2})$$

(Loi de la réfraction :  $\sin(\theta_2) = n \sin(\theta_1)$ )

$$\Rightarrow \vec{T} = n \vec{v} + \vec{N} (n \cos(\theta_1) - \sqrt{1 - n^2 \sin^2(\theta_1)})$$

(Développer le carré)

$$\Rightarrow \vec{T} = n \vec{v} + \vec{N} (n \cos(\theta_1) - \sqrt{1 - n^2 (1 - \cos^2(\theta_1))})$$

( $\sin^2(\theta_1) = 1 - \cos^2(\theta_1)$ )

$$\Rightarrow \vec{T} = n \vec{v} + \vec{N} (n (\vec{E} \cdot \vec{N}) - \sqrt{1 - n^2 (1 - (\vec{E} \cdot \vec{N})^2)}) \blacksquare$$

( $\vec{E} \cdot \vec{N} = |\vec{E}| |\vec{N}| \cos(\theta_1) = \cos(\theta_1)$ )

En remplaçant  $\vec{E} = -\vec{v}$ , nous obtenons après quelques simplifications de signe négatif l'expression

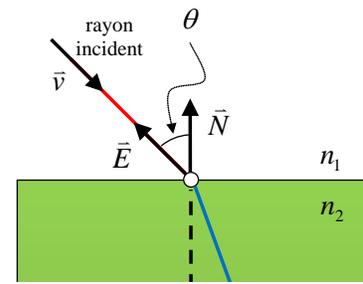
$$\vec{T} = n \vec{v} - \left( n (\vec{v} \cdot \vec{N}) + \sqrt{1 + n^2 ((\vec{v} \cdot \vec{N})^2 - 1)} \right) \vec{N} .$$

# La réflexion totale interne sous forme vectorielle (complément informatique)

À l'aide d'une représentation vectorielle, un rayon incident  $\vec{v}$  à une normale à la surface  $\vec{N}$  va subir de la réflexion totale interne sous la condition

$$\left(\vec{v} \cdot \vec{N}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \leq 1 \quad .$$

(critère pour avoir de réflexion totale interne)



où  $\vec{v}$  : Orientation du rayon incident (vecteur unitaire,  $|\vec{v}| = 1$ ).

$\vec{N}$  : Orientation de la normale à la surface (vecteur unitaire,  $|\vec{N}| = 1$ ).

$n_1$  : Indice de réfraction du milieu incident.

$n_2$  : Indice de réfraction du milieu réfracté.

À partir du critère de l'angle critique de réflexion totale interne  $\theta_c$ , développons le critère à satisfaire pour ne pas avoir de réflexion ( $\theta_i < \theta_c$ ) :

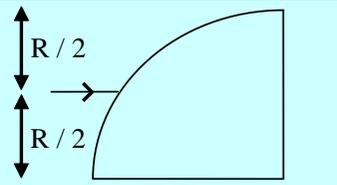
$$\begin{aligned} \theta_i \geq \theta_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) &\Rightarrow \sin(\theta_i) \geq \frac{n_2}{n_1} && \text{(Appliquer la fonction sinus)} \\ &\Rightarrow \sin^2(\theta_i) \geq \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 && \text{(Mettre au carré)} \\ &\Rightarrow -\sin^2(\theta_i) \leq -\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 && \text{(Multiplier par -1, inversion de l'inégalité)} \\ &\Rightarrow \cos^2(\theta_i) \leq 1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 && \text{(Additionner 1 et } \cos^2(\theta) = 1 - \sin^2(\theta)) \\ &\Rightarrow (\vec{E} \cdot \vec{N})^2 \leq 1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 && \left(\cos(\theta_c) = \frac{\vec{E} \cdot \vec{N}}{|\vec{E}| |\vec{N}|} = \vec{E} \cdot \vec{N}\right) \\ &\Rightarrow (\vec{E} \cdot \vec{N})^2 + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \leq 1 && \text{(Regrouper les termes)} \\ &\Rightarrow ((-\vec{v}) \cdot \vec{N})^2 + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \leq 1 && \text{(Remplacer } \vec{E} = -\vec{v}) \\ &\Rightarrow (\vec{v} \cdot \vec{N})^2 + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \leq 1 \quad \blacksquare && \text{(Simplifier signe négatif)} \end{aligned}$$

On peut également démontrer que cette expression est équivalente à l'expression précédente

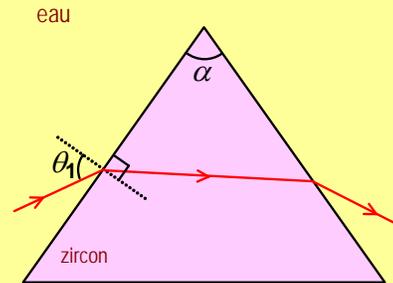
$$1 - n^2 \left(1 - (\vec{E} \cdot \vec{N})^2\right) \leq 0 \quad \text{où } n = n_1 / n_2 .$$

## Exercices

**Exercice A : Réfraction sur un  $\frac{1}{4}$  de disque.** Un rayon de lumière voyageant dans l'air touche le centre d'un  $\frac{1}{4}$  de disque de plastique ( $n = 1,33$ ) tel qu'illustré ci-contre. On désire évaluer l'angle de déviation du rayon à la sortie du  $\frac{1}{4}$  de disque par rapport au rayon initial.



**Situation 5 : Double réfraction dans un prisme.** Un prisme de zircon ( $n = 1,92$ ) entouré d'eau ( $n = 1,33$ ) possède un angle au sommet  $\alpha = 70^\circ$  (schéma ci-contre). (a) Un rayon frappe la face de gauche avec un angle d'incidence  $\theta_1 = 50^\circ$  : on désire déterminer l'angle de réfraction du rayon qui ressort dans l'eau (face de droite). (b) On diminue graduellement l'angle  $\theta_1$  et on désire déterminer pour à partir de quelle valeur de  $\theta_1$  on assiste à une réflexion totale interne sur la face de droite.



## Solutions

### Exercice A : Réfraction sur un $\frac{1}{4}$ de disque.

Évaluons l'angle d'incidence de la première réfraction :

$$\sin \theta = \frac{y}{h} \quad \Rightarrow \quad \sin \theta = \frac{(R/2)}{(R)} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta = 30^\circ}$$

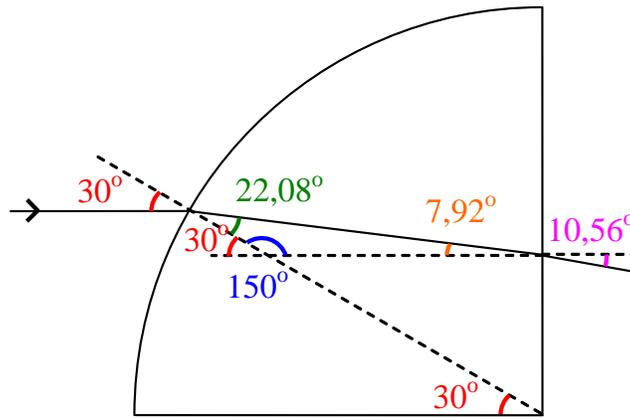
Évaluons l'angle de la 1<sup>ière</sup> réfraction :

$$n_2 \sin(\theta_2) = n_1 \sin(\theta_1) \quad \Rightarrow \quad (1,33)\sin(\theta_2) = (1)\sin(30^\circ) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_2 = 22,08^\circ}$$

À partir du schéma ci-contre, on peut évaluer l'angle d'incidence de la 2<sup>ième</sup> réfraction en utilisant le fait qu'un triangle possède  $180^\circ$  d'angle intérieur.

Évaluons l'angle de la 2<sup>ième</sup> réfraction :

$$\begin{aligned} n_2 \sin(\theta_2) &= n_1 \sin(\theta_1) \\ \Rightarrow (1)\sin(\theta_2) &= (1,33)\sin(7,92^\circ) \\ \Rightarrow \boxed{\theta_2 = 10,56^\circ} \end{aligned}$$



Puisque le 2<sup>ième</sup> angle de réfraction est mesuré par rapport à l'horizontale qui était l'orientation du rayon initial, l'angle  $\theta_2 = 10,56^\circ$  correspond également à la déviation.

### Situation 5 : Double réfraction dans un prisme.

En construction ...









# Chapitre 2.5a – Les dioptries sphériques

## La courbure des dioptries sphériques

Un dioptrie sphérique est une interface de forme sphérique de rayon de courbure  $R$  permettant à la lumière d'être réfracté d'un milieu à un autre. Le signe du rayon de courbure du dioptrie est interprété par le faisceau incident au dioptrie :

Faisceau	Dioptrie convexe d'après le faisceau ( $R > 0$ ) (positif)	Dioptrie concave d'après le faisceau ( $R < 0$ ) (négatif)
Faisceau divergent (objet réel)		
Faisceau convergent (objet virtuel)		

Remarque : Cette convention de signe est l'inverse de celle des miroirs sphériques puisque le calcul qui sera effectué sera de la réfraction étant l'inverse de la réflexion.

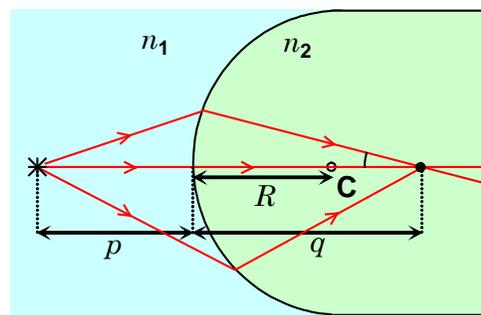
## L'équation du dioptrie sphérique

La position d'une image  $q$  nette associée à la position d'un objet  $p$  devant un dioptrie sphérique dépend du rayon de courbure  $R$  lorsque l'on applique la **contrainte des rayons paraxiaux** et des indices de réfractifs  $n_1$  et  $n_2$  du milieu formant le dioptrie :

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad \text{et} \quad \frac{y_i}{y_o} = -\frac{n_1}{n_2} \frac{q}{p}$$

où

- $p$  : Distance entre l'objet et le miroir (m)
- $q$  : Distance entre l'image et le miroir (m)
- $R$  : Rayon de courbure du miroir (m)
- $n_1$  : Indice de réfraction du milieu incident
- $n_2$  : Indice de réfraction du milieu réfracté



Exemple avec objet et image réelle.

### Convention :

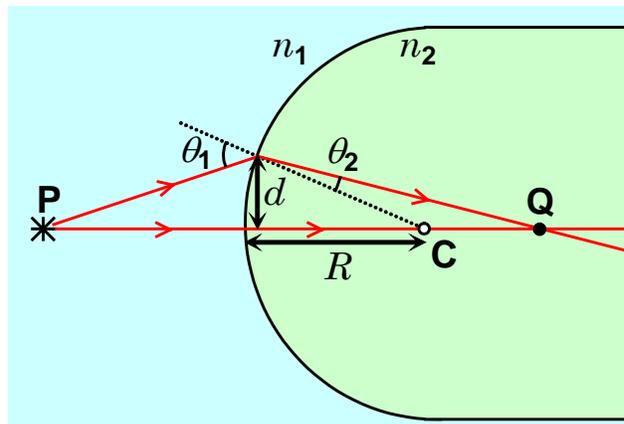
- $R > 0$  : dioptrie convexe
- $R < 0$  : dioptrie concave
- $p > 0$  : objet réel
- $p < 0$  : objet virtuel
- $q > 0$  : image réelle
- $q < 0$  : image virtuelle

Preuve :

Considérons un objet réel sur l'axe central d'un dioptré sphérique. Analysons la réfraction d'un rayon voyageant le long de l'axe central et un rayon quelconque tel qu'illustré sur le schéma ci-contre.

Le premier rayon arrivant sur l'interface avec un angle incident de  $0^\circ$  ne subit pas de déviation lors de sa réfraction. Le second rayon sera dévié selon la loi de la réfraction

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2) .$$



Appliquons l'approximation des rayons paraxiaux sous la condition  $d \ll R$  ce qui réduit l'expression de la loi de la réfraction à

$$n_1 \theta_1 = n_2 \theta_2$$

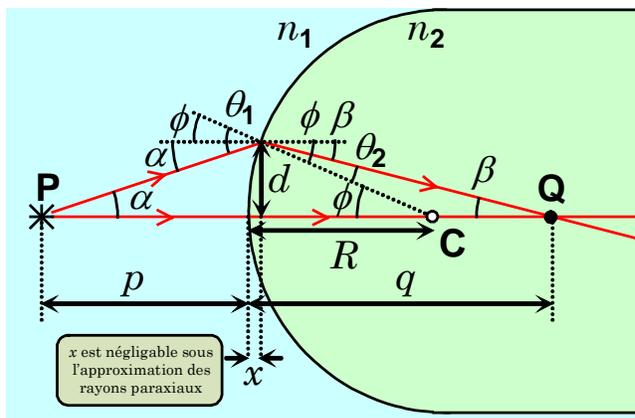
(approximation des rayons paraxiaux et angle en radian)

puisque  $\theta \ll 1$  rad . Ceci se justifie puisque

$$\theta \ll 1 \text{ rad} \Rightarrow \tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \approx \sin(\theta) \quad \text{et} \quad \sin(\theta) \approx \theta .$$

En exploitant la distance  $p$  entre la position de l'objet le dioptré, la distance  $q$  entre la position de l'image et le dioptré et le rayon de courbure  $R$  du dioptré, nous pouvons établir les relations suivantes en lien avec le second rayon en exploitant l'approximation des petits angles et le fait que  $x \ll 1$ :

- $\tan(\alpha) = \frac{d}{p} \Rightarrow \alpha \approx \frac{d}{p}$
- $\tan(\beta) = \frac{d}{q} \Rightarrow \beta \approx \frac{d}{q}$
- $\tan(\phi) = \frac{d}{R} \Rightarrow \phi \approx \frac{d}{R}$



Développons la loi de la réfraction sous l'approximation des rayons paraxiaux afin d'établir la relation désirée :

$$n_1 \theta_1 = n_2 \theta_2 \Rightarrow n_1 (\phi + \alpha) = n_2 (\phi - \beta) \quad (\theta_1 = \phi + \alpha \text{ et } \theta_2 = \phi - \beta)$$

$$\Rightarrow n_1 \left( \frac{d}{R} + \frac{d}{p} \right) = n_2 \left( \frac{d}{R} - \frac{d}{q} \right) \quad (\text{Remplacer } \alpha, \beta \text{ et } \phi)$$

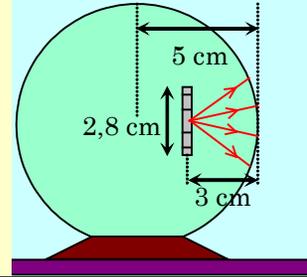
$$\Rightarrow \frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad \blacksquare (1) \quad (\text{Simplifier } d \text{ et réorganiser l'équation})$$

La preuve de l'équation

$$\frac{y_i}{y_o} = -\frac{n_1 q}{n_2 p}$$

est présentement en construction.

**Situation 1 : Un presse-papier en verre.** Une pièce de monnaie de 2\$, dont le diamètre est égal à 2,8 cm, se trouve à 3 cm de la paroi d'un presse-papier sphérique en verre ( $n = 1,5$ ) de 5 cm de rayon. On désire déterminer le diamètre de l'image de la pièce pour un observateur qui la regarde à travers l'épaisseur minimale de verre. (On utilise l'approximation des rayons paraxiaux.)



Du point de vue du faisceau divergent généré par la pièce de monnaie étant l'objet réel, nous avons un **dioptré concave** avec les indices de réfraction suivants à l'interface :

$$R = -5 \text{ cm}$$

(dioptré concave)

$$n_1 = 1,5$$

(verre)

$$n_2 = 1$$

(air)

Évaluons la position de l'image après une réfraction du verre à l'air :

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R} \Rightarrow \frac{(1,5)}{p} + \frac{(1)}{q} = \frac{(1) - (1,5)}{R} \quad (n_1 = 1,5 \text{ et } n_2 = 1)$$

$$\Rightarrow \frac{1,5}{p} + \frac{1}{q} = \frac{-0,5}{(-5 \text{ cm})} \quad (R = -5 \text{ cm, dioptré concave})$$

$$\Rightarrow \frac{1,5}{(3 \text{ cm})} + \frac{1}{q} = \frac{-0,5}{(-5 \text{ cm})} \quad (p = 3 \text{ cm, objet réel})$$

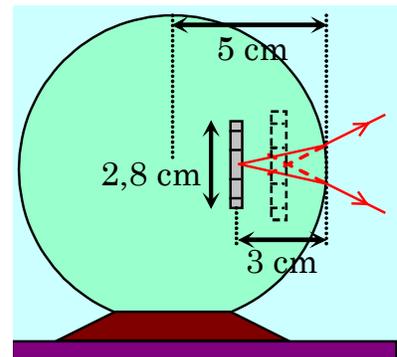
$$\Rightarrow \boxed{q = -2,5 \text{ cm}} \quad (\text{Évaluer } q, \text{ image virtuelle car } q < 0)$$

Puisque l'image est virtuelle et que nous sommes dans l'analyse d'une réfraction, l'image se formera dans le milieu incident (du « mauvais côté » de la transmission).

Évaluons la taille de l'image virtuelle finale :

$$\frac{y_i}{y_o} = -\frac{n_1 q}{n_2 p} \Rightarrow \frac{y_i}{(2,8 \text{ cm})} = -\frac{(1,5)(-2,5 \text{ cm})}{(1)(3 \text{ cm})}$$

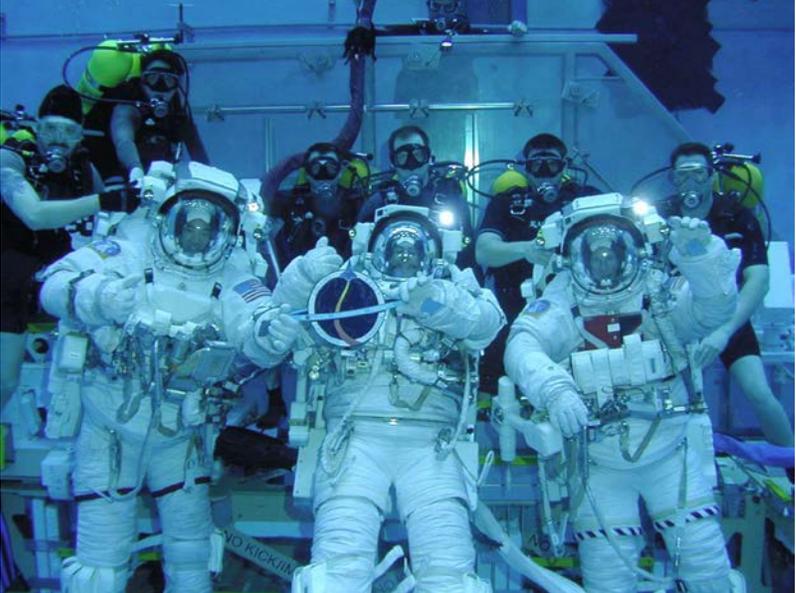
$$\Rightarrow \boxed{y_i = 3,5 \text{ cm}}$$



Un observateur va voir l'image de la pièce dans le presse-papier et plus grande qu'elle ne l'est en réalité.

## L'effet *fishbowl*

Lorsque l'on observe un objet dans un contenant transparent contenant une substance dont l'indice de réfraction est différent de l'air, la forme du contenant influencera la réfraction de la lumière donnant place à une illusion d'optique portant le nom de l'effet *fishbowl*.

Agrandissement de l'image virtuelle	Rétrécissement de l'image virtuelle
 <p data-bbox="203 1060 592 1102">La lumière passant de l'eau à l'air forme une image plus grande que l'objet.</p>	 <p data-bbox="755 1060 1388 1102">La lumière passant de l'air à l'eau forme une image plus petite que l'objet.</p>

## Exercice

**Exercice A : La taille du moustique.** Un moustique de l'ère jurassique a été découvert, fossilisé, dans un morceau d'ambre dont l'indice de réfraction est 1,6. La surface de l'ambre est sphérique et convexe, et son rayon de courbure est de 3,0 mm. La tête du moustique est située sur l'axe optique de cette surface et, lorsqu'on regarde le long de l'axe, elle semble être située à 5,0 mm à l'intérieur de l'ambre. Quelle est sa position réelle? (On utilise l'approximation des rayons paraxiaux.)



## Solution

En construction ...









# Chapitre 2.5b – Les dioptrés sphériques multiples

## L'usage d'image intermédiaire

Nous avons discuté dans les sections précédentes qu'un objet (point de départ d'un faisceau de lumière) peut former une image (point d'arrivée d'un faisceau de lumière) après une déviation sur un miroir en réflexion ou un dioptré en réfraction. Cependant, comment peut-on déterminer la position d'une image par rapport à un observateur (position de l'œil) si deux déviations seront réalisées par le faisceau avant d'être observé ? Pour régler ce problème, nous devons utiliser le concept d'image intermédiaire.

Supposons la situation où le faisceau doit effectuer deux déviations avant d'être observé :

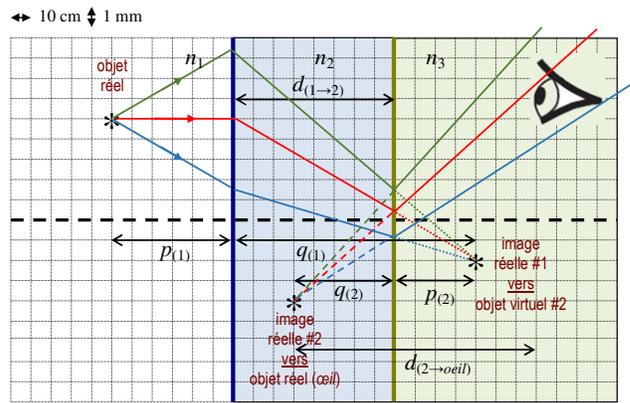
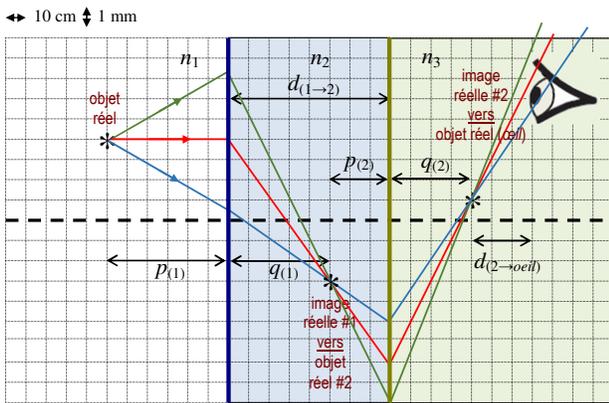


Image intermédiaire interprétée comme un objet réel pour la 2<sup>e</sup> déviation :

$$p_{(1)} > 0, q_{(1)} > 0 \text{ et } p_{(2)} > 0, q_{(2)} > 0$$

Image intermédiaire interprétée comme un objet virtuel pour la 2<sup>e</sup> déviation :

$$p_{(1)} > 0, q_{(1)} > 0 \text{ et } p_{(2)} < 0, q_{(2)} < 0$$

- 1- Effectuer une 1<sup>re</sup> déviation du faisceau sur le dioptré #1 afin d'évaluer la position de l'image intermédiaire  $q_{(1)}$  et sa hauteur  $y_{i(1)}$  à l'aide des équations

$$\frac{n_1}{p_{(1)}} + \frac{n_2}{q_{(1)}} = \frac{n_2 - n_1}{R_{(1)}} \quad \text{et} \quad \frac{y_{i(1)}}{y_{o(1)}} = -\frac{n_1}{n_2} \frac{q_{(1)}}{p_{(1)}} .$$

- 2- Évaluer la position de l'objet  $p_{(2)}$  à partir de la distance  $d_{(1 \rightarrow 2)}$  entre le dioptré #1 et le dioptré #2 et de la position de l'image intermédiaire  $q_{(1)}$  à l'aide de l'équation

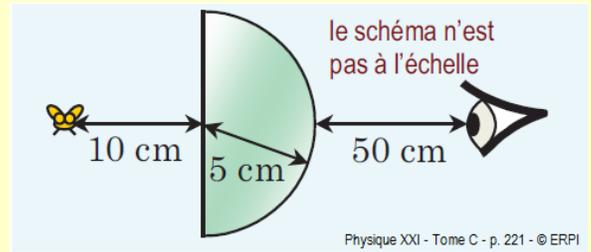
$$p_{(2)} = d_{(1 \rightarrow 2)} - q_{(1)} .$$

- 3- Effectuer une 2<sup>e</sup> déviation du faisceau sur le dioptré #2 afin d'évaluer la position de l'image finale  $q_{(2)}$  et sa hauteur  $y_{i(2)}$  à l'aide des équations

$$\frac{n_2}{p_{(2)}} + \frac{n_3}{q_{(2)}} = \frac{n_3 - n_2}{R_{(2)}} \quad \text{et} \quad \frac{y_{i(2)}}{y_{o(2)}} = -\frac{n_2}{n_3} \frac{q_{(2)}}{p_{(2)}} .$$

- 4- Évaluer la distance  $d_{(2 \rightarrow \text{œil})}$  entre l'image finale  $q_{(2)}$  et l'œil.

**Situation 2 : Un hémisphère de verre.** Béatrice observe une mouche à travers un hémisphère de verre flint ( $n = 1,66$ ) de 5 cm de rayon. La mouche est sur l'axe optique, à 10 cm de la face plane de l'hémisphère ; l'œil de Béatrice est également sur l'axe optique, à 50 cm de la face bombée de l'hémisphère. On désire déterminer **(a)** la distance entre l'image de la mouche et l'œil de Béatrice et **(b)** le grandissement linéaire total.

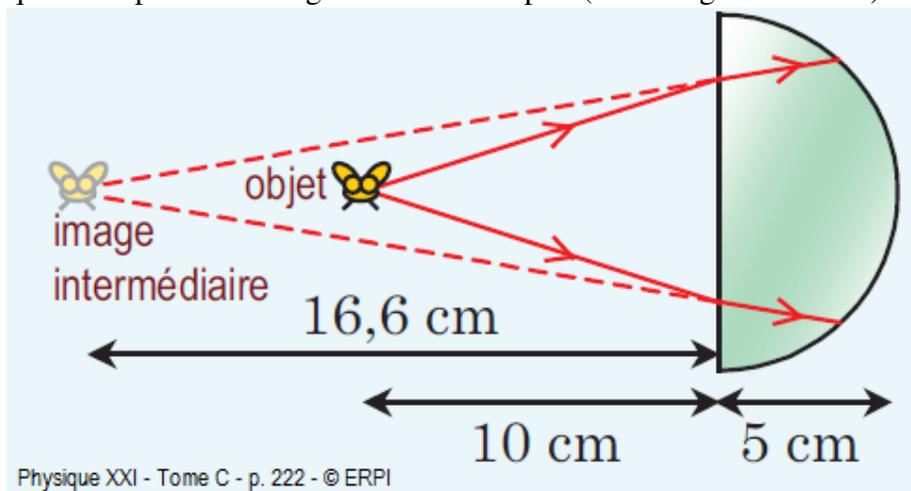


Évaluons la position de l'image intermédiaire :

$$\frac{n_1}{p_{(1)}} + \frac{n_2}{q_{(1)}} = \frac{n_2 - n_1}{R_{(1)}} \quad \Rightarrow \quad \frac{(1)}{(10\text{cm})} + \frac{(1,66)}{q_{(1)}} = \frac{(1,66) - (1)}{(\infty)} \quad (p_{(1)} = 10\text{cm}, R_{(1)} = \infty)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{q_{(1)} = -16,6\text{cm}}$$

Puisque  $q_{(1)} = -16,6\text{cm} < 0$ , nous avons une image #1 virtuelle, donc du « mauvais côté » de la transmission ce qui correspond au côté gauche du 1<sup>er</sup> dioptré (voir image ci-dessous).



Évaluons le grandissement linéaire de cette déviation #1 :

$$g_{(1)} = -\frac{n_1}{n_2} \frac{q_{(1)}}{p_{(1)}} \quad \Rightarrow \quad g_{(1)} = -\frac{(1)}{(1,66)} \frac{(-16,6\text{cm})}{(10\text{cm})}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{g_{(1)} = 1}$$

À partir de notre image intermédiaire  $q_{(1)} = -16,6\text{cm}$ , évaluons la position de notre objet  $p_{(2)}$  sachant qu'il y a une distance  $d_{(1 \rightarrow 2)} = 5\text{cm}$  entre le dioptré plan et le dioptré sphérique concave :

$$p_{(2)} = d_{(1 \rightarrow 2)} - q_{(1)} \quad \Rightarrow \quad p_{(2)} = (5\text{cm}) - (-16,6\text{cm})$$

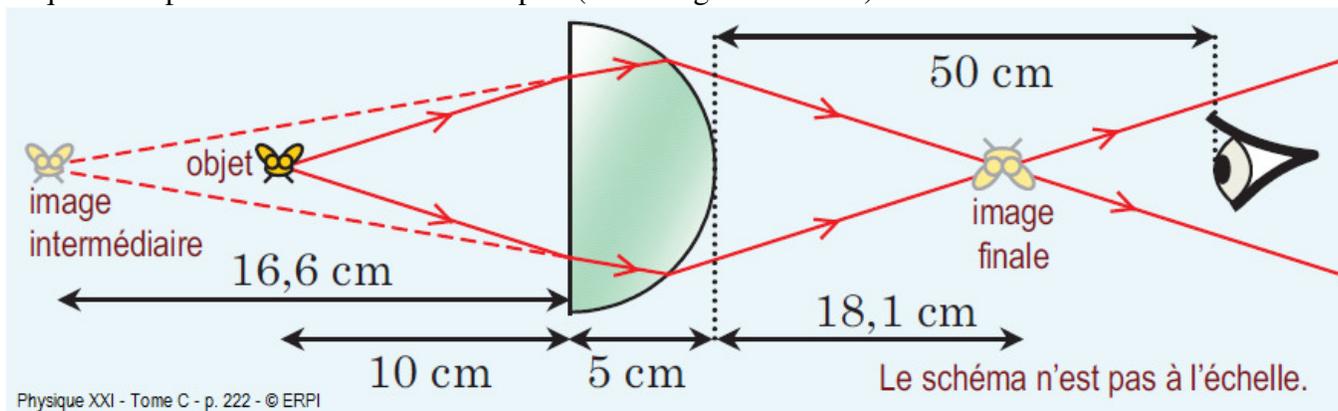
$$\Rightarrow \quad \boxed{p_{(2)} = 21,6\text{ cm}} \quad (\text{objet réel pour le } 2^{\circ} \text{ dioptré})$$

Évaluons la position de notre image finale correspondant à l'image du 2<sup>e</sup> dioptre :

$$\frac{n_1}{p_{(2)}} + \frac{n_2}{q_{(2)}} = \frac{n_2 - n_1}{R_{(2)}} \quad \Rightarrow \quad \frac{(1,66)}{(21,6 \text{ cm})} + \frac{(1)}{q_{(2)}} = \frac{(1) - (1,66)}{(-5 \text{ cm})} \quad (p_{(2)} = 21,6 \text{ cm}, R_{(2)} = -5 \text{ cm})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{q_{(2)} = 18,13 \text{ cm}}$$

Puisque  $q_{(2)} = 18,13 \text{ cm} > 0$ , nous avons une image #2 réelle, donc du « bon côté » de la transmission ce qui correspond au côté droit du 2<sup>e</sup> dioptre (voir image ci-dessous).



À partir de notre image intermédiaire  $q_{(2)} = 18,13 \text{ cm}$ , évaluons la position de notre objet  $p_{(3)}$  sachant qu'il y a une distance  $d_{(2 \rightarrow 3)} = 50 \text{ cm}$  entre le dioptre sphérique concave et l'œil :

$$p_{(3)} = d_{(2 \rightarrow 3)} - q_{(2)} \quad \Rightarrow \quad p_{(3)} = (50 \text{ cm}) - (18,13 \text{ cm})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{p_{(3)} = 31,87 \text{ cm}} \quad \text{(a)}$$

Évaluons le grandissement linéaire de cette déviation #2 :

$$g_{(2)} = -\frac{n_1}{n_2} \frac{q_{(2)}}{p_{(2)}} \quad \Rightarrow \quad g_{(2)} = -\frac{(1,66)}{(1)} \frac{(18,13 \text{ cm})}{(21,6 \text{ cm})}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{g_{(2)} = -1,393}$$

Évaluons le grandissement linéaire total des deux déviations combinées :

$$g = g_{(1)} g_{(2)} \quad \Rightarrow \quad g = (1)(-1,393)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{g = -1,393} \quad \text{(b)}$$

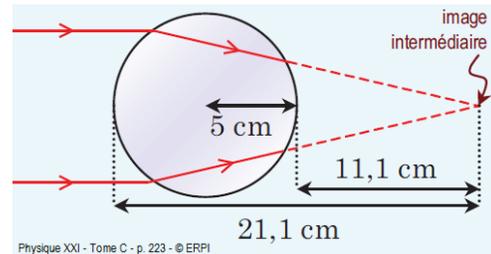
**Situation 3 : Une sphère de glace.** Lors d'une expédition dans le Grand Nord du Québec, Albert désire utiliser une sphère de glace ( $n = 1,31$ ) de 5 cm de rayon pour allumer un feu à l'aide des rayons du Soleil. On désire déterminer quelle doit être la distance optimale entre le matériau combustible et la surface de la sphère.

Évaluons la position de l'image intermédiaire :

$$\frac{n_1}{p_{(1)}} + \frac{n_2}{q_{(1)}} = \frac{n_2 - n_1}{R_{(1)}} \quad \Rightarrow \quad \frac{(1)}{(\infty)} + \frac{(1,31)}{q_{(1)}} = \frac{(1,31) - (1)}{(5 \text{ cm})} \quad (p_{(1)} = \infty, R_{(1)} = 5 \text{ cm})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{q_{(1)} = 21,13 \text{ cm}}$$

Puisque  $q_{(1)} = 21,13 \text{ cm} > 0$ , nous avons une image #1 réelle, donc du « bon côté » de la transmission ce qui correspond au côté droit du 1<sup>er</sup> dioptré (voir image ci-contre).



À partir de notre image intermédiaire  $q_{(1)} = 21,13 \text{ cm}$ , évaluons la position de notre objet  $p_{(2)}$  sachant qu'il y a une distance  $d_{(1 \rightarrow 2)} = 10 \text{ cm}$  entre le dioptré sphérique convexe et le dioptré sphérique concave :

$$p_{(2)} = d_{(1 \rightarrow 2)} - q_{(1)} \quad \Rightarrow \quad p_{(2)} = (10 \text{ cm}) - (21,13 \text{ cm})$$

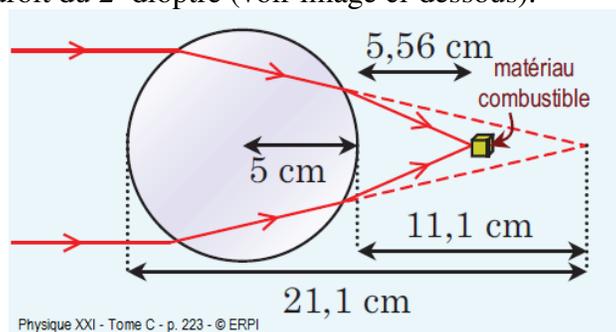
$$\Rightarrow \quad \boxed{p_{(2)} = -11,13 \text{ cm}} \text{ (objet virtuel pour le 2}^\circ \text{ dioptré)}$$

Évaluons la position de notre image finale correspondant à l'image du 2<sup>e</sup> dioptré :

$$\frac{n_1}{p_{(2)}} + \frac{n_2}{q_{(2)}} = \frac{n_2 - n_1}{R_{(2)}} \quad \Rightarrow \quad \frac{(1,31)}{(-11,13 \text{ cm})} + \frac{(1)}{q_{(2)}} = \frac{(1) - (1,31)}{(-5 \text{ cm})} \quad (p_{(2)} = -11,13 \text{ cm}, R_{(2)} = -5 \text{ cm})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{q_{(2)} = 5,465 \text{ cm}}$$

Puisque  $q_{(2)} = 5,465 \text{ cm} > 0$ , nous avons une image #2 réelle, donc du « bon côté » de la transmission ce qui correspond au côté droit du 2<sup>e</sup> dioptré (voir image ci-dessous).











# Chapitre 2.7 – La formule des opticiens

## La vergence

La vergence est l'aptitude d'une lentille à faire dévier un faisceau de lumière issue d'un objet (réel ou virtuelle) permettant la formation d'une image nette (réelle ou virtuelle). Elle sera **positive** si le faisceau converge davantage et sera **négative** si le faisceau diverge davantage. On peut associer la vergence à une distance portant le nom de **distance focale** uniquement pour une lentille mince<sup>1</sup> entourée d'air ( $n_1 = n_2 = 1$ ).

Dans un cas plus général, on peut associer la position  $p$  d'un objet avec la formation d'une image en position  $q$  grâce à la vergence  $V$  d'une lentille mince entouré de deux milieux  $n_1$  et  $n_2$  grâce à l'équation

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = V \quad \text{et} \quad \frac{y_i}{y_o} = -\frac{n_1}{n_2} \frac{q}{p}$$

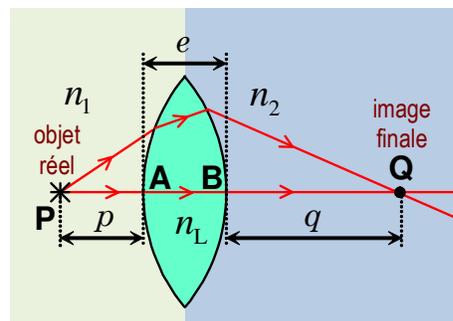
- où
- $V$  : La vergence de la lentille mince en dioptries (D).
  - $n_1$  : Indice du milieu incident à la lentille.
  - $n_2$  : Indice du milieu à la sortie de la lentille.
  - $p$  : Position de l'objet par rapport à la lentille (position de l'objet le long de l'axe optique) (m).
  - $q$  : Position de l'image par rapport à la lentille (position de l'image le long de l'axe optique) (m).
  - $y_o$  : Distance entre l'objet et l'axe optique (m).
  - $y_i$  : Distance entre l'image de l'axe optique (m).

## Le calcul de la vergence d'une lentille mince

La vergence d'une lentille plongée dans un milieu  $n_1$  et  $n_2$  peut être déterminée<sup>2</sup> par les deux courbures  $R_A$  et  $R_B$  de la lentille grâce à l'équation suivante :

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = V \quad \text{avec} \quad V = \frac{n_L - n_1}{R_A} - \frac{n_L - n_2}{R_B}$$

- où
- $V$  : La vergence de la lentille mince ( $\text{m}^{-1}$ ).
  - $n_1$  : Indice du milieu incident.
  - $n_2$  : Indice du milieu transmis.
  - $n_L$  : Indice de réfraction de la lentille.
  - $R_A$  : Rayon de courbure du côté A (m).
  - $R_B$  : Rayon de courbure du côté B (m).



Convention :

$R > 0$  : Courbure convexe au passage de la lumière.

$R < 0$  : Courbure concave au passage de la lumière.

<sup>1</sup> Ce sujet est traité dans la section 2.6 - Les lentilles minces.

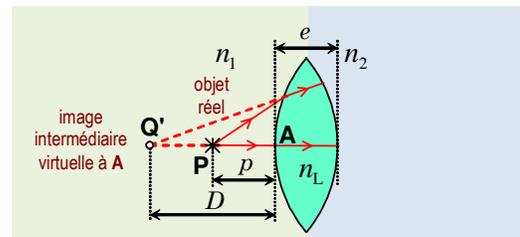
<sup>2</sup> Cette démonstration est disponible dans le livre de référence à la section 2.10 - La vergence des lentilles.

Preuve :

À partir de la position d'un objet  $p$  et de la position de son image  $q$  après deux déviations sur deux dioptres d'une lentille de largeur  $e$  plongé dans deux milieux d'indice de réfraction  $n_1$  et  $n_2$ , évaluons la vergence  $V$  de la lentille en fonction des rayons de courbure  $R_A$  et  $R_B$  de la lentille afin de satisfaire la relation

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = V \quad .$$

Évaluons l'expression de la déviation #1 des rayons provenant de l'objet réel en position  $P$  sur le dioptre  $A$ . Cela va produire une image intermédiaire en position  $Q'$ :



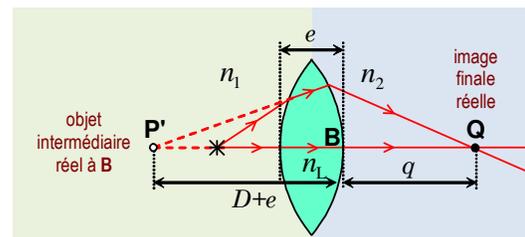
(Indice réfraction et  $R = R_A$ )

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{n_1}{p} + \frac{(n_L)}{q} = \frac{(n_L) - n_1}{(R_A)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{n_1}{p} + \frac{n_L}{\mp D} = \frac{n_L - n_1}{R_A}} \quad (1)$$

(Si l'image est virtuelle,  $q = -D$ )

Évaluons l'expression de la déviation #2 des rayons provenant de l'objet intermédiaire  $P'$  sur le dioptre  $B$ . Cela va produire l'image finale en position  $Q$  :



(Indice réfraction et  $R = R_B$ )

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{(n_L)}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - (n_L)}{(R_B)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{n_L}{\pm (D \pm e)} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_L}{R_B}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{n_L}{\pm D} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_L}{R_B}} \quad (2)$$

(Si l'objet inter. est réel,  $p = D + e$ )

(Appro. lentille mince,  $e \approx 0$ )

Additionnons nos deux équations (1) et (2) afin de reformer l'équation des lentilles minces :

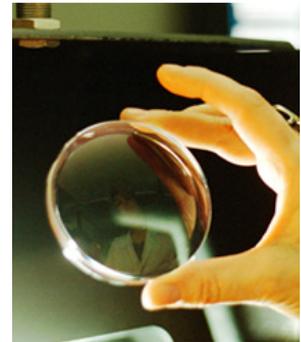
$$(1) + (2) \quad \Rightarrow \quad \left[ \frac{n_1}{p} + \frac{n_L}{\mp D} \right] + \left[ \frac{n_L}{\pm D} + \frac{n_2}{q} \right] = \left[ \frac{n_L - n_1}{R_A} \right] + \left[ \frac{n_2 - n_L}{R_B} \right] \quad (\text{Additionner (1) + (2)})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{n_1}{p} + \frac{n_L}{\mp D} + \left( -\frac{n_L}{\mp D} \right) + \frac{n_2}{q} = \frac{n_L - n_1}{R_A} + \left( -\frac{n_L - n_2}{R_B} \right) \quad (\text{Factoriser négatif})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = V \quad \text{où} \quad V = \frac{n_L - n_1}{R_A} - \frac{n_L - n_2}{R_B} \quad \blacksquare \quad (\text{Simplifier})$$

## La formule des opticiens

La formule des opticiens est une formule permettant d'évaluer la vergence la d'une lentille mince *entourée d'air* en fonction de l'indice de réfraction du verre  $n_L$  et des deux rayons de courbure de la lentille  $R_A$  et  $R_B$ . L'application de cette équation est strictement réservée aux lentilles de grand rayon de courbure pour respecter l'approximation des rayons paraxiaux. De plus, le calcul de la vergence du verre par cette formule permet de définir la distance focale  $f$  de la lentille mince :

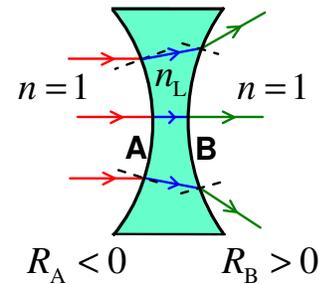


Verre correcteur prêt à être taillé.

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = V \quad \text{avec} \quad V = (n_L - 1) \left( \frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right) \quad \text{et} \quad f = \frac{1}{V}$$

où  $f$  : Distance focale de la lentille mince (m)  
 $V$  : Vergence de la lentille mince ( $m^{-1}$ )  
 $n_L$  : Indice de réfraction de la lentille  
 $R_A$  : Rayon de courbure du côté A (m)  
 $R_B$  : Rayon de courbure du côté B (m)

Exemple : Lentille divergente



Convention :

- $R > 0$  : Courbure convexe au passage de la lumière.
- $R < 0$  : Courbure concave au passage de la lumière.

Preuve :

À partir de la formule de la vergence d'une lentille mince, remplaçons les indices de réfraction  $n_1$  et  $n_2$  par l'indice de l'air et réécrivons l'équation :

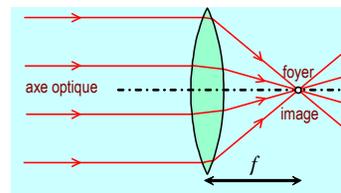
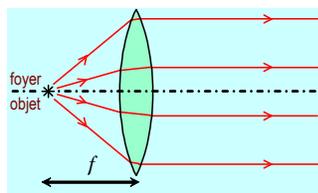
$$\bullet \quad \frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = V \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = V \quad \blacksquare (1)$$

$$\bullet \quad V = \frac{n_L - n_1}{R_A} - \frac{n_L - n_2}{R_B} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{n_L - (1)}{R_A} - \frac{n_L - (1)}{R_B}$$

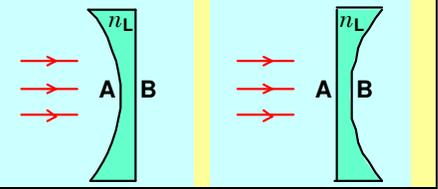
$$\Rightarrow \quad V = (n_L - 1) \left( \frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right) \quad \blacksquare (2)$$

Remarque :

La distance focale permet d'identifier la position du foyer de la lentille ce qui permet d'établir un lien entre un objet à l'infini et la formation d'une image sur le foyer et la position d'un objet sur le foyer et la formation d'une image à l'infini.



**Situation 1 : Une lentille plan-concave.** On désire construire une lentille mince plan-concave en verre ( $n = 1,5$ ) qui possède une distance focale de  $-20$  cm lorsqu'elle est entourée d'air. On désire déterminer le rayon de courbure de la face concave.



Appliquons la formule des opticiens afin d'isoler le rayon de courbure de la lentille plan-concave. Prenons le côté concave comme face incidente aux rayons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} &= (n_L - 1) \left( \frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right) &\Rightarrow \frac{1}{f} &= (n_L - 1) \left( \frac{1}{R_A} - \frac{1}{(\infty)} \right) && \text{(Remplacer } R_B = \infty) \\ & &\Rightarrow \frac{1}{f} &= (n_L - 1) \frac{1}{R_A} && \text{(Simplifier)} \\ & &\Rightarrow R_A &= (n_L - 1) f && \text{(Isoler } R_A) \\ & &\Rightarrow R_A &= ((1,5) - 1)(-0,20) && \text{(Remplacer valeurs numériques)} \\ & &\Rightarrow R_A &= -0,10 \text{ m} && \text{(Évaluer } R_A) \end{aligned}$$

On peut remarquer que le sens de la lentille n'affecte pas la distance focale résultante de la lentille. Les règles de signe associées aux rayons de courbure permettent à la formule des opticiens d'être symétrique.

## En résumé

Sous l'approximation des rayons paraxiaux, pour faire le positionnement  $q$  d'une image dans le milieu  $n_2$  à partir du positionnement  $p$  d'un objet dans le milieu  $n_1$ , il suffit de préciser la vergence  $V$  du système de dioptries en jeu.

Système de dioptries	Un dioptre	Lentille mince dans deux milieux différents	Lentille mince dans l'air
Équations à utiliser	$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = V$ et $\frac{y_i}{y_o} = -\frac{n_1}{n_2} \frac{q}{p}$	$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = V$ et $\frac{y_i}{y_o} = -\frac{n_1}{n_2} \frac{q}{p}$	$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = V$ et $\frac{y_i}{y_o} = -\frac{q}{p}$
La vergence	$V = \frac{n_2 - n_1}{R}$	$V = \frac{n_L - n_1}{R_A} - \frac{n_L - n_2}{R_B}$	$V = (n_L - 1) \left( \frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right)$
Schéma			

## La somme des vergences

Lorsque deux lentilles ou plus d'épaisseur négligeable sont collées (sans milieu entre les lentilles), la vergence totale du système de lentilles sous l'approximation des rayons paraxiaux est égale à l'expression suivante :

$$V_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^N V_i$$

(sous approximation paraxiaux, lentilles collées)

où  $V_{\text{tot}}$  : Vergence totale du système de lentille (D).

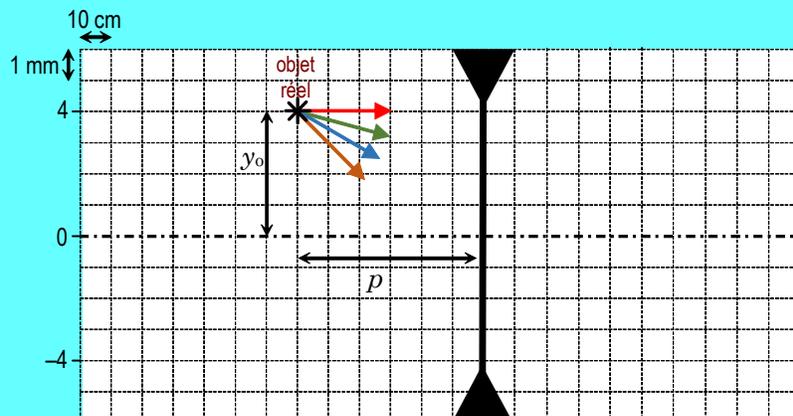
$V_i$  : Vergence de la lentille  $i$  (D).

$N$  : Nombre de lentille dans le système.

Preuve :

En construction ...

**Situation A : Le faisceau de l'objet réel dévié par une lentille biconcave.** Un objet ponctuel est situé devant une lentille biconcave de 40 cm de rayon en verre ( $n = 1,5$ ) à une distance  $p = 60$  cm et une hauteur  $y_o = 4$  mm de l'axe optique. On désire (a) évaluer la position  $q$  et  $y_i$  de l'image et (b) compléter le faisceau de lumière illustré sur le schéma ci-dessous.



Évaluons la vergence de la lentille biconcave :

$$V = (n_L - 1) \left( \frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right) \quad \Rightarrow \quad V = (n_L - 1) \left( \frac{1}{(-R)} - \frac{1}{(+R)} \right)$$

$$\Rightarrow \quad V = -2 \frac{(n_L - 1)}{R}$$

$$\Rightarrow \quad V = -2 \frac{((1,5) - 1)}{(0,40 \text{ m})}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{V = -2,5 \text{ D}}$$

Évaluons la position  $q$  de l'image :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = V$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(0,6\text{ m})} + \frac{1}{q} = (-2,5\text{ D})$$

$$\Rightarrow \boxed{q = -0,24\text{ m}}$$

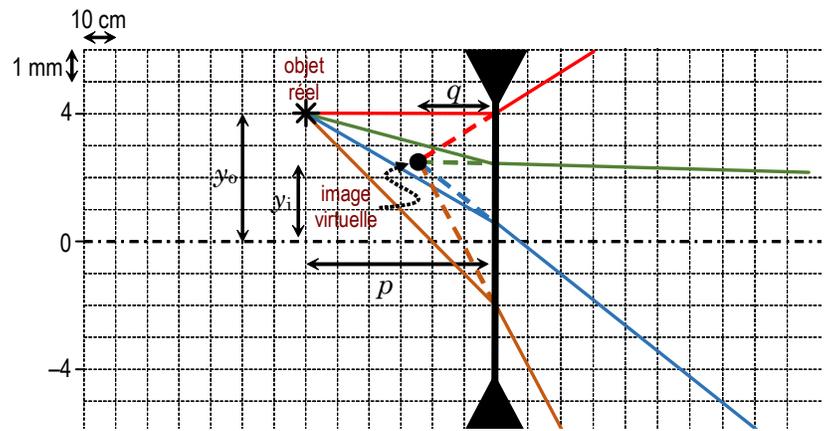
Évaluons la position  $y_0$  de l'image :

$$\frac{y_i}{y_o} = -\frac{q}{p}$$

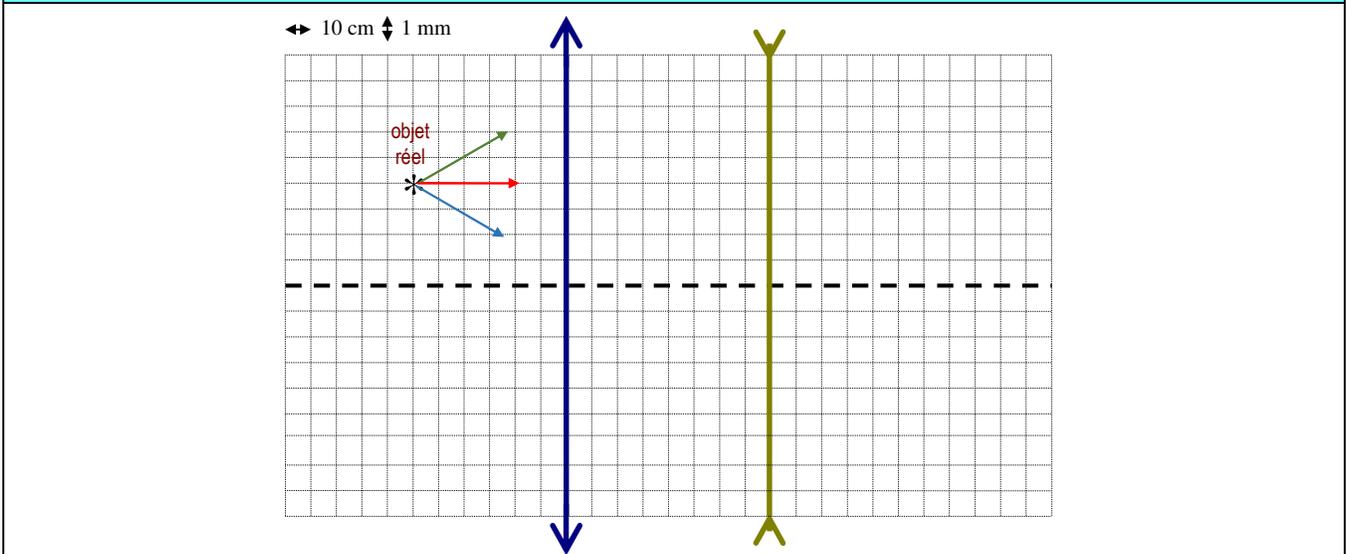
$$\Rightarrow \frac{y_i}{(4\text{ mm})} = -\frac{(-0,24\text{ m})}{(0,40\text{ m})}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_i = 2,4\text{ mm}}$$

Schéma du faisceau de lumière :



**Situation B :** *Le faisceau de l'objet réel dévié par deux lentilles.* Un objet ponctuel est situé devant une lentille de  $+2,5\text{ D}$  à une distance  $p = 60\text{ cm}$  et une hauteur  $y_o = 4\text{ mm}$  de l'axe optique. Une seconde lentille de  $-5\text{ D}$  est situé à une distance  $d = 80\text{ cm}$  derrière la première lentille. On désire (a) évaluer la position  $q$  et  $y_i$  de l'image et (b) compléter le faisceau de lumière illustré sur le schéma ci-dessous.



Évaluons la position  $q_1$  de l'image associée à la 1<sup>re</sup> lentille :

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = V_1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(0,6\text{ m})} + \frac{1}{q_1} = (2,5\text{ D})$$

$$\Rightarrow \boxed{q_1 = 1,20\text{ m}}$$

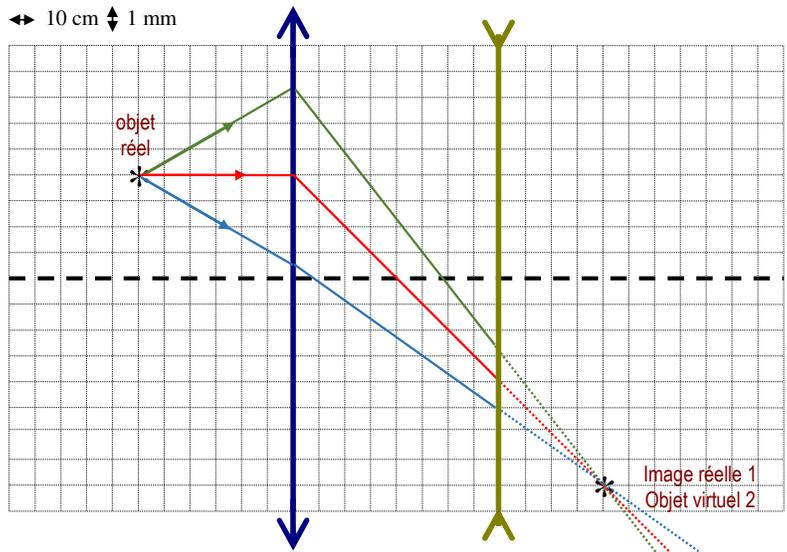
Évaluons la position  $y_{i1}$  de l'image associée à la 1<sup>re</sup> lentille :

$$\frac{y_{i1}}{y_{o1}} = -\frac{q_1}{p_1}$$

$$\Rightarrow \frac{y_{i1}}{(4\text{ mm})} = -\frac{(-1,20\text{ m})}{(0,60\text{ m})}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_i = -8\text{ mm}}$$

Schéma du faisceau de lumière après la 1<sup>re</sup> déviation :



Évaluons la position de l'objet  $p_2$  associée à la 2<sup>e</sup> lentille à partir de l'image  $q_1$  et la distance  $d$  :

$$p_2 = d - q_1 \quad \Rightarrow \quad p_2 = (0,80\text{ m}) - (1,20\text{ m}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{p_2 = -0,40\text{ m}}$$

Évaluons la position  $q_2$  de l'image associée à la 2<sup>e</sup> lentille :

$$\frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} = V_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(-0,4\text{ m})} + \frac{1}{q_2} = (-5\text{ D})$$

$$\Rightarrow \boxed{q_2 = -40\text{ m}}$$

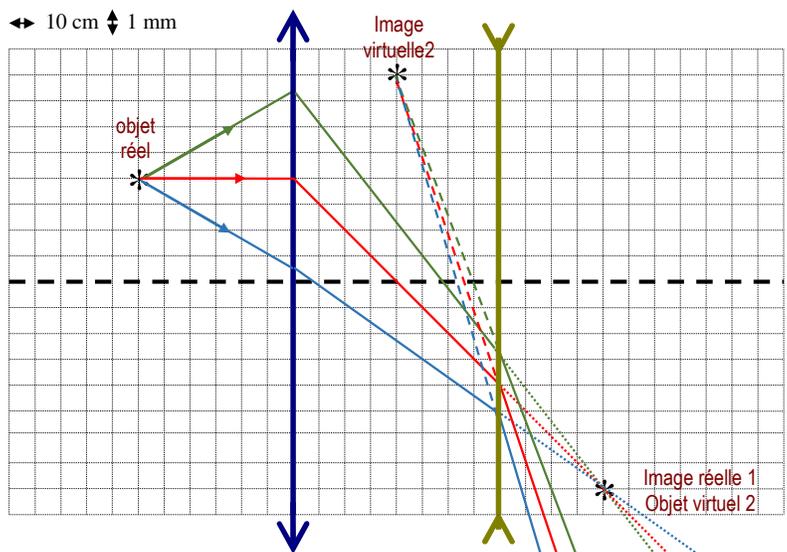
Évaluons la position  $y_{i2}$  de l'image associée à la 2<sup>e</sup> lentille :

$$\frac{y_{i2}}{y_{o2}} = -\frac{q_2}{p_2}$$

$$\Rightarrow \frac{y_{i2}}{(-8\text{ mm})} = -\frac{(-40\text{ m})}{(-0,40\text{ m})}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_i = 8\text{ mm}}$$

Schéma du faisceau de lumière après la 2<sup>e</sup> déviation :



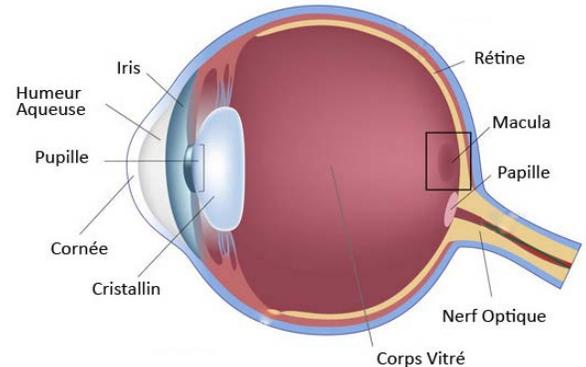


# Chapitre 2.9 – La correction de la vue

## L'œil humain

L'œil est un organe permettant à l'humain d'analyser la lumière ce qui permet d'analyser l'environnement dans lequel il est situé.

- La **rétilne** est comparable à un **écran de fond** sur laquelle les rayons forment des images. Lorsqu'un groupe de rayons issus d'un objet forme un faisceau convergent sur un point de la rétilne, une image nette est alors interprétée par le cerveau.
- La **cornée** correspond à une **surface rigide** permettant de faire converger les rayons de lumière.
- Le **cristallin** correspond à une **lentille souple** qui est déformable grâce aux **muscles ciliaires**.

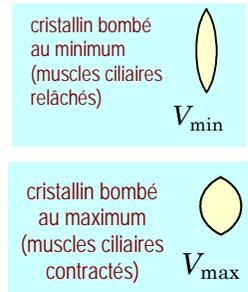


<http://essor.eu/anatomie-de-loeil/>  
Représentation artistique d'un œil.

## L'amplitude d'accommodation

L'accommodation est la capacité de l'œil à faire varier sa vergence. Cela se réalise grâce à la déformation du cristallin. Puisque l'œil possède une vergence toujours positive pouvant varier entre une valeur minimale  $V_{\min}$  et une valeur maximale  $V_{\max}$ , l'amplitude d'accommodation  $A_{\text{acc}}$  correspond à la différence de ces deux valeurs :

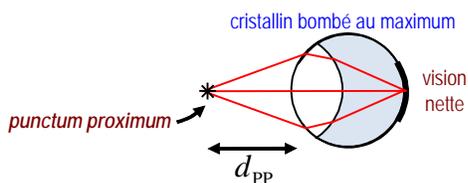
$$A_{\text{acc}} = V_{\max} - V_{\min}$$



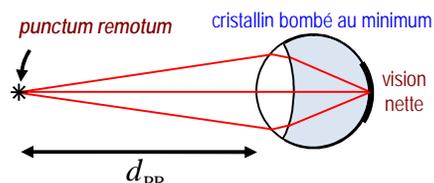
- où  $A_{\text{acc}}$  : L'amplitude d'accommodation de l'œil (D).  
 $V_{\min}$  : Vergence minimale de l'œil (D).  
 $V_{\max}$  : Vergence maximale de l'œil (D).

## Le champ de vision

Le champ de vision correspond à la zone où l'œil est apte à visualiser des objets afin qu'il se forme des images nettes sur sa rétilne. Cette zone est délimitée par deux distances :



$d_{\text{pp}}$  : Distance minimale du champ de vision (**punctum proximum**).



$d_{\text{pr}}$  : Distance maximale  $d_{\text{pr}}$  du champ de vision de l'œil au repos (**punctum remotum**).

## Le lien entre l'amplitude d'accommodation et le champ de vision

Puisque la vergence de l'œil influence la capacité de l'œil à voir des images nettes à différente distance, on peut établir un lien<sup>1</sup> avec l'amplitude d'accommodation et le champ de vision lorsque l'œil est dans un milieu extérieur d'indice de réfraction  $n_{\text{ext}}$  à l'aide de l'équation suivante :

$$A_{\text{acc}} = n_{\text{ext}} \left( \frac{1}{d_{\text{PP}}} - \frac{1}{d_{\text{PR}}} \right)$$

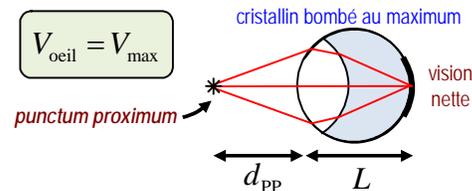
où  $A_{\text{acc}}$  : L'amplitude d'accommodation de l'œil (D).  $d_{\text{PP}}$  : Le *punctum proximum* de l'œil (m).  
 $n_{\text{ext}}$  : Indice de réfraction à l'extérieur de l'œil.  $d_{\text{PR}}$  : Le *punctum remotum* de l'œil (m).

### Preuve :

Considérons la situation où il y a formation d'une image nette sur la rétine d'un œil et que la distance entre le système cornée-cristallin et la rétine est égale à  $L$ . Attribuons un indice de réfraction à l'extérieur de l'œil de  $n_{\text{ext}}$  et un indice de réfraction à l'intérieur de l'œil (corps vitré) de  $n_{\text{oeil}}$ . Lorsque la vergence de l'œil est maximale, l'œil permet de visualiser des objets situés au  $d_{\text{PP}}$  ce qui donne l'équation

$$\frac{n_{\text{ext}}}{d_{\text{PP}}} + \frac{n_{\text{oeil}}}{L} = V_{\text{max}}$$

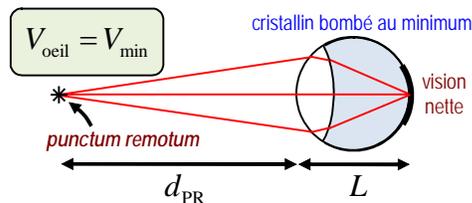
(avec usage de l'équation  $\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = V$ )



et lorsque la vergence de l'œil est minimale, l'œil permet de visualiser des objets situés au  $d_{\text{PR}}$  ce qui donne l'équation

$$\frac{n_{\text{ext}}}{d_{\text{PR}}} + \frac{n_{\text{oeil}}}{L} = V_{\text{min}}$$

(avec usage de l'équation  $\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = V$ )



Si l'on applique la relation de l'amplitude d'accommodation, nous avons alors la relation suivante :

$$A_{\text{acc}} = V_{\text{max}} - V_{\text{min}} \quad \Rightarrow \quad A_{\text{acc}} = \left( \frac{n_{\text{ext}}}{d_{\text{PP}}} + \frac{n_{\text{oeil}}}{L} \right) - \left( \frac{n_{\text{ext}}}{d_{\text{PR}}} + \frac{n_{\text{oeil}}}{L} \right) \quad (\text{Remplacer } V_{\text{max}} \text{ et } V_{\text{min}})$$

$$\Rightarrow \quad A_{\text{acc}} = n_{\text{ext}} \left( \frac{1}{d_{\text{PP}}} - \frac{1}{d_{\text{PR}}} \right) \quad \blacksquare \quad (\text{Simplifier } \frac{n_{\text{oeil}}}{L})$$

<sup>1</sup> Bien que  $A_{\text{acc}} = V_{\text{max}} - V_{\text{min}}$  et  $A_{\text{acc}} = n_{\text{ext}} \left( \frac{1}{d_{\text{PP}}} - \frac{1}{d_{\text{PR}}} \right)$ , nous ne pouvons pas affirmer que  $V_{\text{max}} = \frac{n_{\text{ext}}}{d_{\text{PP}}}$  et  $V_{\text{min}} = \frac{n_{\text{ext}}}{d_{\text{PR}}}$

puisque la relation établie dépend d'une différence des deux valeurs.

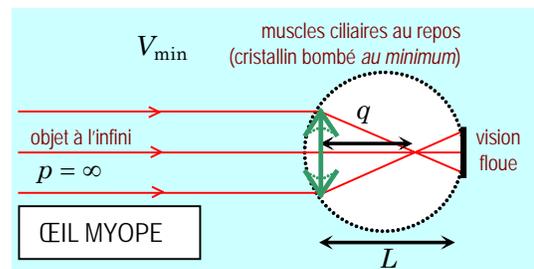
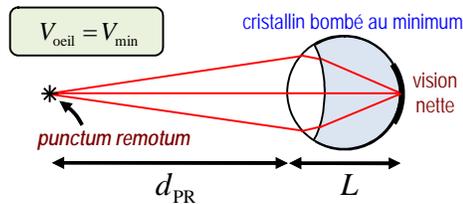
# La vision de loin

On attribue au **punctum remotum** la distance  $d_{PR}$  entre l'objet et l'œil afin que l'œil puisse voir une image nette lorsque l'œil est au repos. L'œil est alors à sa vergence minimale  $V_{min}$ . Idéalement, un œil devrait pouvoir voir des objets à très grande distance ( $d_{PR} = \infty$ ) sans vision floue ce qui correspond à un  $d_{PR}$  égal à l'infini.

Par contre, on distingue trois type de  $d_{PR}$  chez l'humain :

- $d_{PR} > 0$  : L'œil **myope**

L'œil est considéré comme étant myope lorsque sa vision de loin est limitée. Puisque l'œil converge trop la lumière au repos, un faisceau parallèle provenant de l'infini converge dans l'œil avant la rétine ce qui génère une image floue.

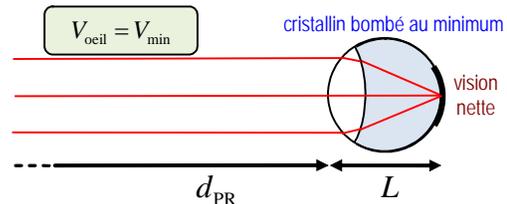


- $d_{PR} = \infty$  : L'œil **emmétrope**.

L'œil est considéré comme emmétrope lorsque sa vision de loin est idéale. L'œil peut voir à l'infini sans « forcer ». L'œil au repos fait converger la lumière adéquatement sur la rétine. Il y a alors un réglage parfait entre la vergence minimale de l'œil  $V_{min}$ , la longueur de l'œil  $L$  et l'indice de réfraction du corps vitré (dans l'œil).

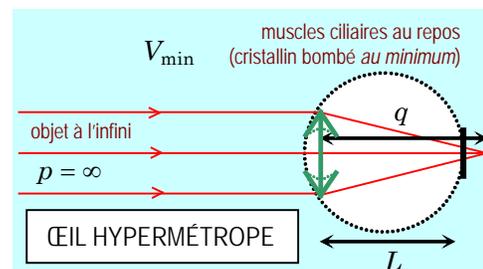
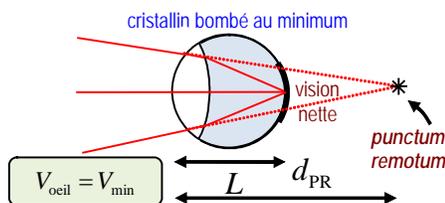
$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = V \Rightarrow \frac{(1)}{(\infty)} + \frac{n_{oeil}}{L} = V_{min}$$

(équation de la position de l'image pour un œil emmétrope)

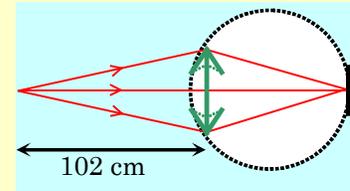


- $d_{PR} < 0$  : L'œil **hypermétrope**

L'œil est considéré comme hypermétrope, car sa vision de loin est limitée. Puisque l'œil converge pas assez la lumière au repos, un faisceau parallèle provenant de l'infini converge dans l'œil après la rétine ce qui génère une image floue.

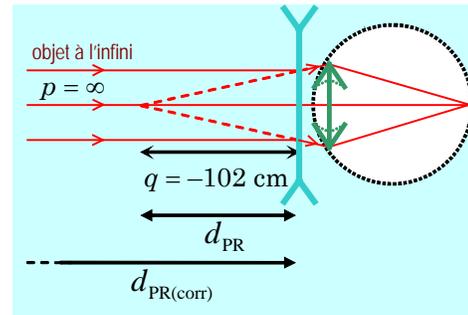


**Situation 4 : La correction de la myopie.** Le *punctum remotum* de l'œil de Mylène est à 102 cm de distance. On veut corriger sa myopie en plaçant une lentille de correction devant son œil et on désire (a) déterminer la vergence qu'elle doit avoir et (b) le champ de vision de l'œil. On suppose que la distance entre la lentille de correction et l'œil de Béatrice est négligeable et que le *punctum proximum* de l'œil est de 25 cm.



Pour corriger la myopie, il faut corriger le  $d_{PR} = 102 \text{ cm}$  afin d'obtenir un  $d_{PR(\text{corr})} = \infty$ .

Ainsi, on utilise une **lentille divergente** afin de réduire le *surplus de convergence* de l'œil au repos.



Pour obtenir la prescription du verre correcteur, il faut qu'un objet à l'infini ( $d_{PR(\text{corr})}$ ) puisse former sous l'influence du verre correcteur une **image virtuelle** à la position du  $d_{PR}$  de l'œil au repos. Cela se calcule à l'aide de la formule suivante : (avec verre correcteur *dans l'air*)

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = V \Rightarrow \frac{1}{d_{PR(\text{corr})}} + \frac{1}{-|d_{PR}|} = V_{\text{verre}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(\infty)} + \frac{1}{-(1,02)} = V_{\text{verre}}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{\text{verre}} = -0,980 \text{ D}} \quad \text{(a)}$$

Évaluons l'amplitude d'accommodation de l'œil *dans l'air* :

$$A_{\text{acc}} = n_{\text{ext}} \left( \frac{1}{d_{PP}} - \frac{1}{d_{PR}} \right) \Rightarrow A_{\text{acc}} = (1) \left( \frac{1}{(0,25)} - \frac{1}{(1,02)} \right) \Rightarrow \boxed{A_{\text{acc}} = 3,02 \text{ D}}$$

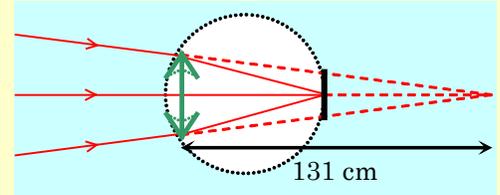
Puisque la distance entre la lentille de correction et l'œil de Béatrice est négligeable, évaluons le  $d_{PP(\text{corr})}$  de l'œil avec le verre correcteur *dans l'air* en utilisant la formule de l'amplitude d'accommodation :

$$A_{\text{acc}} = \frac{1}{d_{PP(\text{corr})}} - \frac{1}{d_{PR(\text{corr})}} \Rightarrow (3,02) = \frac{1}{d_{PP(\text{corr})}} - \frac{1}{(\infty)} \Rightarrow \boxed{d_{PP(\text{corr})} = 33,11 \text{ cm}}$$

Voici le champ de vision de l'œil : (b)

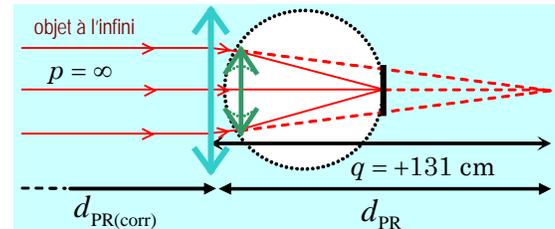
- Sans lunette : vision [ 25 cm ... 103 cm ] (mauvaise vision de loin)
- Avec lunette : vision [ 33,11 cm ... ∞ ] (moins bonne vision de près)

**Situation 5 : La correction de l'hypermétropie.** L'œil d'Hippolyte possède un *punctum remotum* virtuel à  $-131$  cm. On veut corriger son hypermétropie en plaçant une lentille de correction devant son œil et on désire **(a)** déterminer la vergence qu'elle doit avoir et **(b)** le champ de vision de l'œil. On suppose que la distance entre la lentille de correction et l'œil d'Hippolyte est négligeable et que l'amplitude d'accommodation de l'œil est de  $2,6$  D.



Pour corriger l'hypermétropie, il faut corriger le  $d_{PR} = -131$  cm afin d'obtenir un  $d_{PR(\text{corr})} = \infty$ .

Ainsi, on utilise une **lentille convergente** afin d'augmenter la *maque de convergence* de l'œil au repos.



Pour obtenir la prescription du verre correcteur, il faut qu'un objet à l'infini ( $d_{PR(\text{corr})}$ ) puisse former sous l'influence du verre correcteur une **image réelle** à la position du  $d_{PR}$  de l'œil au repos. Cela se calcule à l'aide de la formule suivante : (avec verre correcteur *dans l'air*)

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = V & \Rightarrow \frac{1}{d_{PR(\text{corr})}} + \frac{1}{|d_{PR}|} = V_{\text{verre}} \\ & \Rightarrow \frac{1}{(\infty)} + \frac{1}{|(-1,31)|} = V_{\text{verre}} \\ & \Rightarrow \boxed{V_{\text{verre}} = 0,763 \text{ D}} \quad \text{(a)} \end{aligned}$$

Évaluons le  $d_{PP}$  de l'œil *dans l'air* avec la formule de l'amplitude d'accommodation :

$$A_{\text{acc}} = \frac{1}{d_{PP}} - \frac{1}{d_{PR}} \Rightarrow (2,6) = \frac{1}{d_{PP}} - \frac{1}{(-1,31)} \Rightarrow \boxed{d_{PP} = 54,45 \text{ cm}}$$

Puisque la distance entre la lentille de correction et l'œil d'Hippolyte est négligeable, évaluons le  $d_{PP(\text{corr})}$  de l'œil avec le verre correcteur *dans l'air* en utilisant la formule de l'amplitude d'accommodation :

$$A_{\text{acc}} = \frac{1}{d_{PP(\text{corr})}} - \frac{1}{d_{PR(\text{corr})}} \Rightarrow (2,6) = \frac{1}{d_{PP(\text{corr})}} - \frac{1}{(\infty)} \Rightarrow \boxed{d_{PP(\text{corr})} = 38,46 \text{ cm}}$$

Puisque  $A_{\text{acc}} > V_{\text{verre}}$ , **l'œil peut accommoder légèrement pour voir à l'infini** ce qui permet à Hippolyte de voir tout de même bien à l'infini sauf en **forçant les yeux**.

Voici le champ de vision de l'œil : **(b)**

- Sans lunette : vision [  $54,45 \text{ cm} \dots \infty$  ] (vision de loin en forçant les yeux)
- Avec lunette : vision [  $38,46 \text{ cm} \dots \infty$  ] (vision de près et de loin est améliorée)

## La vision de près et l'amplitude d'accommodation

On attribue au *punctum proximum* la distance  $d_{pp}$  entre l'objet et l'œil afin que l'œil puisse voir une image nette lorsque l'œil force au maximum. L'œil est alors à sa vergence maximale  $V_{\max}$ . Idéalement, un œil devrait pouvoir voir des objets à une distance<sup>2</sup> de 25 cm ( $d_{pp} = 0,25 \text{ m}$ ) sans vision floue.

Puisque c'est l'amplitude d'accommodation  $A_{\text{acc}}$  qui permet de faire varier la vergence de l'œil, cette dernière a une grande influence sur la valeur de  $d_{pp}$ . Avec le vieillissement, l'amplitude d'accommodation  $A_{\text{acc}}$  chute en raison du durcissement du cristallin ce qui réduit la vergence maximale de l'œil et augmente  $d_{pp}$ .

On distingue deux types d'amplitude d'accommodation chez l'œil emmétrype (lorsque  $d_{PR} = \infty$ ) :

$A_{\text{acc}} \geq 4 \text{ D}$  : L'œil avec **vision de près idéale**.

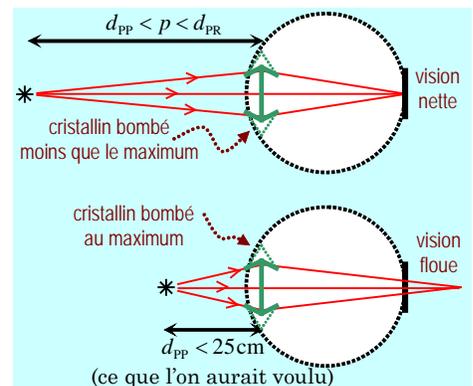
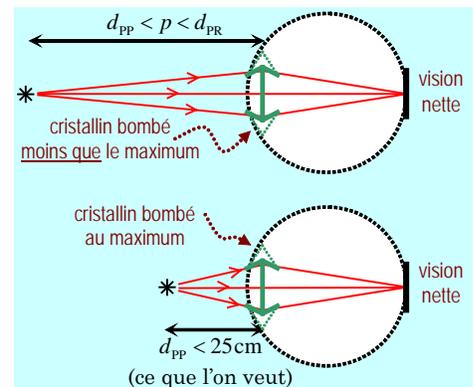
La vision de près est considérée comme idéale lorsque le *punctum proximum* est inférieur à 25 cm ( $d_{pp} < 0,25 \text{ m}$ ). Pour l'œil emmétrype *dans l'air*, cela correspond à une amplitude d'accommodation de 4 D car

$$A_{\text{acc}} = n_{\text{ext}} \left( \frac{1}{d_{pp}} - \frac{1}{d_{PR}} \right) \Rightarrow (4 \text{ D}) = (1) \left( \frac{1}{(0,25 \text{ m})} - \frac{1}{(\infty)} \right).$$

(preuve calculatoire)

$A_{\text{acc}} < 4 \text{ D}$  : L'œil **presbyte** (pour l'œil emmétrype).

L'œil est considéré comme **presbyte** lorsque la capacité d'accommoder est trop faible. Si  $A_{\text{acc}}$  est petit, alors l'éloignement du  $d_{pp}$  par rapport au  $d_{PR}$  est peu prononcé ce qui donne une zone de floue trop grande entre l'œil et le  $d_{pp}$ . On constate que la presbytie se **développe avec l'âge**, car l'amplitude d'accommodation  $A_{\text{acc}}$  a tendance à diminuer avec le vieillissement (voir tableau ici-bas).

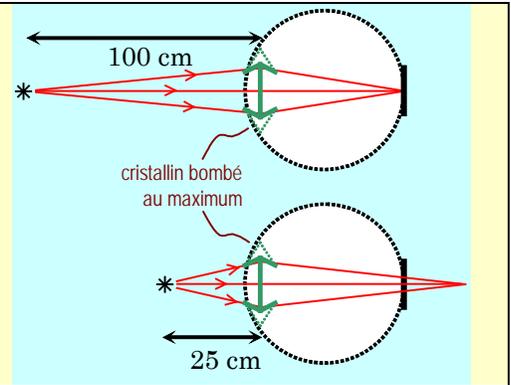


Distance typique du punctum proximum pour un œil emmétrype en fonction de l'âge

Âge	20 ans	40 ans	50 ans	70 ans
$A_{\text{acc}}$	10 D	5 D	1,67 D	1 D
Distance du PP (pour œil emmétrype)	10 cm	20 cm	60 cm	100 cm

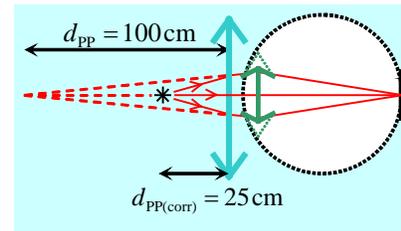
<sup>2</sup> Un  $d_{pp}$  de 25 cm est une référence en lien avec une distance de confort pour effectuer de la lecture. Certains optométristes peuvent avoir une autre référence que celle-ci.

**Situation 3 : La correction de la presbytie.** Priscilla a 70 ans et souffre de presbytie : son *punctum proximum* est à 100 cm de distance. Afin de corriger sa presbytie, on désire placer une lentille de correction devant son œil afin de ramener son PP à 25 cm. On désire déterminer **(a)** la vergence que doit avoir la lentille et **(b)** le champ de vision de l'œil. On suppose que la distance entre la lentille de correction et l'œil de Priscilla est négligeable et que le *punctum remotum* de l'œil est de 300 cm.



Pour corriger la presbytie, il faut corriger le  $d_{pp} = 100$  cm afin d'obtenir un  $d_{pp(\text{corr})} = 25$  cm.

Ainsi, on utilise une **lentille convergente** afin d'augmenter le *maque de convergence* de l'œil lorsqu'il est à sa vergence maximale  $V_{\text{max}}$ .



Pour obtenir la prescription du verre correcteur, il faut qu'un objet à 25 cm ( $d_{pp(\text{corr})}$ ) puisse former sous l'influence du verre correcteur une **image virtuelle** à la position du  $d_{pp}$  de l'œil à vergence maximale. Cela se calcul à l'aide de la formule suivante : (avec verre correcteur *dans l'air*)

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = V \Rightarrow \frac{1}{d_{pp(\text{corr})}} + \frac{1}{-|d_{pp}|} = V_{\text{verre}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(0,25)} + \frac{1}{-(1,00)} = V_{\text{verre}}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{\text{verre}} = 3 \text{ D}} \quad \text{(a)}$$

Évaluons l'amplitude d'accommodation  $A_{\text{acc}}$  à l'aide de  $d_{pp}$  et  $d_{pr}$  :

$$A_{\text{acc}} = \frac{1}{d_{pp}} - \frac{1}{d_{pr}} \Rightarrow A_{\text{acc}} = \frac{1}{(1,00)} - \frac{1}{(3,00)} \Rightarrow \boxed{A_{\text{acc}} = 0,666 \text{ D}}$$

On remarque que  $A_{\text{acc}} < 4 \text{ D}$  ce qui confirme une faible accommodation et l'état de presbytie.

Évaluons le  $d_{pr(\text{corr})}$  à l'aide du verre correcteur : (distance lentille-œil négligeable)

$$A_{\text{acc}} = \frac{1}{d_{pp(\text{corr})}} - \frac{1}{d_{pr(\text{corr})}} \Rightarrow (0,666) = \frac{1}{(0,25)} - \frac{1}{d_{pr(\text{corr})}} \Rightarrow \boxed{d_{pr(\text{corr})} = 29,99 \text{ cm}}$$

Voici le champ de vision de l'œil : **(b)**

- Sans lunette : vision [ 100,00 cm ... 300,00 cm ] (mauvaise vision de près et de loin)
- Avec lunette : vision [ 25,00 cm ... 29,99 ] (champ de vision très réduit)



# Chapitre 3.1a – La nature ondulatoire de la lumière : preuve expérimentale

## Optique ondulatoire

L'optique ondulatoire est une branche de la physique qui s'intéresse aux propriétés ondulatoires de la lumière, car la **lumière** se comporte dans plusieurs situations comme une **onde** puis qu'elle peut être caractérisée par une **longueur d'onde** et subit des phénomènes **d'interférences**.

De plus, c'est ce domaine d'étude qui a permis d'associer la **longueur d'onde** de la lumière à une **couleur** observée. Par exemple, la somme de la couleur rouge, bleu et jaune donne la couleur blanche. Ainsi, une source de lumière blanche est composée de plusieurs longueurs d'onde différentes.



Diffraction et interférence de la lumière dans les « petits trous » d'un CD.



Addition chromatique de la lumière.

## Le modèle ondulatoire d'Huygens

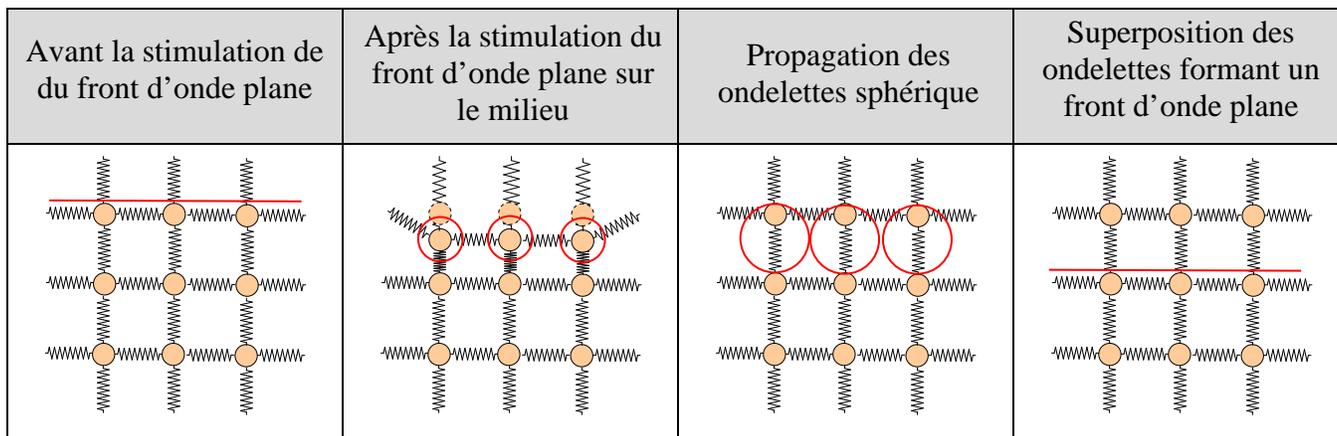
Le physicien Christiaan Huygens né au Pays-Bas fut le premier scientifique à émettre l'hypothèse ondulatoire de la lumière. En 1678, Huygens développe une technique appelé *principe de Huygens* permettant de suivre l'évolution d'un front d'onde et il l'appliqua à différents problèmes d'optique géométrique.



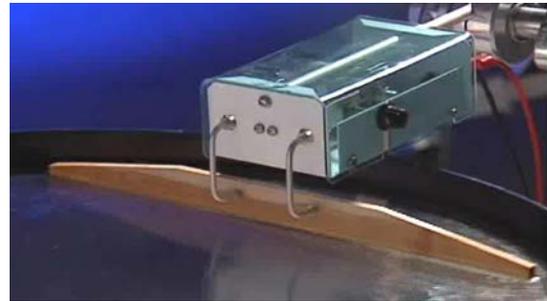
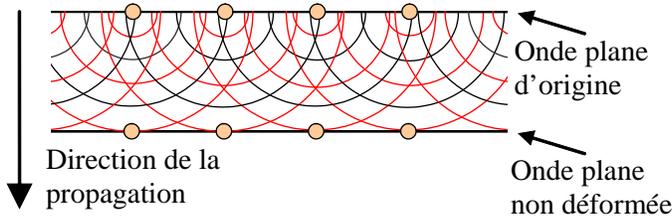
Christiaan Huygens (1629-1695)

Selon le *principe de Huygens*, un milieu pouvant propager une onde est constitué d'une multitude d'oscillateurs reliés à ses plus proches voisins par des forces internes (comme un système masses-ressort en quadrillage). Lorsqu'un oscillateur est stimulé par la présence d'une onde, celui-ci est déplacé de sa position d'équilibre ce qui provoque l'émission d'une onde de forme sphérique (une « ondelette »).

Représentation du *principe de Huygens* avec un maillage à 3 ressorts :



Lorsqu'une onde plane stimule simultanément un rangé d'oscillateurs avec la même fréquence  $f$  et la même phase  $\phi$ , la superposition de toutes les ondes sphériques générées par l'ensemble des oscillateurs génère à nouveau une onde plane.



Montage permettant de générer des ondes planes dans un bac d'eau

À cette époque, ce modèle ondulatoire était remis en question par plusieurs physiciens dont Newton à ce qui attrait à l'appliquer à la lumière, car le milieu propageant l'onde lumineuse était indéterminé (*l'éther* était le nom que portait ce milieu). Selon les théories ondulatoire de l'époque, une onde mécanique se devait d'avoir un milieu physique ce qui n'était pas le cas pour la lumière. De nos jours, la **lumière** est considérée comme étant une **onde électromagnétique** ne nécessitant pas de milieu pour être propagée.

## L'étalement d'une onde

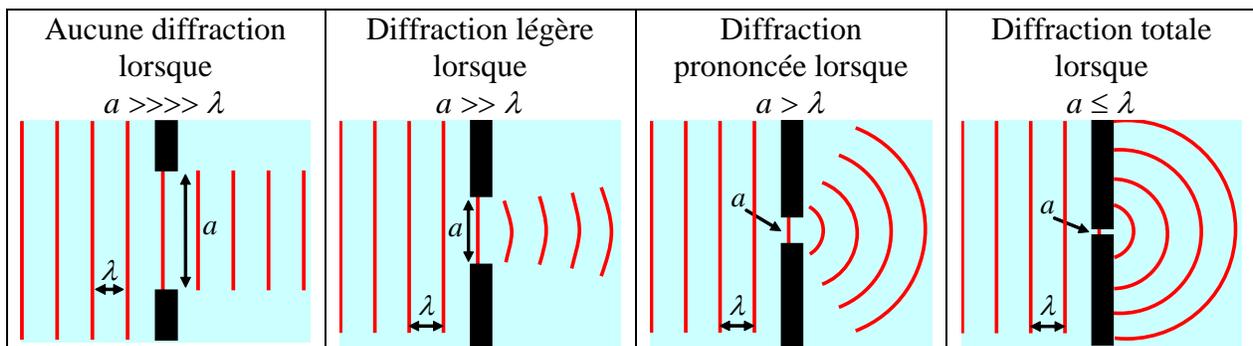
Lorsqu'une onde plane frappe une mince ouverture, la portion d'onde plane traversant l'ouverture se transforme en onde ayant une forme sphérique. On peut affirmer que l'ouverture se comporte alors comme un générateur d'onde (source) de forme sphérique. Ce phénomène porte le nom de **diffraction**<sup>1</sup>.

L'ampleur de la diffraction d'une onde plane dépend de la **longueur d'onde**  $\lambda$  de l'onde et de la **largeur de la fente**  $a$ . Plus la fente est petite comparativement à la longueur d'onde, plus la diffraction est prononcée.



Diffraction d'une vague dans l'ouverture rocheuse

Exemple :

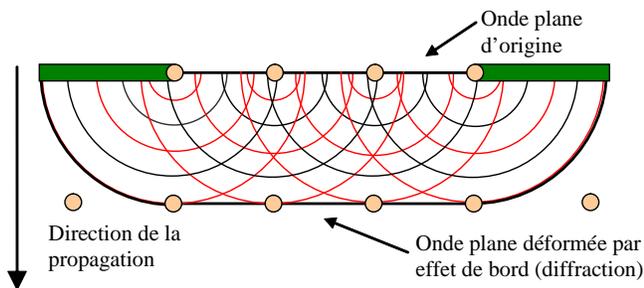


<sup>1</sup> La diffraction sera étudiée plus particulièrement au chapitre 3.5  
 Référence : Marc Séguin, Physique XXI Tome C  
 Note de cours rédigée par : Simon Vézina

# La diffraction et le modèle d'Huygens

La diffraction d'une onde peut s'expliquer grâce au *principe de Huygens*.

Lorsqu'une onde plane est forcée à stimuler uniquement un nombre restreint d'oscillateurs sur une même rangée (une petite ouverture), la superposition des ondes sphériques génère une onde de forme sphérique. Plus l'ouverture est petite, plus l'onde propagée sera de forme sphérique où l'amplitude de l'onde sera uniformément sur le front d'onde sphérique. Ce sont les effets de bord qui déforment l'onde plane d'origine en onde sphérique. Ce phénomène ondulatoire porte le nom de **diffraction**.



Diffraction d'une onde plane (vague) dans un bac d'eau ( $\lambda < a$ ).

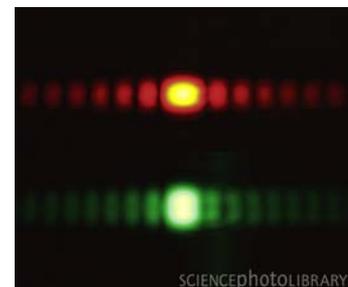


Diffraction d'une onde plane (vague) dans un bac d'eau ( $\lambda > a$ ).

# La diffraction d'un laser dans une fente rectiligne

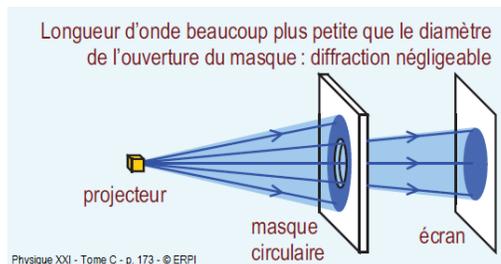
Lorsqu'un laser éclaire une fente rectiligne, on observe une figure de diffraction ce qui prouve que la lumière est une onde. L'étalement s'effectue dans l'axe où la fente est mince. Selon l'image ci-contre, la fente est mince sur l'axe horizontal ( $\leftrightarrow$ ) et le tout est projeté sur un écran plat. La forme de l'étalement dépend alors de la forme de la fente :

- Laser vert ( $\approx 550 \text{ nm}$ ) :  $\lambda \ll a$ , étalement léger.
- Laser rouge ( $\approx 650 \text{ nm}$ ) :  $\lambda \ll a$ , étalement léger.

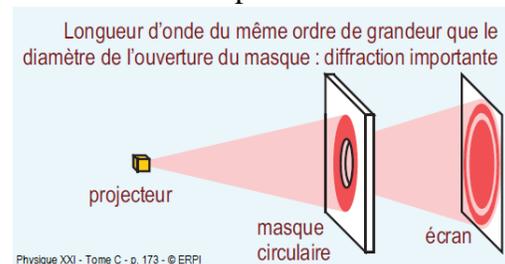


<http://www.sciencephoto.com/media/157193/enlarge>  
Diffraction d'un laser rouge et vert au travers une fente rectiligne verticale mince.

Aucune diffraction :  $\lambda \llll a$



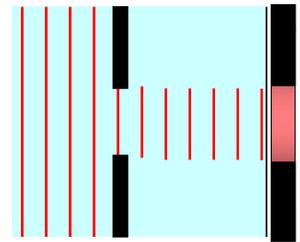
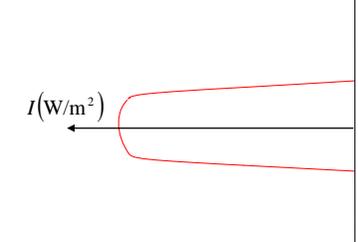
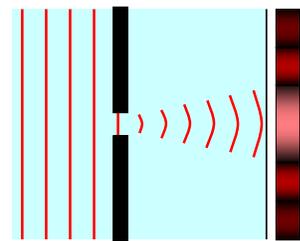
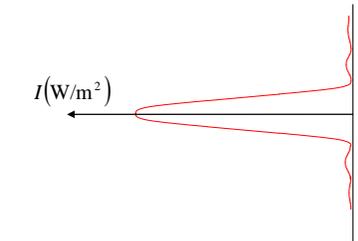
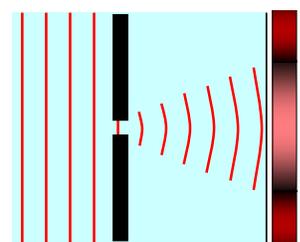
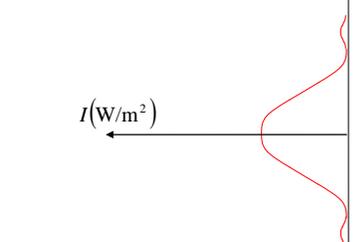
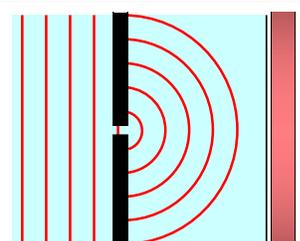
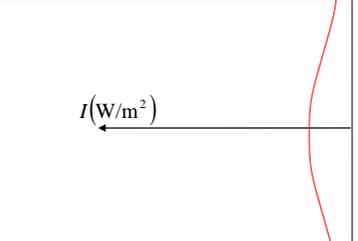
Diffraction prononcée :  $\lambda < a$



## Répartition de l'intensité après diffraction

L'intensité recueillie sur un écran de projection après la diffraction d'une onde dépend de l'ampleur de la diffraction (taille de la fente  $a$  et de la longueur d'onde  $\lambda$ ). Il est important de préciser que toute la puissance initiale de l'onde se retrouve sur l'écran de projection à différentes intensités. Ainsi, l'aire sous la courbe du graphique de l'intensité en fonction de la surface de projection doit redonner la puissance initiale.

Voici un tableau décrivant qualitativement différents cas de diffraction :

Type de diffraction et taille de l'ouverture $a$	Patron de la diffraction	Répartition de la puissance lumineuse ou intensité lumineuse
Aucune diffraction $a \gg \lambda$		
Diffraction légère $a \gg \lambda$		
Diffraction prononcée $a > \lambda$		
Diffraction complète $a \leq \lambda$		

### Remarque :

L'origine des tâches lumineuses secondaires lors de la diffraction légère ( $a \gg \lambda$ ) et prononcée ( $a > \lambda$ ) seront expliquées au chapitre 3.5.

# L'expérience de Young

En 1803, le physicien et philosophe Thomas Young publie les résultats de son expérience qui confirma la nature ondulatoire de la lumière. Basé sur le *principe de Huygens*, il réalise qu'une source de lumière qui traverse deux fentes minces tel que  $a \leq \lambda$  subit de la diffraction complète, que les deux fentes se comportent comme des oscillateurs ponctuels et que ces deux mêmes sources de lumière effectuent de l'interférence sur un écran de projection.



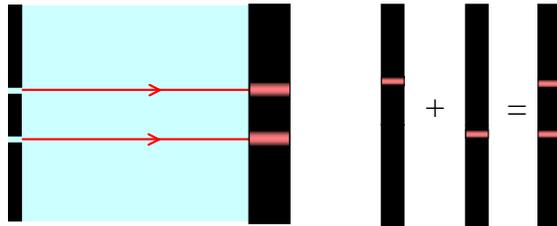
Thomas Young  
(1773-1829)

L'expérience des fentes doubles de Young a permis de relancer le débat sur la nature de la lumière. Selon la théorie Newtonienne de l'époque, la lumière était considérée comme des particules se déplaçant sur des trajectoires rectilignes comme le démontre bien l'optique géométrique.

Voici les résultats possibles de l'expérience de Young si l'on considérait la lumière avec d'autres propriétés :

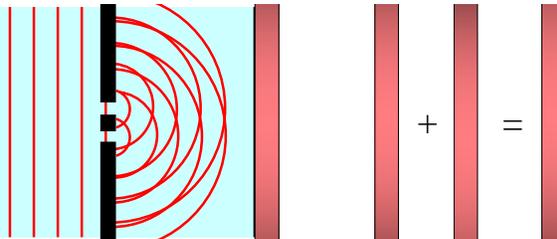
## Comportement strictement corpusculaire :

La lumière se comporte comme des particules ponctuelles ne pouvant que réfléchir sans subir de diffraction. La particule traverse l'une ou l'autre des deux fentes.



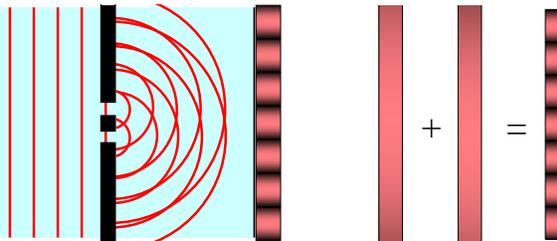
## Deux diffractions superposées :

La lumière subit de la diffraction complète par la fente du haut et du bas. La projection finale correspond à la somme de deux sources d'onde sphérique légèrement décalées verticalement l'une par rapport à l'autre.



## Deux diffractions avec interférence :

Ce résultat correspond à **l'observation de l'expérience de Young**. Il y a diffraction et interférence entre les deux sources agissant comme des sources ponctuelles. Les tâches sombres deviennent visibles lorsque les deux fentes sont légèrement décalées verticalement (une distance  $d$  sépare les deux fentes).



Ainsi, l'explication de l'expérience de Yong fait intervenir la notion d'interférence en deux dimensions de deux sources ponctuelles en phase provenant du même front d'onde d'origine. L'analyse mathématique de cette expérience sera réalisée au chapitre 3.2.







# Chapitre 3.1b – La nature ondulatoire de la lumière : preuve théorique

## La loi de la réfraction par le principe d'Huygens

En considérant qu'une source de lumière ponctuelle émet des fronts d'onde sphérique et qu'elle prend la forme d'une onde plane sur une grande distance, Huygens fut en mesure de démontrer la loi de la réfraction

$$n_2 \sin(\theta_2) = n_1 \sin(\theta_1)$$

avec une théorie ondulatoire.

### Preuve :

Considérons une onde plane voyageant dans un milieu d'indice de réfraction  $n_1$  et se dirigeant vers un milieu d'indice de réfraction  $n_2$  avec une orientation telle que le front d'onde forme un angle  $\theta_1$  avec la normale à la surface du dioptre. Considérons que  $n_1 < n_2$ . La vitesse de propagation des milieux sera

$$v_1 = \frac{c}{n_1} > \frac{c}{n_2} = v_2$$

Lorsqu'une section du front d'onde change de milieu, sa vitesse de propagation change et « plie » la ligne droite du front d'onde plane. Appliquons le principe d'Huygens à deux oscillateurs **A** et **B** faisant parti d'un même front d'onde. L'oscillateur **A** est situé sur le dioptre et propagera l'onde uniquement dans le milieu 2. L'oscillateur **B** est situé sur le front d'onde tel que la propagation du front d'onde d'origine prendra un temps  $\Delta t$  avant d'atteindre le milieu 2 en ligne droite. Après un temps  $\Delta t$ , les deux émetteurs ont générés des ondes sphériques ayant augmentés leur rayon tel que

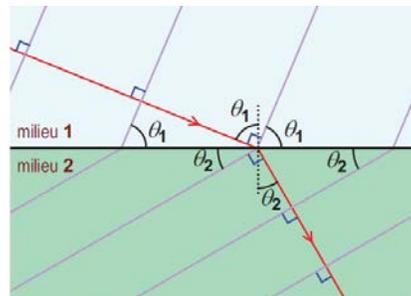
$$d_B = BB' = v_1 \Delta t \quad \text{et} \quad d_A = AA' = v_2 \Delta t$$

En appliquant la définition de la fonction sinus, nous pouvons établir que

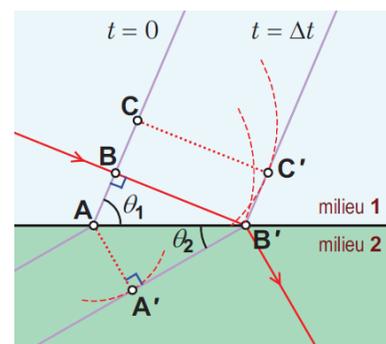
$$\sin(\theta_1) = \frac{BB'}{AB'} \quad \text{et} \quad \sin(\theta_2) = \frac{AA'}{AB'}$$

En regroupant ces deux relations, nous obtenons la loi de la réfraction :

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\theta_1)}{\sin(\theta_2)} &= \frac{BB'/AB'}{AA'/AB'} \Rightarrow \frac{\sin(\theta_1)}{\sin(\theta_2)} = \frac{BB'}{AA'} && \text{(Simplifier } AB') \\ &\Rightarrow \frac{\sin(\theta_1)}{\sin(\theta_2)} = \frac{v_1 \Delta t}{v_2 \Delta t} && \text{(Remplacer } d = v \Delta t) \\ &\Rightarrow \frac{\sin(\theta_1)}{\sin(\theta_2)} = \frac{c/n_1}{c/n_2} && \text{(Simplifier et } v = c/n) \\ &\Rightarrow n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2) \blacksquare && \text{(Simplifier et réécriture)} \end{aligned}$$



Physique XXI - Tome C - p. 212 - © ERPI



Physique XXI - Tome C - p. 213 - © ERPI

# Onde électromagnétique

Les lois de l'électromagnétisme peuvent se résumer aux équations suivantes :

1) Production d'un champ électrique  $\vec{E}$  par la charge électrique :

$$\vec{E} = \int k \frac{dQ}{r^2} \hat{r} \quad (\text{Loi de Colomb})$$

2) Production d'un champ magnétique  $\vec{B}$  par la charge électrique en mouvement :

$$\vec{B} = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2} \quad (\text{Loi de Biot et Savard, basse vitesse})$$

3) Force électromagnétique  $\vec{F}_{em}$  appliquée sur les charges : ( $\vec{F}_e$  et  $\vec{F}_m$ )

$$\vec{F}_{em} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (\text{Force de Lorentz})$$

4) Transformation et production des champs électromagnétique : (équations couplées de  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ )

Équations de Maxwell	Avec charge et courant	Sans charge ni courant
Théorème de Gauss	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$
Sans nom	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
Loi de Faraday	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Théorème d'Ampère	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Lorsqu'on manipule mathématiquement les équations de Maxwell (version sans charge ni courant), nous pouvons former deux nouvelles équations faisant intervenir seulement le champ électrique  $\vec{E}$  ou le champ magnétique  $\vec{B}$  :

Avec<sup>1</sup> :  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  et  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  et des identités mathématiques

Nous obtenons<sup>2</sup> :  $\nabla^2 \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$  et  $\nabla^2 \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$

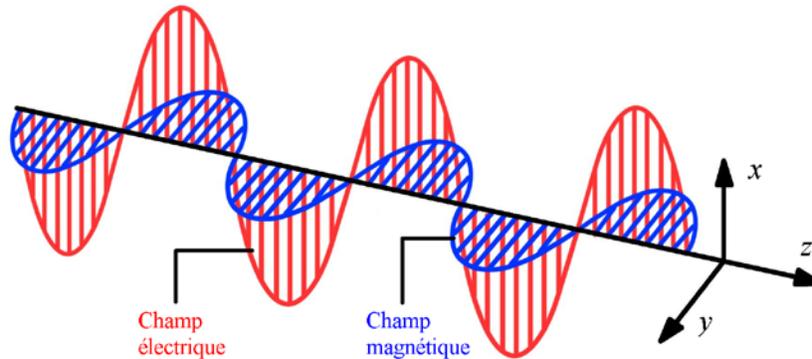
<sup>1</sup> Le gradient  $\vec{\nabla}$  est un opérateur différentiel applicable sur des champs vectoriels.

<sup>2</sup> Le laplacien  $\nabla^2$  est un opérateur différentiel applicable sur des champs vectoriels.

Une solution mathématique valide pour chacune de ces équations différentielles est une **onde transversale** où il y a oscillation perpendiculaire du champ électrique  $\vec{E}$  et du champ magnétique  $\vec{B}$  :

$$\vec{E} = E_0 \sin(kz - \omega t + \phi) \hat{x} \quad \text{et} \quad \vec{B} = B_0 \sin(kz - \omega t + \phi) \hat{y}$$

Direction de la propagation de l'onde :  $\hat{z}$



Cette onde oscillant dans deux plans simultanément voyage dans le vide à une vitesse de :

$$v = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Grâce à ces résultats, nous pouvons affirmer que :

- La lumière est un phénomène électromagnétique.
- La lumière possède une vitesse constante qui dépend du milieu dans lequel elle voyage.
- La lumière possède un comportement ondulatoire.
- L'énergie de la lumière est transportée dans le champ  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ .

## Module de la vitesse de la lumière

Lorsque la lumière voyage dans le vide, elle se déplace à la vitesse suivante :

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

(Module de la vitesse de la lumière dans le vide)

**P.S.** Cette vitesse correspond à plus de 7 fois le tour de la Terre en une seconde.

**N.B.** La valeur exacte<sup>3</sup> est  $c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$ .

<sup>3</sup> Référence : [http://fr.wikipedia.org/wiki/Vitesse\\_de\\_la\\_lumi%C3%A8re](http://fr.wikipedia.org/wiki/Vitesse_de_la_lumi%C3%A8re)

Référence : Marc Séguin, Physique XXI Tome C

Note de cours rédigée par Simon Vézina

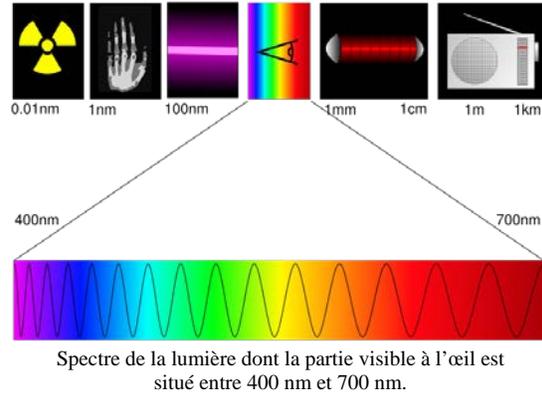
# Le spectre électromagnétique

Puisque la lumière est une onde, elle peut être caractérisée par une fréquence  $f$ . Selon le milieu dans lequel elle voyage, la longueur d'onde  $\lambda$  de la lumière est évaluée grâce à l'expression

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad \lambda = \frac{c/n}{f}$$

(dans le vide)      (dans la matière)

où  $n$  est l'indice de réfraction du milieu. On utilise l'expression « spectre » pour désigner les catégories de lumière selon sa longueur d'onde  $\lambda$ .



## Onde radio et micro-onde

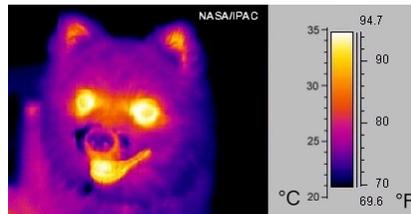
( $\lambda$  : 1 km à 1 mm)  
( $f$  : 100 kHz à 100 GHz)



(Satellite et four à micro-ondes)

## Infrarouge

( $\lambda$  : 1 mm à 700 nm)  
( $f$  : 100 GHz à 430 THz)



(Image par caméra infrarouge)

## Visible

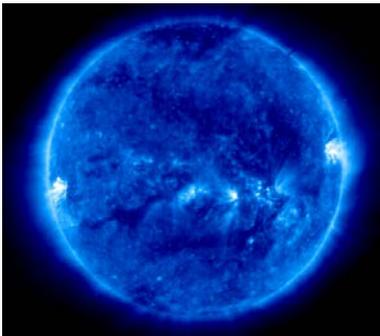
( $\lambda$  : 700 nm à 400 nm)  
( $f$  : 430 THz à 750 THz)



(Ensemble du ciel en mappemonde)

## Ultraviolet

( $\lambda$  : 400 nm à 1 nm)  
( $f$  : 750 THz à  $1 \times 10^{17}$  Hz)



(Soleil observé en ultraviolet)

## Rayon-X

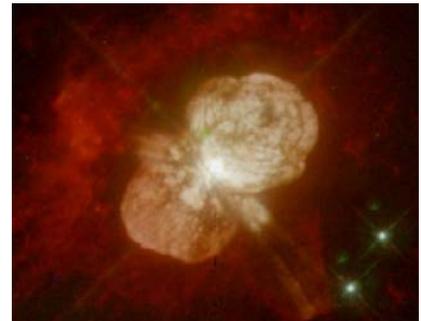
( $\lambda$  : 1 nm à 0,01 nm)  
( $f$  :  $1 \times 10^{17}$  Hz à  $1 \times 10^{19}$  Hz)



(Radiographie à rayon-X)

## Rayon gamma

( $\lambda$  : 0,01 nm à plus petit)  
( $f$  :  $1 \times 10^{19}$  Hz à plus grand)



(Supernova Eta Carinae)

<u>Radio FM :</u>	4 MHz à 100 MHz	( $\lambda$ : 75 m à 3 m)
<u>Téléphonie cellulaire :</u>	100 MHz à 10 GHz	( $\lambda$ : 3 m à 3 cm)
<u>Four à micro-ondes :</u>	2,450 GHz	( $\lambda$ : 12,2 cm)

# Méthode de production de la lumière

Voici quelques méthodes ou moyens pour produire différentes sortes de lumière :

## Rayon gamma :

Le **rayon gamma** est la lumière la plus énergétique. Elle est produite lors de la **désexcitation** d'un **noyau atomique** vers le **niveau fondamental**. Cela se produit régulièrement dans les **atomes radioactifs** d'où vient le danger de s'en approcher.

## Rayon X :

Le **rayon X** est produit lors d'une **décélération brusque** de **particules chargées** animées d'une grande vitesse initiale lors d'une collision. Des appareils de photographie exploitent le niveau d'absorption des rayons X dans la matière pour créer des images avec contraste. Plus il y a d'absorption, plus la matière est dense/particulière.

## Ultra violet (UV) :

Le **rayon ultra violet** est produit lorsqu'un **électron passe directement** d'un **état très excité** à un **niveau fondamental** dans un **atome**.

- ❖ L'ozone (O<sub>3</sub>) absorbe les UV de 320 nm et moins ce qui protège la vie sur Terre des radiations solaire.
- ❖ Le rayon ultra violet peut transporter jusqu'à 4 eV ce qui est suffisant pour briser une liaison électrique Carbone-Carbone très présente dans les cellules. Il peut également ioniser des atomes ou briser des liens chimiques.
- ❖ Les rayons UV de longueur d'onde inférieur à 300 nm sont en mesure de dépolymériser les acides nucléiques et ainsi détruire des protéines. À moins de 290 nm, les UV peuvent être employé pour tuer des micro-organismes (aliment irradié en l'alimentation).
- ❖ La cornée de l'œil bloque les UV malgré une rétine pouvant analyser cette lumière.

## Infrarouge (IR) :

Le **rayon infrarouge** est produit par **l'agitation thermique** de la matière (particules, molécules, cellules).

- ❖ Une lampe incandescente ordinaire émet plus d'énergie dans l'infrarouge que dans le visible d'où l'intérêt pour les ampoules fluorescentes et à diodes électroluminescentes (DEL).
- ❖ Les molécules absorbent très efficacement les IR, car ils possèdent plusieurs modes vibrationnels et rotationnels à ces fréquences.
- ❖ Plusieurs télécommandes utilisent ce rayonnement pour communiquer avec la télévision.

## Micro-onde :

Le **micro-onde** est produit grâce à **l'oscillation** d'un **courant électrique** où une **accélération faible** des **particules chargées**.

- ❖ Les micro-ondes sont utilisées pour réchauffer des aliments.
- ❖ Les micro-ondes sont utilisées dans les télécommunications, car ces ondes sont faiblement atténuées dans l'atmosphère, qu'elles sont peu coûteuses à produire et qu'elles peuvent être produites en grande quantité de façon « relativement » sécuritaire à une fréquence très précise.





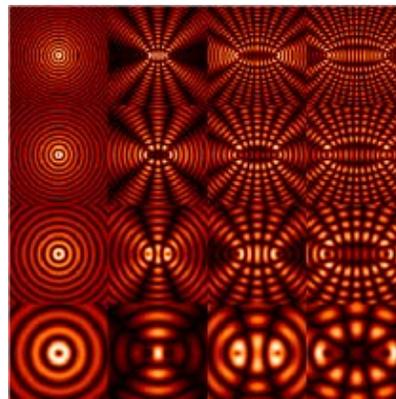


# Chapitre 3.1c – La nature ondulatoire de la lumière : interférence en deux dimensions

## L'interférence

L'interférence est la **superposition** de **deux ondes de même longueur d'onde**. Lorsque la superposition s'additionne complètement, on dit que l'interférence est **constructive**. Lorsque la superposition se soustrait complètement, on dit que l'interférence est **destructive**. L'interférence peut être également partiellement constructive et partiellement destructive. Cela se produit à tout coup si les deux ondes n'ont pas la même amplitude.

Le type d'interférence dépend de la différence de phase  $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$  entre les deux ondes qui peut également être représentée en décalage spatiale  $\delta : (N \in \mathbb{N})$



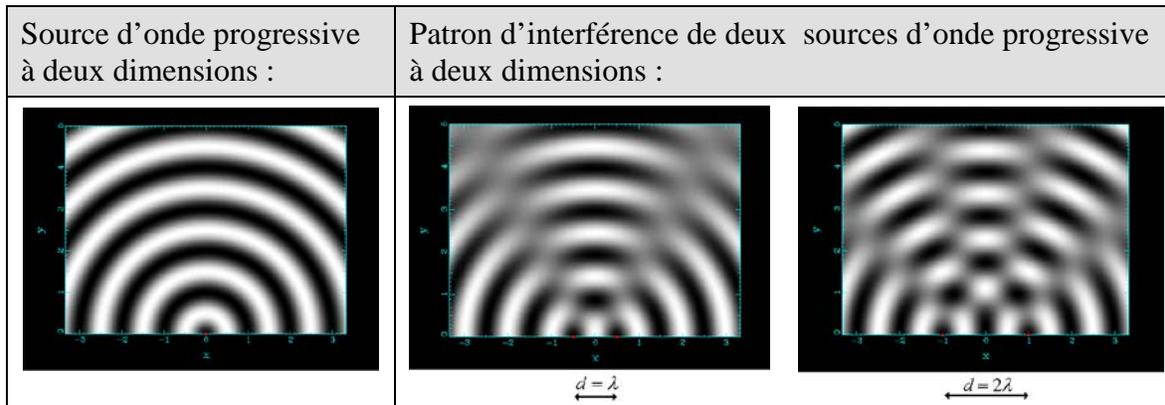
(<http://en.wikipedia.org/wiki/File:Wavepanel.png>)  
Interférence en deux dimensions à deux sources à différentes positions pour quatre longueurs d'onde.

	Interférence constructive	Interférence destructive
<b><u>Critère à satisfaire</u></b>	$\delta = m\lambda$ ou $\Delta\phi = 2\pi m$	$\delta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$ ou $\Delta\phi = (2m + 1)\pi$
Onde 1 : $y_1 = A \sin(kx - \omega t + \phi_1)$	$y_1 = A \sin(kx - \omega t + \phi)$ (avec $\phi_1 = \phi$ )	$y_1 = A \sin(kx - \omega t + \phi)$ (avec $\phi_1 = \phi$ )
Onde 2 : $y_2 = A \sin(kx - \omega t + \phi_2)$	$y_2 = A \sin(kx - \omega t + \phi)$ (avec $\phi_2 = \phi$ )	$y_2 = A \sin(kx - \omega t + \phi + \pi)$ (avec $\phi_1 = \phi + \pi$ )
Représentation 1D		
Représentation 2D		

- où  $\delta$  : Différence de marche des deux ondes au point P (m)  
 $\Delta\phi$  : Différence de phase entre les deux sources au point P (rad) ( $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$ )  
 $m$  : Multiple entier de longueur d'onde ( $m \in \mathbb{Z}$ )  
 $\lambda$  : Longueur d'onde produite par les des sources dans le milieu (m)

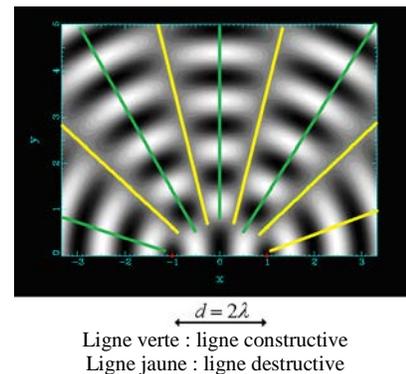
# Interprétation d'un schéma d'interférence en deux dimensions

En deux dimensions, on représente un front d'onde par une ligne de couleur (blanche) et la crête de l'onde y est associée. Le creux de l'onde est situé entre deux fronts d'onde consécutifs.



Lorsqu'il y a superposition d'onde, l'addition peut donner : (point rouge : source d'onde)

- Deux crêtes superposées  $\Rightarrow$  blanc + blanc = très blanc  
 $\Rightarrow$  **interférence constructive**
- Deux creux superposées  $\Rightarrow$  noir + noir = très noir  
 $\Rightarrow$  **interférence constructive**
- Crête et creux superposées  $\Rightarrow$  blanc + noir = gris  
 $\Rightarrow$  **interférence destructive**
- Autre  $\Rightarrow$  **interférence partielle**



## Différence de marche

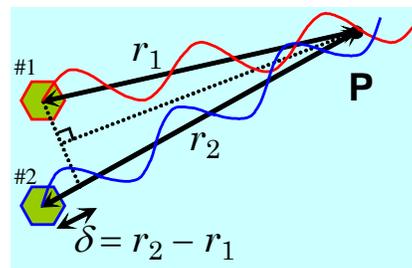
Lorsqu'on effectue la superposition de deux ondes en phase à un endroit quelconque **P** de l'espace, les deux ondes n'ont pas parcourues la même distance  $r$ . Elles seront donc décalées spatialement par une différence de marche  $\delta$  :

$$\delta = r_2 - r_1$$

où  $\delta$  : Différence de marche des deux ondes au point **P** (m)

$r_1$  : Distance entre la source #1 et le point **P** (m)

$r_2$  : Distance entre la source #2 et le point **P** (m)

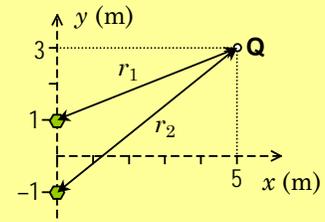


➤ Dans ce calcul,  $\delta$  représente un retard spatial de la source #2 par rapport à la source #1, car nous effectuons le calcul  $r_2 - r_1$ . On peut également faire le calcul  $\delta = |r_2 - r_1|$ .

➤ Si  $\delta > 0$ , alors la source #2 est en retard.

➤ Si  $\delta < 0$ , alors la source #2 est en avance.

**Situation 2 : Interférence constructive.** Dans le plan  $xy$ , deux sources qui émettent des ondes radio en phase sont placées sur l'axe  $y$  à 1 m de part et d'autre de l'origine (schéma ci-contre). En ajustant l'oscillateur qui alimente les sources, on peut faire varier la longueur d'onde entre 25 cm et 50 cm. Considérons le point **P** situé en  $(x = 5 \text{ m}; y = 0)$  et le point **Q** situé en  $(x = 5 \text{ m}, y = 3 \text{ m})$ . On désire déterminer pour quelle(s) longueur(s) d'onde il y a interférence constructive aux points **P** et **Q**.



Puisque les distances  $r_1$  et  $r_2$  sont identiques pour les deux sources au point **P**, il y aura interférence constructive pour n'importe quelle longueur d'onde. Ainsi :

$$\boxed{\lambda = \text{toutes valeurs acceptées}} \quad (\text{Interférence constructive à P})$$

Évaluons les distances  $r_1$  et  $r_2$  pour les deux sources au point **Q** :

$$r_1 = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29} \quad \Rightarrow \quad \boxed{r_1 = 5,385 \text{ m}}$$

$$r_2 = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41} \quad \Rightarrow \quad \boxed{r_2 = 6,403 \text{ m}}$$

À l'aide de la différence de marche et de la définition de l'interférence constructive, évaluons les longueurs d'onde acceptables :

$$\delta = m\lambda \quad \Rightarrow \quad r_2 - r_1 = m\lambda \quad (\text{Différence de marche, } \delta = r_2 - r_1)$$

$$\Rightarrow \quad (6,403) - (5,385) = m\lambda \quad (\text{Remplacer valeurs num.})$$

$$\Rightarrow \quad m\lambda = 1,018 \quad (\text{Simplification numérique})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\lambda = \frac{1,018}{m}} \quad (\text{Interférence constructive à Q})$$

Pour avoir une interférence constructive au point **Q**, il faut satisfaire l'équation précédente. Pour différentes valeurs  $m$ , nous pouvons associer une longueur d'onde :

$$m = 1 : \quad \lambda = \frac{1,018}{1} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1,018 \text{ m} \quad \ll \text{exclue} \gg$$

$$m = 2 : \quad \lambda = \frac{1,018}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0,509 \text{ m} \quad \ll \text{exclue} \gg$$

$$m = 3 : \quad \lambda = \frac{1,018}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda = 0,339 \text{ m}} \quad (0,25 \leq \lambda \leq 0,50)$$

$$m = 4 : \quad \lambda = \frac{1,018}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda = 0,254 \text{ m}} \quad (0,25 \leq \lambda \leq 0,50)$$

Puisque l'interférence constructive se produit pour n'importe quelle longueur d'onde au point **P**, les longueurs d'onde qui sont des solutions de notre problème sont les suivantes :

$$\boxed{\lambda = \{0,254 \text{ m}, 0,339 \text{ m}\}}$$

## Différence de marche avec des sources asynchrones

Lorsqu'il faut évaluer la différence de marche à un point **P** de deux sources identiques non synchronisées, l'équation de la différence de marche  $\delta$  précédente n'est plus valide. Par contre, nous pouvons apporter une correction mineure.

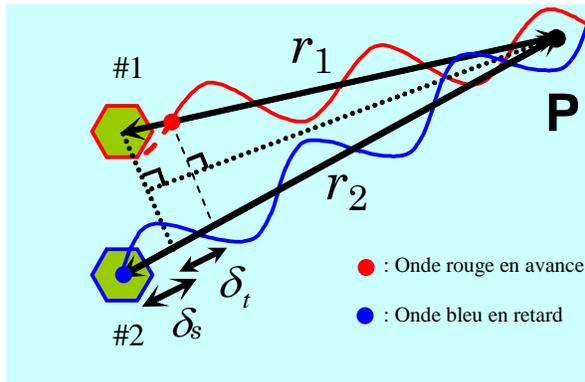
Si les deux sources ne sont pas synchronisées, c'est qu'une source a commencé à émettre des ondes avant l'autre. Puisque le calcul  $\delta_s = r_2 - r_1$  représente un retard spatial de la source #2 par rapport à la source #1, le retard total  $\delta$  sera influencé également si la source #2 a émis avant ou après la source #1.

Il y aura une différence de marche supplémentaire associée à la désynchronisation :

$$\delta = \delta_s \pm \delta_t \quad \text{et} \quad \delta_s = r_2 - r_1, \quad \delta_t = v\Delta t$$

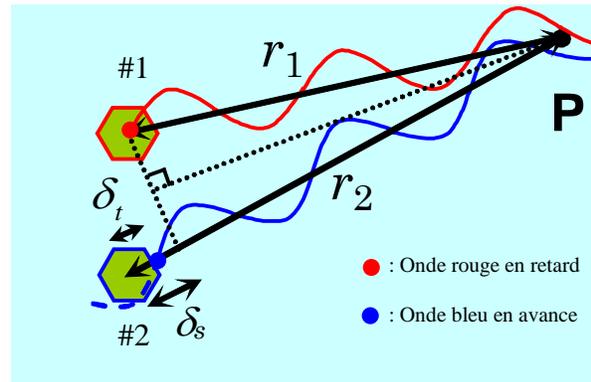
Source #2 en **retard temporellement**  
sur la source #1

$$\delta = \delta_s + \delta_t$$



Source #2 en **avance temporellement**  
sur la source #1

$$\delta = \delta_s - \delta_t$$



- où
- $\delta$  : Différence de marche totale des deux sources au point **P** (m)
  - $\delta_s$  : Différence de marche spatiale des deux ondes au point **P** (m)
  - $\delta_t$  : Différence de marche temporelle au point **P** (m)
  - $r_1$  : Distance entre la source #1 et le point **P** (m)
  - $r_2$  : Distance entre la source #2 et le point **P** (m)
  - $v$  : Vitesse de propagation de l'onde (m/s)
  - $\Delta t$  : Durée de la désynchronisation (s)

## Différence de marche avec déphasage intrinsèque

Lorsque deux sources de même longueur d'onde ne sont pas identiques, la forme du sinus de l'onde émise par la première source peut être différente de la forme du sinus de l'onde émise par la deuxième source. Par exemple, une source peut émettre un sinus et l'autre source peut émettre un cosinus. Ces deux ondes sont quand même identiques à un déphasage près de  $\pi/2$  radian.

Nous pouvons utiliser la règle suivante afin de convertir un déphasage intrinsèque angulaire (en radians) en une différence de marche intrinsèque (en mètres) :

$$\delta_i = \frac{\Delta\phi}{2\pi} \lambda$$

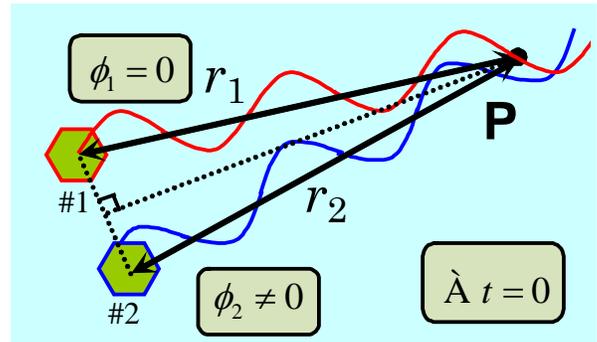
où  $\Delta\phi$  : Déphasage intrinsèque angulaire (rad)

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$$

$2\pi$  : Cycle complet angulaire (rad)

$\delta_i$  : Différence de marche intrinsèque (m)

$\lambda$  : Cycle complet spatial (m)



À  $t = 0$ , les deux oscillateurs ne sont pas en phase ce qui génère une différence de phase intrinsèque.

## L'équation générale de la différence de marche

De façon générale, nous pouvons définir la différence de marche totale  $\delta$  grâce à :

Différence de marche spatiale	Différence de marche temporelle	Différence de marche intrinsèque
$\delta_s = r_2 - r_1$	$\delta_t = v\Delta t$	$\delta_i = \frac{\Delta\phi}{2\pi} \lambda$

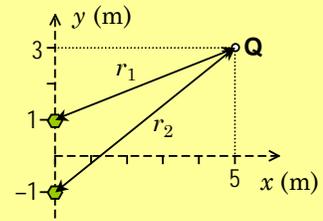
La différence de marche totale sera la somme de ces trois influences. Cependant, il faut faire **attention au signe** de la différence de marche temporelle et de la différence de marche intrinsèque afin de bien évaluer si ces deux dernières influences avancent ou reculent l'onde de la source #2 par rapport à l'onde de la source #1 :

$$\delta = \delta_s \pm \delta_t \pm \delta_i$$

### Application de l'interférence :

- Casque écouteur antibruit (reproduction du bruit ambiant déphasé par  $\pi$ )
- Palme rotative d'un hélicoptère de combat Apache (réduction du bruit de l'appareil par interférence).
- Antenne pour téléphonie cellulaire (réduction de l'émission dans le ciel par interférence).

**Situation 4 : Interférence avec sources déphasées.** On modifie le montage de la situation 1 afin de retarder la source du haut (la source **1**, situé en  $y = +1$  m) de  $\pi/2$  rad par rapport à la source du bas. On désire déterminer pour quelles valeurs de  $\lambda$  on a de l'interférence constructive au point **Q**.



Évaluons la différence de marche spatiale au point **Q** : ( $r_1 = 5,385$  m et  $r_2 = 6,403$  m)

$$\delta_s = r_2 - r_1 \quad \Rightarrow \quad \delta_s = (6,403) - (5,385) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta_s = 1,018 \text{ m}}$$

Évaluons la différence de marche temporelle. Puisque quelle est présentement exprimée en radians, effectuons la conversion en mètres :

$$\delta_t = \frac{\phi_t}{2\pi} \lambda \quad \Rightarrow \quad \delta_t = \frac{(\pi/2)}{2\pi} \lambda \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta_t = \lambda/4}$$

Évaluons notre différence de marche totale. Puisque la source **1** est en retard, c'est équivalent de dire que la source **2** est en avance :

$$\delta = \delta_s \pm \delta_t \pm \delta_i \quad \Rightarrow \quad \delta = \delta_s - \delta_t \quad (\delta_i = 0, -\delta_t \text{ car \#2 en avance})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\delta = 1,018 - \lambda/4} \quad (\text{Remplacer valeurs numériques})$$

Évaluons les longueurs d'onde  $\lambda$  admissibles pour une interférence constructive :

$$\delta = m\lambda \quad \Rightarrow \quad \left(1,018 - \frac{\lambda}{4}\right) = m\lambda \quad (\text{Remplacer valeurs num.})$$

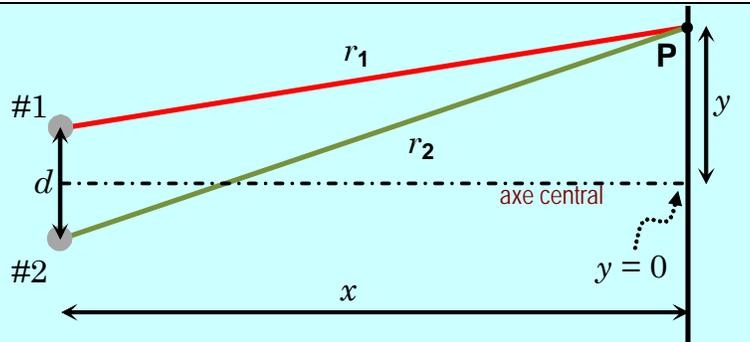
$$\Rightarrow \quad 1,018 = \left(m + \frac{1}{4}\right)\lambda \quad (\text{Ajouter } \lambda/4 \text{ des deux côtés et factoriser } \lambda)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\lambda = \frac{1,018}{\left(m + \frac{1}{4}\right)}} \quad (\text{Isoler } \lambda)$$

Nous avons les valeurs admissibles suivantes entre 25 cm et 50 cm pour  $m = 3$  et  $m = 2$ :

$$\boxed{\lambda = \{0,313 \text{ m}, 0,452 \text{ m}\}}$$

**Situation A : Recherche d'un site où il y a interférence destructive.** Considérons deux sources ondulatoires #1 et #2 alignées selon un axe  $y$  et séparées par une distance  $d$ . On place à une distance  $x$  des deux sources un écran plan aligné parallèlement à l'alignement des deux sources tel qu'illustré sur le schéma ci-contre.



On désire **(a)** déterminer une expression mathématique permettant d'évaluer la différence de marche  $\delta$  entre la source #1 et #2 pour une point  $y$  situé sur l'écran où  $y = 0$  correspond à  $\delta = 0$ , **(b)** déterminer une expression mathématique associée à une coordonnée  $y$  où il y aura interférence destructive pour une onde longueur d'onde  $\lambda$  et **(c)** isoler  $y$  dans l'expression trouvée en **(b)**.

À l'aide du théorème de Pythagore, nous pouvons établir que

$$r_1 = \sqrt{x^2 + (y - d/2)^2} \quad \text{et} \quad r_2 = \sqrt{x^2 + (y + d/2)^2}$$

ce qui nous donne la différence de marche  $\delta = r_2 - r_1$  correspond à l'expression

$$\delta = \sqrt{x^2 + (y + d/2)^2} - \sqrt{x^2 + (y - d/2)^2} \quad . \quad \text{(a)}$$

Pour obtenir un site  $y$  où il y a interférence destructive pour la longueur d'onde  $\lambda$ , il faudra satisfaire l'équation

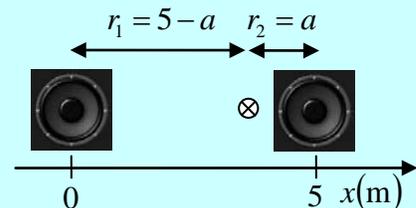
$$\delta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad .$$

En remplaçant la différence de marche  $\delta$ , nous obtenons

$$\sqrt{x^2 + (y + d/2)^2} - \sqrt{x^2 + (y - d/2)^2} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad . \quad \text{(b)}$$

Malheureusement, les multiples solutions pour  $y$  qui dépendent de  $m \in \mathbb{N}$  ne peuvent pas être obtenues facilement car l'équation en (b) **ne permet pas d'isoler  $y$** .

**Situation B : Deux haut-parleurs déphasés temporellement.** Deux haut-parleurs identiques émettent un son à 400 Hz. Ils sont séparés par une distance de 5 m tel qu'illustré sur le schéma ci-contre. Le haut-parleur de gauche est branché deux secondes avant le haut-parleur de droite. On désire trouver l'endroit le plus près du haut-parleur de droite entre les deux haut-parleurs où il y a interférence destructive du son.



Considérons le **premier haut-parleur branché** comme étant la **source #1** et le **deuxième haut-parleur branché** comme étant la **source #2**. Ainsi, la **source #2** est en **retard temporellement** de 2 secondes.

Évaluons la longueur d'onde du son :

$$\lambda = \frac{v}{f} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{(340)}{(400)} \quad (\text{Remplacer valeurs num.})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\lambda = 0,850 \text{ m}} \quad (\text{Calcul})$$

Évaluons la différence de marche spatiale où  $r_1 = 5 - a$  et  $r_2 = a$

$$\delta_s = r_2 - r_1 \quad \Rightarrow \quad \delta_s = (a) - (5 - a) \quad (\text{Remplacer valeurs num.})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\delta_s = 2a - 5} \quad (\text{Simplification})$$

**N.B.** Selon le choix de représentation de  $r_1$  et  $r_2$ , on cherche un  $a$  le plus près possible de zéro où il y a une interférence destructive tout en gardant  $a > 0$  pour demeurer entre les deux haut-parleurs.

Évaluons la différence de marche temporelle : (vitesse du son :  $v_s = 340 \text{ m/s}$ )

$$\delta_t = v\Delta t \quad \Rightarrow \quad \delta_t = (340)(2) \quad (\text{Remplacer valeurs num.})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\delta_t = 680 \text{ m}} \quad (\text{Multiplication})$$

Puisque les deux haut-parleurs sont identiques, ils n'ont pas de déphasage intrinsèque. Nous avons alors la différence de marche totale suivante :

$$\delta = \delta_s \pm \delta_t \pm \delta_i \quad \Rightarrow \quad \delta = \delta_s + \delta_t \quad (\delta_i = 0, +\delta_t \text{ car \#2 en retard})$$

$$\Rightarrow \quad \delta = (2a - 5) + (680) + (0) \quad (\text{Remplacer valeurs num.})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\delta = 2a + 675} \quad (\text{Simplification})$$

Avec la définition de l'interférence destructive, nous pouvons évaluer notre distance  $a$  la plus petite du haut-parleur #2 :

$$\delta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad \Rightarrow \quad 2a + 675 = \left(m + \frac{1}{2}\right)(0,850) \quad (\text{Remplacer valeurs num.})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a = 0,425\left(m + \frac{1}{2}\right) - 337,5} \quad (\text{Isoler } a)$$

Nous devons trouver une valeur de  $m$  tel que  $a$  sera la plus petite tout en étant positive :

$$\text{Essayons } m = 793 : a = 0,425\left(793 + \frac{1}{2}\right) - 337,5 \quad \Rightarrow \quad a = -0,2625 \text{ m (rejeter)}$$

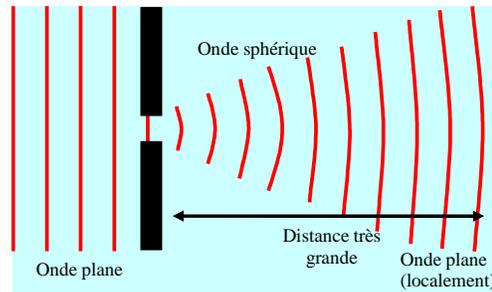
$$\text{Essayons } m = 794 : a = 0,425\left(794 + \frac{1}{2}\right) - 337,5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = 0,1625 \text{ m}} \quad (\text{bonne valeur})$$

$$\text{Essayons } m = 795 : a = 0,425\left(795 + \frac{1}{2}\right) - 337,5 \quad \Rightarrow \quad a = 0,5875 \text{ m (trop grand)}$$

# Chapitre 3.2 – L'expérience de Young

## L'étalement de l'onde plane en onde sphérique

Lorsqu'une onde plane subit une diffraction au travers une ouverture, l'onde prend la forme d'une onde sphérique. Lorsque l'onde sphérique s'est beaucoup déployée, elle se comporte localement comme une onde plane, car la courbure de l'onde est faible puisque le rayon du cercle décrit par le front d'onde est très grand.



## Lumière cohérente

Pour observer une interférence avec de la lumière, il faut que deux sources de lumière soit :

- 1) de même longueur d'onde  $\lambda$
- 2) cohérente

La cohérence de la lumière est un sujet très délicat. La définition proposée est à la fois précise et en même temps abstraite :

« Deux ondes lumineuses sont dites mutuellement cohérentes si elles donnent naissance à une figure d'interférences assez stable pour être détectée. »

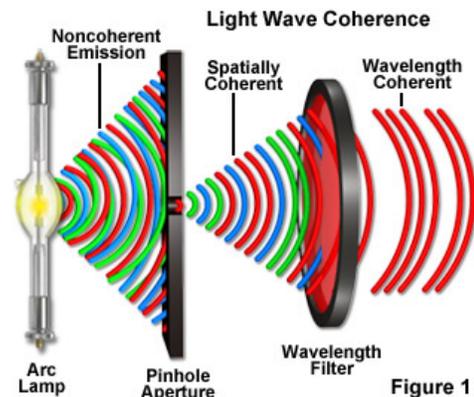
Référence : Encyclopaedia Universalis<sup>1</sup>

La **cohérence** entre **deux sources de lumière** impose que ces deux sources soient **produites** par un **phénomène identique** (même fréquence) et qu'une **relation de phase** puisse être possible **dans l'espace**. Pour produire une interférence, il faut alors séparer au besoin le faisceau de lumière d'origine en deux sources distinctes sans trop altérer la fréquence (sinon il y a décohérence) et réunir la lumière des deux sources en un même point de l'espace. C'est la **recombinaison** de l'onde qui est à l'origine de **l'interférence**.

Exemple de lumière non cohérente :

### Le Soleil et les ampoules incandescentes

Une onde lumineuse de longueur d'onde  $\lambda$  provenant du Soleil ou d'une ampoule n'est pas cohérente, car elle ne forme pas une onde sphérique étant donné que la surface générant l'onde n'est pas ponctuelle. Si l'on bloque partiellement une source non ponctuelle, on peut la réduire à une source plus petite et ainsi partiellement ponctuelle ce qui sera suffisant pour que la lumière générée par la surface puisse être cohérente<sup>2</sup>.



<http://zeiss-campus.magnet.fsu.edu/tutorials/coherence/indexflash.html>

Avec un masque, on peut créer une source ponctuelle cohérente à partir d'une source non ponctuelle.

<sup>1</sup> Référence de la citation : <http://www.universalis.fr/encyclopedie/optique-optique-coherente/>

<sup>2</sup> Pour plus de détail, il faut étudier la notion de cohérence spatiale.

Référence : Marc Séguin, Physique XXI Tome C

Note de cours rédigée par Simon Vézina

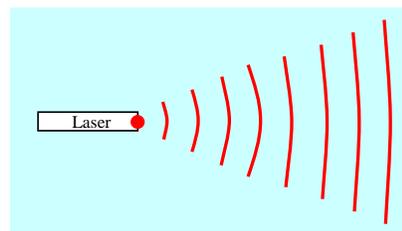
## Exemple lumière cohérente :

### Le laser

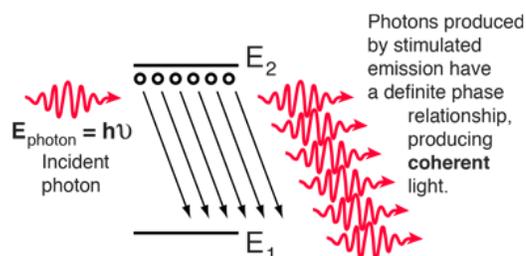
Un laser est une source de lumière à longueur d'onde précise et cohérente. Elle provient d'une désexcitation spontanée d'un groupe d'électrons excités préalablement par une source d'énergie externe. La corrélation de la désexcitation est maintenue par le phénomène quantique qui porte le nom **d'inversion de population**.

On peut séparer le faisceau d'un laser par différents moyens optiques (lentille, miroir) ce qui ne cause pas de décohérence (la constante de phase reste inchangée). On peut par la suite recombinaison cette lumière pour observer un patron d'interférence en raison d'une différence de marche causée par les différents trajets parcourus par la lumière.

Puisque la production lumineuse d'un laser spécifie une constante de phase  $\phi$  pour l'onde électromagnétique de façon arbitraire, deux laser ne peuvent pas statistiquement générer la même en tout temps ce qui les empêchent d'interférer ensemble.



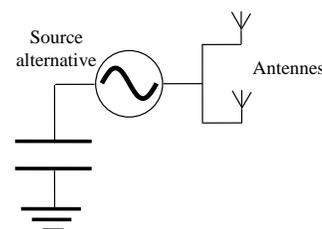
Un laser est une source de lumière cohérente, car la lumière est en phase.



<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/optmod/qualig.html>

### L'antenne radio

L'antenne radio est un générateur d'onde électromagnétique de type micro-onde dont la fréquence  $f$  et la phase  $\phi$  sont très précises et contrôlées. Ainsi, deux antennes reliées à deux oscillateurs peuvent interférer. Cependant, l'imprécision des oscillateurs aura un impact sur durée possible de l'interférence.

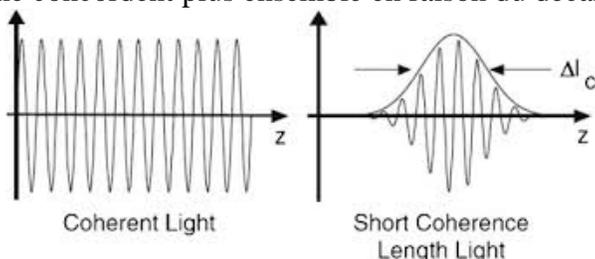


Deux antennes branchées en parallèle effectuent de l'interférence.

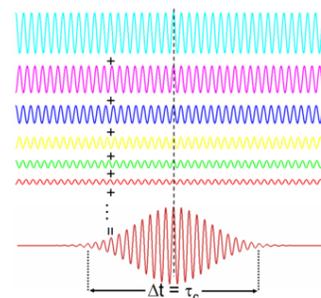
Le temps de cohérence  $\tau_c$  d'une source de fréquence  $f$  ayant une bande de fréquence  $\Delta f$  est

$$\tau_c = \frac{1}{\Delta f}$$

ce qui donne une longueur de cohérence  $L_c = v\tau_c$ . Si la différence de marche  $\delta$  entre deux sources cohérentes est supérieure à  $L_c$ , alors les deux sources ne peuvent pas interférer, car les amplitudes des ondes en interférence ne concordent plus ensemble en raison du décalage.



<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0925521418307452>

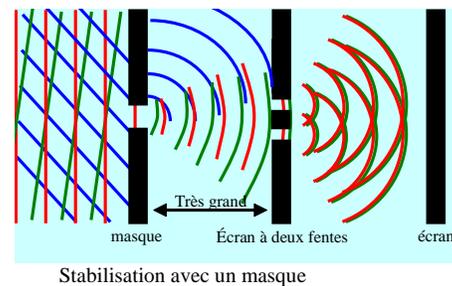
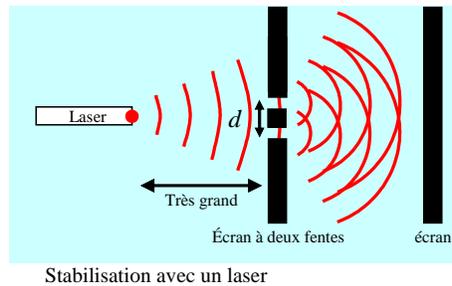


[http://en.wikipedia.org/wiki/Coherence\\_\(physics\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Coherence_(physics))

La superposition de fréquence légèrement différente produit une impulsion d'une durée finie qui correspond au temps de cohérence.

## Stabilisation de la figure d'interférence à deux fentes

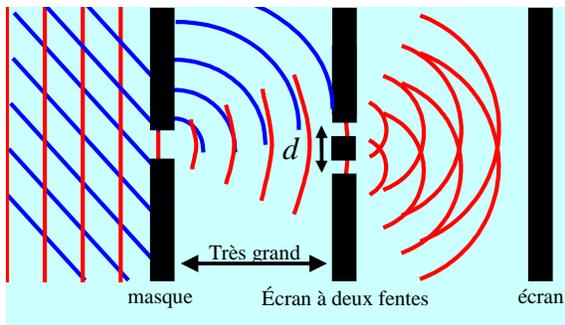
Pour observer une figure d'interférence à deux fentes, il faut **stabiliser la forme des fronts d'onde** ce qui permet de projeter la figure d'interférence toujours au même endroit. On utilise un **laser** ou une **source de lumière non cohérente** que l'on **filtre à l'aide d'un masque** pour forcer les fronts d'onde à être parallèle à la surface des deux fentes.



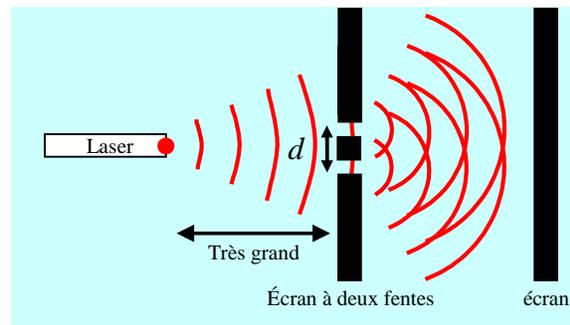
## Géométrie de l'expérience de Young

L'expérience de Young consiste à étudier l'**interférence** de **deux sources cohérentes sphériques séparées** par une **distance  $d$**  issue d'un même front d'onde d'origine. La formation des deux sources cohérentes sphériques se fait grâce à un **écran** composé de **deux fentes** très mince produisant la diffraction. On utilise un écran pour mesurer l'effet de l'interférence grâce à l'intensité lumineuse :

Expérience de Young avec lumière et masque

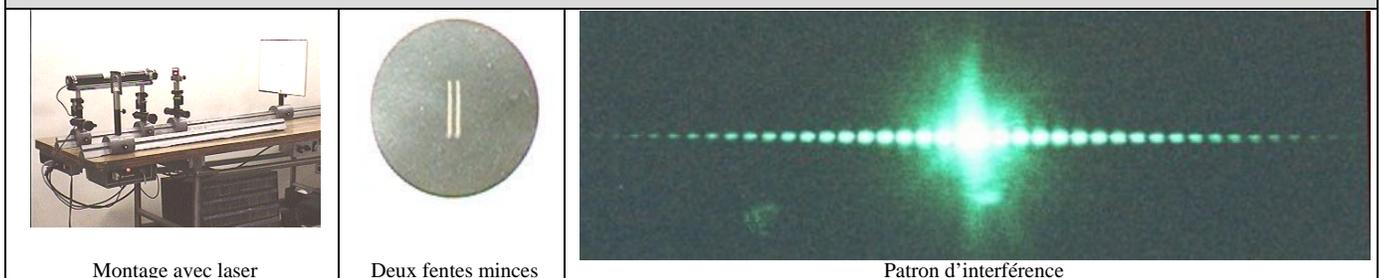


Expérience de Young avec Laser



Lorsqu'on projette le patron d'interférence de l'expérience de Young sur un écran plat très éloigné des deux fentes ( $L$  très grand), on observe une séquence alternée de franges brillantes (maximum) et de frange sombre (minimum) :

Expérience de Young avec fente  $a > \lambda$ , diffraction prononcée



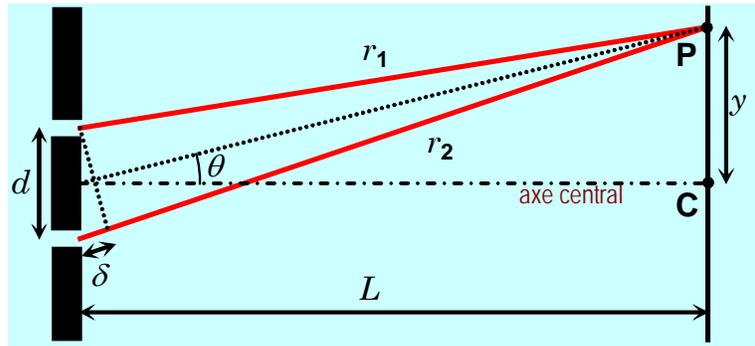
Puisque les deux sources de lumière sont en phase temporellement et intrinsèquement (même front d'onde d'origine), il y aura interférence constructive et destructive sur différents endroits  $P$  de l'écran en raison d'une différence de marche spatiale  $\delta$  :

Interférence constructive :

$$\delta = m\lambda$$

Interférence destructive :

$$\delta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$$



- où
- $r_1$  : Distance entre la source #1 et le point P (m)
  - $r_2$  : Distance entre la source #2 et le point P (m)
  - $y$  : Position verticale pour situer le point P mesurée par rapport à l'axe central (m)
  - $\delta$  : Différence de marche entre la source #1 et la source #2 au point P (m) ( $\delta = r_2 - r_1$ )
  - $L$  : Distance entre les deux sources (fentes) et l'écran (m)
  - $d$  : Distance entre les deux sources (fentes) (m)
  - $\theta$  : Angle formé à l'aide de la relation  $\tan(\theta) = y/L$
  - $\lambda$  : Longueur d'onde de la source (m)

## Approximation dans l'expérience de Young

Afin de faciliter l'évaluation de la différence de marche spatiale  $\delta$ , l'expérience de Young propose les approximations suivantes :

### 1) Approximation des rayons parallèles

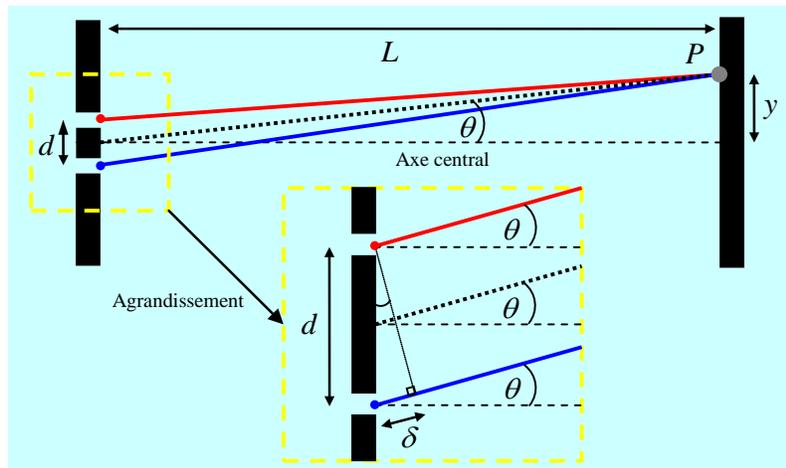
Lorsque la **différence de marche spatiale**  $\delta$  entre deux sources (deux fentes) à un **point P** est **beaucoup plus petite** que la **distance L** entre **l'écran** et les **fentes**, on peut approximer le trajet effectué par les **ondes** comme étant **parallèle**. La différence de marche  $\delta$  peut alors être évaluée de façon approximative de la façon suivante :

Approximation :

$$\delta \ll L$$

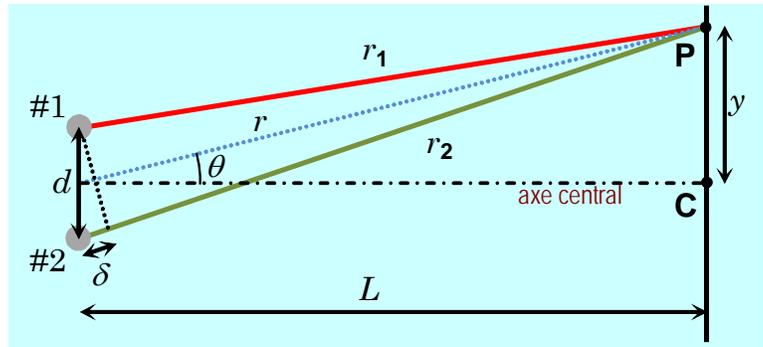
Différence de marche :

$$\delta \approx d \sin(\theta)$$



### Preuve :

Considérons deux oscillateurs séparés par une distance  $d$  générant des ondes sinusoïdales vers un écran plan situé à une distance  $L$  des oscillateurs. Considérons un point  $P$  sur l'écran situé à une distance  $r$  du centre des deux oscillateurs et situé à une distance  $y$  d'un axe central séparant les deux sources tel qu'illustré sur le schéma ci-contre.



À partir de la loi des cosinus

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2BC \cos(\theta)$$

et des identités

$$\cos(\pi/2 - \theta) = \sin(\theta) \quad \text{et} \quad \cos(\pi/2 + \theta) = -\sin(\theta),$$

pour le point  $P$ , la distance  $r_1$  du trajet optique de la première source sera

$$r_1^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + r^2 - 2\left(\frac{d}{2}\right)r \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \quad \Rightarrow \quad r_1^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + r^2 - d r \sin(\theta)$$

et la distance  $r_2$  du trajet optique de la deuxième source sera

$$r_2^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + r^2 - 2\left(\frac{d}{2}\right)r \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \quad \Rightarrow \quad r_2^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + r^2 + d r \sin(\theta)$$

Si l'on effectue le calcul  $r_2^2 - r_1^2$  et que l'on applique l'approximation  $L \gg r$  ce qui donne  $r \approx r_1 \approx r_2$ , nous pouvons démontrer l'approximation de la différence de marche  $\delta$  :

$$r_2^2 - r_1^2 = \left( \left(\frac{d}{2}\right)^2 + r^2 + d r \sin(\theta) \right) - \left( \left(\frac{d}{2}\right)^2 + r^2 - d r \sin(\theta) \right) \quad (\text{Expression } r_2^2 - r_1^2)$$

$$\Rightarrow r_2^2 - r_1^2 = d r \sin(\theta) + d r \sin(\theta) \quad (\text{Simplifier})$$

$$\Rightarrow (r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = 2d r \sin(\theta) \quad (\text{Développer } r_2^2 - r_1^2)$$

$$\Rightarrow (r_2 - r_1)(2r) \approx 2d r \sin(\theta) \quad (r \approx r_1 \approx r_2 \text{ donc } r_1 + r_2 \approx 2r)$$

$$\Rightarrow (r_2 - r_1) \approx d \sin(\theta) \quad (\text{Simplifier } 2r)$$

$$\Rightarrow \delta \approx d \sin(\theta) \quad \blacksquare \quad (\delta = r_2 - r_1)$$

## 2) Approximation des petits angles

Lorsque l'interférence sur l'écran s'effectue à un point  $P$  situé à une **très petite distance**  $y$  de l'axe central comparativement à la **distance**  $L$  entre l'écran et les fentes, on peut affirmer que

$$\tan(\theta) = \frac{y}{L} \ll 1.$$

Ainsi, nous pouvons approximer la fonction  $\sin(\theta)$  de l'équation  $\delta \approx d \sin(\theta)$  de la façon suivante :

Approximation :

$$\theta \ll 1 \text{ rad ou } \tan(\theta) \ll 1$$

Relation trigonométrique :

$$\sin(\theta) \approx \tan(\theta) = \frac{y}{L}$$

Preuve :

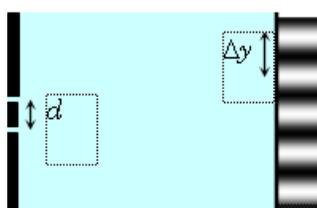
Lorsque  $\theta \ll 1 \text{ rad}$ , alors  $\cos(\theta) \approx 1$ . Donc

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \approx \frac{\sin(\theta)}{1} = \sin(\theta) \quad \blacksquare$$

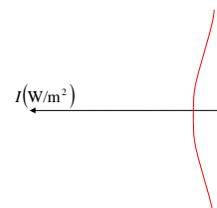
## Influence de la largeur des fentes $a$ et de la distance $d$ entre celles-ci

Il est important de remarquer que l'intensité lumineuse des franges brillante diminue à mesure qu'on s'éloigne de l'axe central. La progression de la diminution de l'intensité lumineuse dépend de la taille  $a$  de chaque fente.

Si les fentes sont très minces ( $a \leq \lambda$ ), la diffraction est totale ce qui projette de la lumière partout sur l'écran. Les maximums de Young près de l'axe central sont ainsi de même brillance.

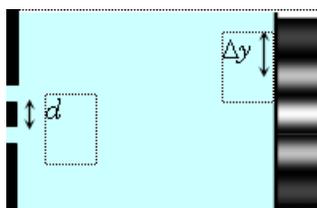


Résultat de l'expérience de Young avec fente  $a \leq \lambda$ .

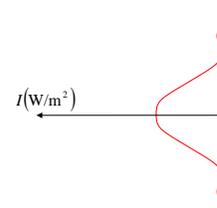


Intensité lumineuse de la diffraction lorsque  $a \leq \lambda$ .

Si les fentes sont minces ( $a > \lambda$ ), la diffraction est prononcée, mais ne couvre pas l'ensemble de l'écran ce qui limite la zone d'éclairage. Les maximums de Young diminuent en brillance à mesure que l'on s'éloigne de l'axe central.



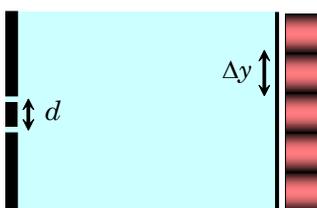
Résultat de l'expérience de Young avec fente  $a > \lambda$ .



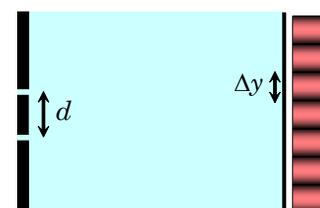
Intensité lumineuse de la diffraction lorsque  $a > \lambda$ .

La distance  $d$  entre les deux fentes influence la distance entre deux franges brillantes ou sombres consécutives.

C'est la distance  $d$  entre les deux fentes qui détermine si l'utilisation de l'approximation des petits angles ( $\tan(\theta) \approx \sin(\theta)$ ) est justifiée ou non.

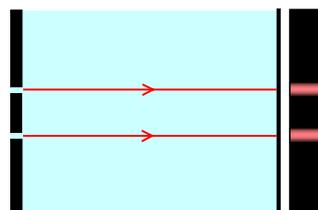


Lorsque  $d$  est petit, l'espacement est  $\Delta y$  grand. (exemple avec  $a \leq \lambda$ )



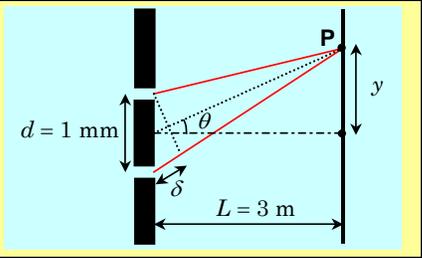
Lorsque  $d$  est grand, l'espacement est  $\Delta y$  petit. (exemple avec  $a \leq \lambda$ )

L'expérience de Young nous permet d'affirmer que la lumière possède des propriétés ondulatoires, car l'écran serait éclairé de la façon tel qu'illustré sur le schéma ci-contre si la lumière avait seulement un comportement corpusculaire (sans diffraction ni interférence).



Expérience de Young sans diffraction ni interférence (non valide)

**Situation 1 : L'expérience de Young.** Dans un montage de l'expérience de Young, on utilise un laser à l'argon qui émet de la lumière à 500 nm pour éclairer deux fentes espacées de 1 mm. On observe le patron d'interférence sur un écran situé à 3 m de distance. On désire déterminer les positions  $y$  (mesurées à partir du centre de l'écran) des trois premiers endroits ( $y > 0$ ) où il y a de l'interférence **(a) constructive ; (b) destructive.**



Évaluons l'équation de la différence de marche  $\delta$  en fonction des différentes approximations valides :

$$\delta = r_2 - r_1 \quad \Rightarrow \quad \delta = d \sin(\theta) \quad (\text{Approximation : } \delta \ll L \text{ donc } r_2 - r_1 \approx d \sin(\theta))$$

$$\quad \quad \quad \Rightarrow \quad \delta = d \tan(\theta) \quad (\text{Approximation : } y/L \ll 1 \text{ donc } \tan(\theta) \approx \sin(\theta))$$

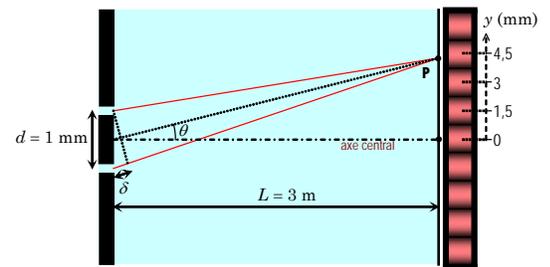
$$\quad \quad \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta = d \frac{y}{L}} \quad (\text{Remplacer } \tan(\theta) = y/L)$$

Appliquons l'équation de l'interférence constructive à notre différence de marche :

$$\delta = m\lambda \quad \Rightarrow \quad d \frac{y}{L} = m\lambda \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = m \frac{\lambda L}{d}}$$

**(a)** Évaluons les trois premiers endroits où il y a interférence constructive :

- $m = 0$  :  $y = (0) \frac{(500 \times 10^{-9})(3)}{(1 \times 10^{-3})} \Rightarrow y = 0 \text{ m}$
- $m = 1$  :  $y = (1) \frac{(500 \times 10^{-9})(3)}{(1 \times 10^{-3})} \Rightarrow \boxed{y = 1,5 \text{ mm}}$
- $m = 2$  :  $y = (2) \frac{(500 \times 10^{-9})(3)}{(1 \times 10^{-3})} \Rightarrow \boxed{y = 3 \text{ mm}}$
- $m = 3$  :  $y = (3) \frac{(500 \times 10^{-9})(3)}{(1 \times 10^{-3})} \Rightarrow \boxed{y = 4,5 \text{ mm}}$



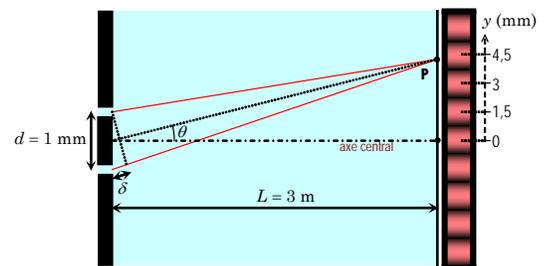
Représentation graphique du patron d'interférence de l'expérience de Young projeté sur l'écran plat

Appliquons l'équation de l'interférence destructive à notre différence de marche :

$$\delta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad \Rightarrow \quad d \frac{y}{L} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda L}{d}}$$

**(b)** Évaluons les trois premiers endroits où il y a interférence destructive :

- $m = 0$  :  $y = \left(0 + \frac{1}{2}\right) \frac{(500 \times 10^{-9})(3)}{(1 \times 10^{-3})} \Rightarrow \boxed{y = 0,75 \text{ mm}}$
- $m = 1$  :  $y = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{(500 \times 10^{-9})(3)}{(1 \times 10^{-3})} \Rightarrow \boxed{y = 2,25 \text{ mm}}$
- $m = 2$  :  $y = \left(2 + \frac{1}{2}\right) \frac{(500 \times 10^{-9})(3)}{(1 \times 10^{-3})} \Rightarrow \boxed{y = 3,75 \text{ mm}}$



Représentation graphique du patron d'interférence de l'expérience de Young projeté sur l'écran plat

**Situation A : Deux fentes trop près.** On effectue l'expérience de Young avec un laser de 660 nm et à l'aide d'un écran plat situé à 10 cm des deux fentes séparées par une distance de  $3 \times 10^{-3}$  mm. On désire évaluer la largeur du pic central (largeur du maximum central).

**P.S.** Cette situation est physiquement difficile à reproduire puisque ces deux petites fentes ne pourront pas générer suffisamment de luminosité sur l'écran pour observer la figure d'interférence.

Pour délimiter la largeur du maximum central, il faut identifier de chaque côté de l'axe central la position du minimum le plus près. Pour ce faire, nous utiliserons l'équation de l'interférence destructive avec  $m = 0$ .

Évaluons notre différence de marche  $\delta$  :

$$\delta = r_2 - r_1 \quad \Rightarrow \quad \delta = d \sin(\theta) \quad (\text{Approximation : } \delta \ll L \text{ donc } r_2 - r_1 \approx d \sin(\theta))$$

Puisque la distance entre les deux fentes est très petite, nous ne pouvons pas utiliser la relation  $\sin(\theta) = \tan(\theta)$ . Évaluons l'angle  $\theta$  requis pour identifier la position du 1<sup>ier</sup> minimum sur l'écran :

$$\delta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad \Rightarrow \quad d \sin(\theta) = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (\text{Remplacer } \delta = d \sin(\theta))$$

$$\Rightarrow \quad \sin(\theta) = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{d} \quad (\text{Isoler } \sin(\theta))$$

$$\Rightarrow \quad \sin(\theta) = \left(0 + \frac{1}{2}\right)\frac{(660 \times 10^{-9})}{(3 \times 10^{-6})} \quad (\text{Remplacer valeurs num.})$$

$$\Rightarrow \quad \sin(\theta) = 0,11$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\theta = 6,315^\circ} \quad (\text{Angle petit})$$

Avec la relation de tangente, nous pouvons évaluer la position  $y$  de notre 1<sup>ier</sup> minimum :

$$\tan(\theta) = \frac{y}{L} \quad \Rightarrow \quad y = L \tan(\theta) \quad (\text{Isoler } y)$$

$$\Rightarrow \quad y = (0,1)\tan(6,315^\circ) \quad (\text{Remplacer valeurs num.})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y = 0,01107 \text{ m}} \quad (\text{Position du 1<sup>ier</sup> minimum})$$

Le pic central aura la largeur suivante :

$$D = 2y \quad \Rightarrow \quad D = 2(0,0117) \quad (\text{Remplacer valeurs num.})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{D = 0,02213 \text{ m}} \quad (\text{Largeur du pic central})$$

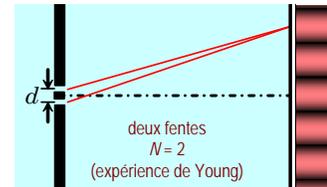
**Remarque :** L'utilisation de l'approximation des petits angles aurait donné la réponse suivante :

$$y = 0,01100 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad D = 0,02200 \text{ m} \quad (0,59 \% \text{ d'erreur})$$

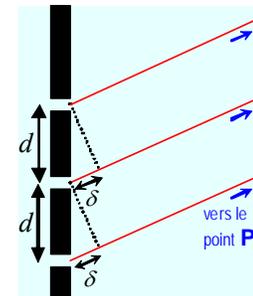
# Chapitre 3.4 – Les réseaux

## Interférence à plusieurs fentes

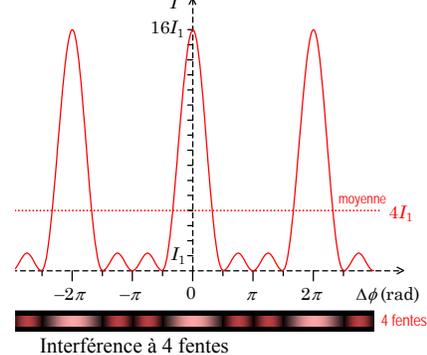
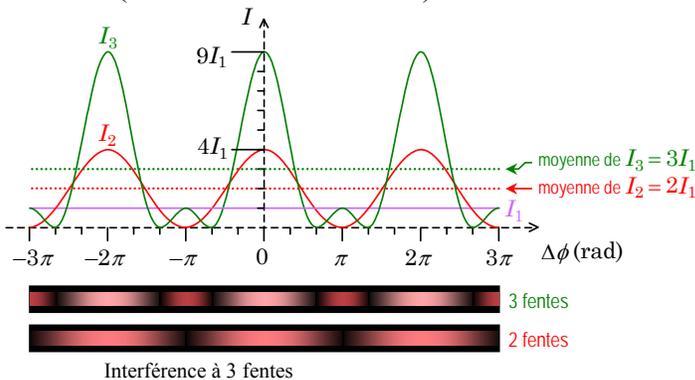
Lorsqu'on réalise l'expérience de Young (interférence à deux fentes), on observe sur l'écran plusieurs maximums de même intensité maximale  $I_2$  espacés par des zones sombres lié à de l'interférence destructive entre les fentes 1 et 2.



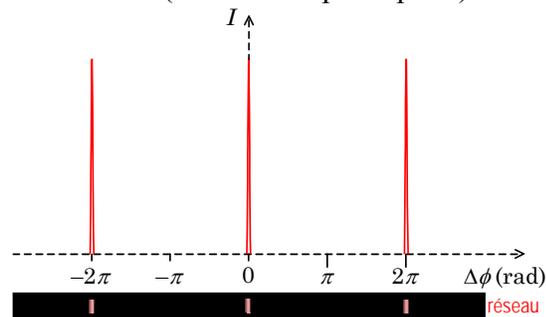
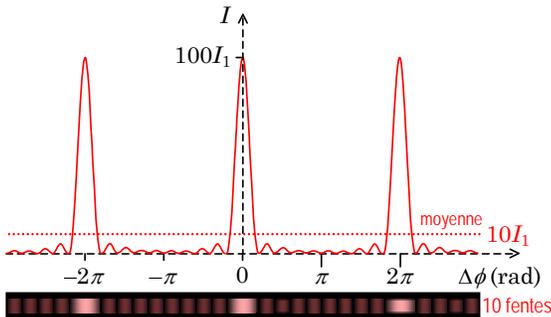
Si l'on produit une expérience d'interférence à trois fentes, on observe sur l'écran plusieurs maximums principaux de même intensité maximale  $I_3$  localisés au même endroit que s'il n'y avait que deux fentes en raison d'une différence de marche  $\delta$  identique pour deux fentes consécutives séparées par une distance  $d$ . Ces maximums principaux sont espacés par des zones où l'on retrouve des maximums secondaires de plus faible luminosité  $I_1$ . Ces maximums secondaires correspondent à des interférences destructives entre deux fentes auxquels on ajoute la contribution de la troisième fente (voir schéma ci-dessous).



Les maximums principaux sont localisés au même endroit que s'il n'y avait que deux fentes si les fentes sont tous espacées également d'une distance  $d$ .

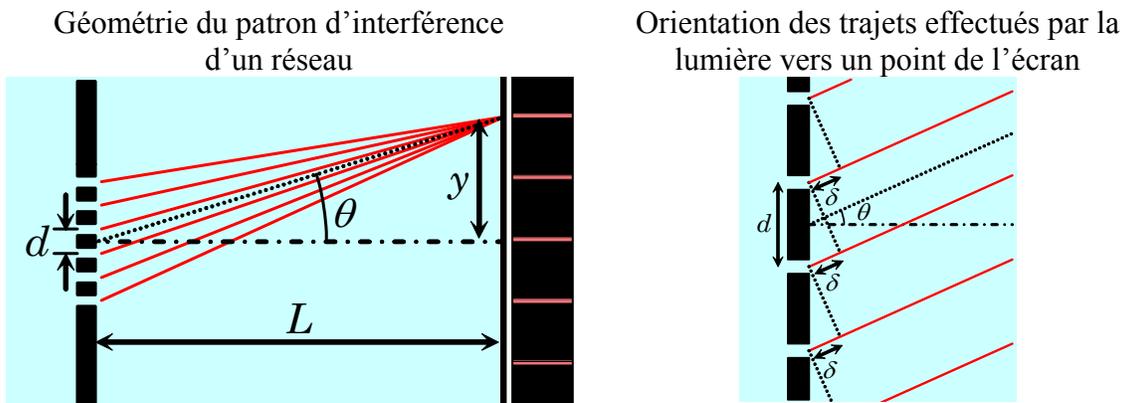


Si on augmente le nombre de fentes à  $N$ , les maximums principaux deviennent de plus en plus minces en raison des multiples possibilités de créer de l'interférence destructive entre les  $N$  fentes et augmente d'intensité en raison de la conservation de l'énergie. On remarque que les maximums secondaires réduisent d'intensité, car l'intensité d'une fente devient négligeable comparativement à la contribution de toutes les fentes en un lieu d'interférence constructive totale (maximums principaux).



## Géométrie du patron d'interférence d'un réseau

La géométrie du patron d'interférence d'un réseau est semblable à la géométrie de l'expérience de Young. Il faut seulement ajouter un nombre  $N$  de fentes plutôt que seulement deux :



Interférence constructive :

$$\delta = m\lambda$$

où  $d$  : Distance entre deux fentes consécutives (pas du réseau) (m)  
 $N$  : Nombre de fentes  
 $\delta$  : Différence de marche de deux fentes consécutives  
 $L$  : Distance entre le réseau et l'écran (m)  
 $y$  : Position verticale sur l'écran par rapport à l'axe central (m)  
 $\theta$  : Angle formé à l'aide de la relation  $\tan(\theta) = y/L$   
 $\lambda$  : Longueur d'onde de la source (m)

et  $Nd$  : Taille du réseau (m)

## Approximation dans les réseaux

Puisque la taille du réseau  $Nd$  est généralement beaucoup plus petite que la distance  $L$  entre le réseau et l'écran, nous pouvons approximer tous les trajets effectués par la lumière entre une fente et un point sur l'écran comme étant parallèle. La différence de marche  $\delta$  de deux fentes consécutives peut alors être évaluée de façon approximative de la façon suivante :

Approximation :

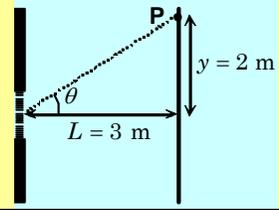
$$Nd \ll L$$

Différence de marche :

$$\delta \approx d \sin(\theta)$$

Remarque : Puisque  $d$  est très petit, les angles  $\theta$  pour localiser les maximums sont très rarement petit. Ainsi, il ne faut pas utiliser l'approximation des petits angles.

**Situation 1 : Le réseau.** On utilise un laser pour éclairer un réseau de 1 cm de largeur qui comporte 1000 fentes parallèles. Sur un écran situé à 3 m de distance, on observe que le huitième maximum (à partir du centre de l'écran et sans compter le maximum central) est situé à 2 m du maximum central. On désire déterminer la longueur d'onde de la lumière.



Évaluons la distance entre deux fentes du réseau (pas du réseau) :

$$Nd = 0,01 \text{ m} \Rightarrow d = \frac{0,01 \text{ m}}{N} = \frac{0,01 \text{ m}}{(1000)} \Rightarrow \boxed{d = 1 \times 10^{-5} \text{ m}}$$

Évaluons la position angulaire du 8<sup>ième</sup> maximum : (sans compter le maximum central)

$$\tan(\theta) = \frac{y}{L} \Rightarrow \tan(\theta) = \frac{(2)}{(3)} \Rightarrow \boxed{\theta = 33,69^\circ}$$

Utilisons l'expression de l'interférence constructive afin d'évaluer la longueur d'onde de la lumière provenant du laser :

$$\begin{aligned} \delta = m\lambda &\Rightarrow d \sin(\theta) = m\lambda && \text{(Approximation des trajets parallèles)} \\ &\Rightarrow \lambda = \frac{d \sin(\theta)}{m} && \text{(Isoler } \lambda \text{)} \\ &\Rightarrow \lambda = \frac{(1 \times 10^{-5}) \sin(33,69^\circ)}{(8)} && \text{(Remplacer valeurs num., } m = 8 \text{)} \\ &\Rightarrow \boxed{\lambda = 693 \text{ nm}} \end{aligned}$$

**Situation 2 : Le dernier maximum.** À la situation 1, on suppose que l'écran s'étend indéfiniment vers le haut et vers le bas et on désire déterminer la valeur de  $m$  pour le maximum le plus éloigné du centre que l'on peut y observer.

Utilisons notre expression de l'interférence constructive afin d'évaluer l'ordre du maximum situé à l'infini sur l'écran :

$$\begin{aligned} \delta = m\lambda &\Rightarrow d \sin(\theta) = m\lambda && \text{(Approximation des trajets parallèles)} \\ &\Rightarrow m = \frac{d \sin(\theta)}{\lambda} && \text{(Isoler } m \text{)} \\ &\Rightarrow m = \frac{(1 \times 10^{-5}) \sin(90^\circ)}{(693 \times 10^{-9})} && \text{(Remplacer valeurs num., } \theta = 90^\circ \text{)} \\ &\Rightarrow \boxed{m = 14,43} \end{aligned}$$

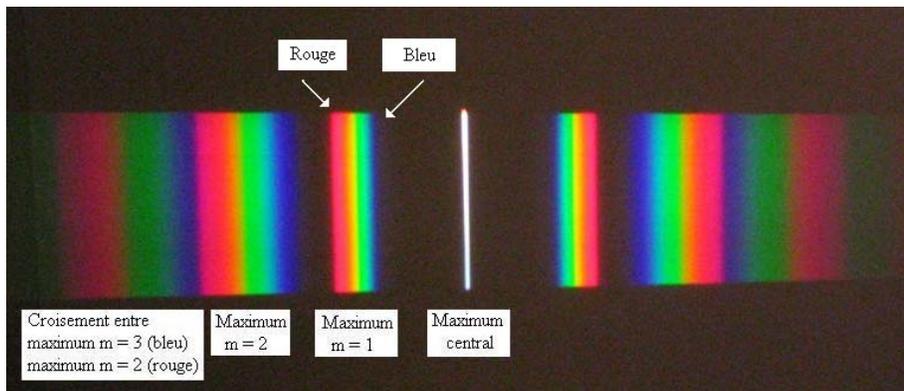
Ainsi, nous pouvons observer le **14<sup>e</sup> maximum** (sans compter le maximum central) sur un écran de taille infinie. L'écran comportera alors **29 franges** de lumière à 693 nm (14 franges à  $y > 0$ , 14 franges à  $y < 0$  et la frange centrale à  $y = 0$ ).

## Spectre de la lumière et les réseaux

Les réseaux sont souvent utilisés pour analyser la composition de la lumière. Puisque l'interférence constructive dépend de la longueur d'onde  $\lambda$ , chaque longueur d'onde sera en interférence constructive à une position précise sur l'écran. Ainsi, une lumière composée de  $N$  longueurs d'onde distinctes formera un patron d'interférence avec  $N$  couleurs positionnées à  $N$  endroits différents.

Lorsque l'ordre des maximums augmente, il est possible que plusieurs longueurs d'onde soit en interférence constructive au même endroit.

Exemple : Spectres d'une lampe à incandescence



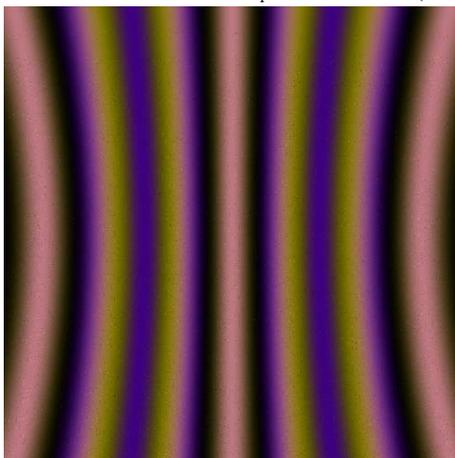
## La précision d'un réseau

Il est préférable d'analyser un spectre de lumière avec un réseau ayant **un maximum de fentes** afin d'augmenter l'interférence destructive entre les sites où il y aura interférence constructive ce qui permettra d'amincir les zones d'interférence constructive ce qui réduit la possibilité d'un chevauchement de raie lumineuse.

Exemple : Simulation d'un patron d'interférence d'un réseau ( $d = 4 \mu\text{m}$ ,  $L = 3 \mu\text{m}$ ) avec

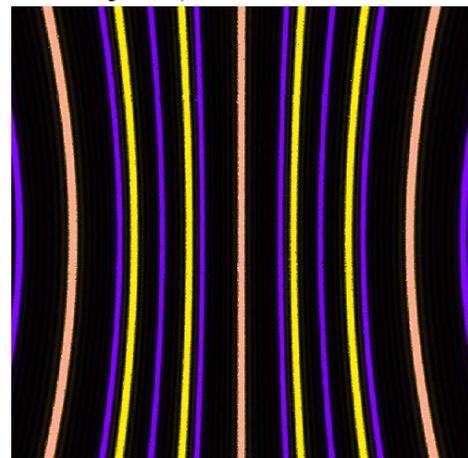
$$\lambda_1 = 432 \text{ nm (mauve)}$$

$$\lambda_2 = 576 \text{ nm (jaune)}$$



Réseau à 2 oscillateurs

Superposition à  $m_1 = 1$  et  $m_2 = 1$ , car les maximums sont trop larges.



Réseau à 10 oscillateurs

Superposition uniquement à  $m_1 = 4$  et  $m_2 = 3$ , car les maximums sont positionnés au même endroit.

**Situation A : Un seul maximum.** On éclaire un réseau de  $N$  fentes séparées par une distance  $d$  avec une lumière blanche dans le visible ( $\lambda = 400$  nm UV à  $\lambda = 700$  nm IR). On désire évaluer la distance  $d$  minimum afin de voir uniquement le maximum central.

Supposons que le maximum  $m = 1$  est situé à un angle de  $90^\circ$ . Évaluons la distance  $d$  requise pour les deux couleurs extrêmes du spectre du visible :

$$\begin{aligned} \delta = m\lambda &\Rightarrow d \sin(\theta) = m\lambda && \text{(Approximation des trajets parallèles)} \\ &\Rightarrow d = \frac{m\lambda}{\sin(\theta)} && \text{(Isoler } d \text{)} \\ &\Rightarrow d = \lambda && \text{(Remplacer } m = 1 \text{ et } \theta = 90^\circ, \sin(90^\circ) = 1 \text{)} \end{aligned}$$

Pour  $\lambda = 400$  nm :  $d = (400 \text{ nm}) \Rightarrow d = 400 \text{ nm}$  (À choisir)  
 Pour  $\lambda = 700$  nm :  $d = (700 \text{ nm}) \Rightarrow d = 700 \text{ nm}$

Nous pouvons affirmer que si la distance  $d < 400$  nm, alors il n'y aura **aucun maximum observable autre que le maximum central** pour toutes les longueurs d'onde entre  $400 \text{ nm} < \lambda < 700 \text{ nm}$ . Il n'y aura qu'une tâche lumineuse blanche au centre de l'écran, car toutes les couleurs sont en interférence constructive au centre de l'écran.

Si l'on répète l'exercice précédent avec une lumière dans les **micro-ondes** ( $f = 1$  GHz,  $\lambda = 30$  cm), alors la distance  $d = 30$  cm. C'est pourquoi une coupole à onde-radio n'est pas une feuille métallique, car l'espace dans le grillage est suffisant petit pour rendre la surface réfléchissante avec qu'un seul angle de réflexion (optique géométrique).



Coupole à onde radio

## Réseau de diffraction optique

Un réseau de diffraction est un objet constitué d'un très grand nombre de fentes minces (réseau en transmission) ou de rayures minces réfléchissantes (réseau en réflexion) dont la distance qui les séparent est très petite. La distance  $d$  entre les traits du réseau et la longueur d'onde  $\lambda$  de la lumière interagissant avec le réseau détermine les angles de transmissions et de réflexions de la lumière.



Le disque compact est un réseau de diffraction avec plusieurs angles de réflexion. Ce n'est pas un miroir.

Pour une longueur d'onde  $\lambda$  donnée :

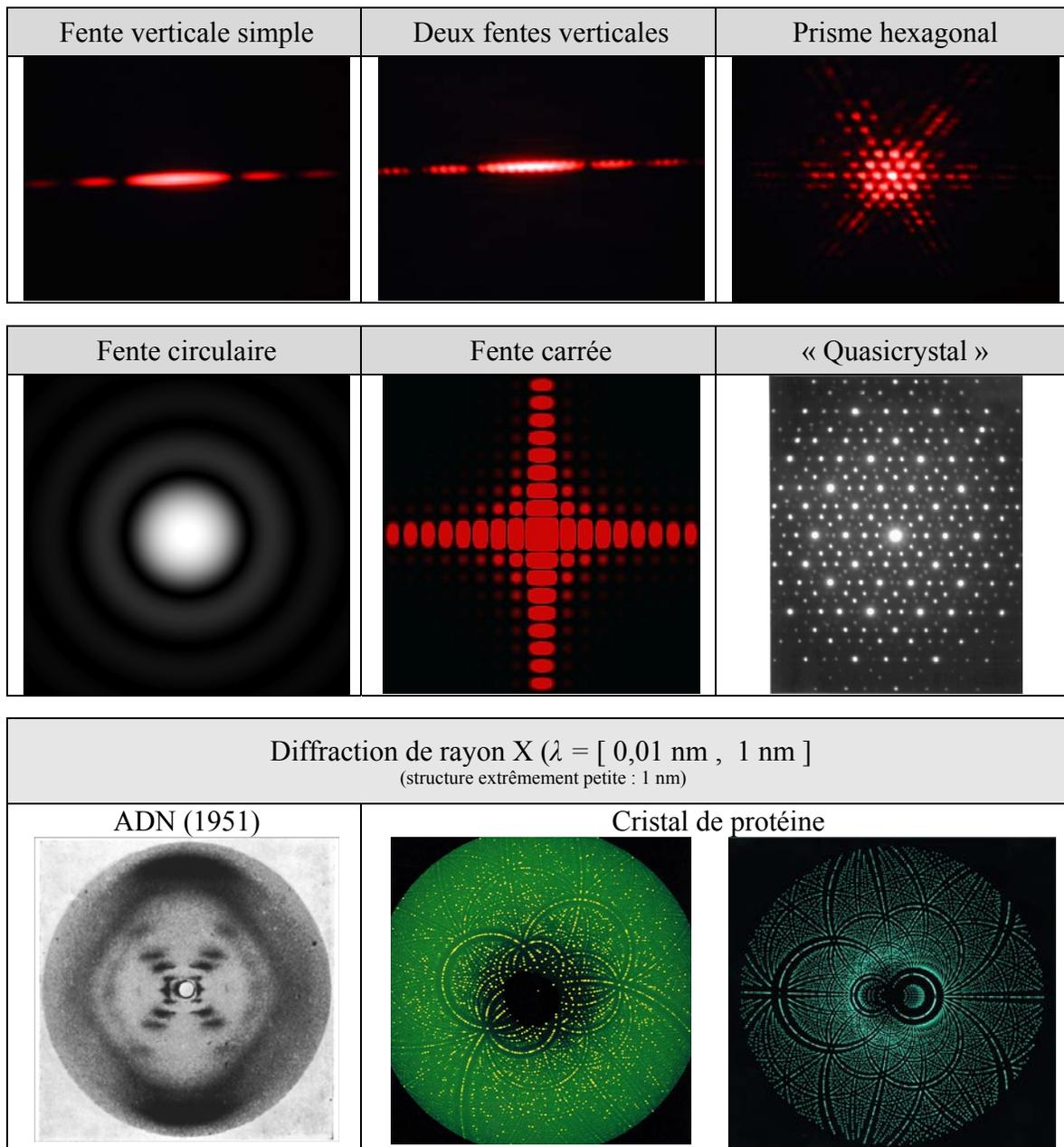
- Si la distance  $d < \lambda$  (exemple : miroir en réflexion)  
 $\Rightarrow$  Il n'y a qu'un seul angle de transmission ou angle de réflexion. Dans cette condition, on respecte **l'approximation de l'optique géométrique**.
- Si la distance  $d > \lambda$  (exemple : disque compact en réflexion)  
 $\Rightarrow$  Il y a plusieurs angles de transmission ou angles de réflexion.

## Géométrie et symétrie

La **forme d'un patron d'interférence** d'un **réseau** dépend de la **géométrie** et de la **symétrie** de **l'obstacle** rencontrée par la lumière. Sur une structure microscopique, plus le patron est complexe, plus l'obstacle possède de symétries. Cette technique est utilisée en **crystallographie** pour étudier la forme des cristaux et en **microbiologie** pour analyser la forme des protéines et de l'ADN lorsque le microscope traditionnel ne permet pas d'atteindre cette résolution.

Cependant, il faut choisir adéquatement le type de lumière pour analyser une structure. Pour avoir une figure bien détaillée, il faut avoir une longueur d'onde telle que  $\lambda < d$ .

Voici quelques exemples :



## **La réflexion spéculaire sur un réseau d'atome**

En construction ...

## **Spectroscopie**

En construction ...



# Chapitre 3.5a – La diffraction

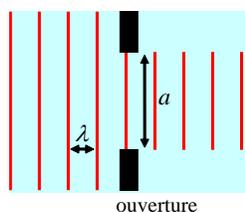
## Le phénomène de la diffraction

La **diffraction** est le comportement ondulatoire **déformant** une **onde plane** en **onde sphérique** lorsque celle-ci rencontre un **obstacle** ou une **ouverture**. La déformation dépend de la taille de l'obstacle/ouverture  $a$  et de la longueur d'onde  $\lambda$  de la lumière. Lorsque la taille de l'obstacle/ouverture est grande comparativement à la longueur d'onde, la déformation est négligeable et l'onde devient de plus en plus sphérique à mesure que la taille de l'ouverture diminue (ou la longueur d'onde augmente).

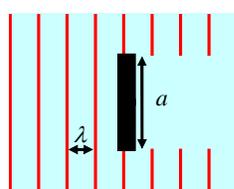


Diffraction d'une vague sur une petite ouverture.

Aucune diffraction lorsque  $a \gg \lambda$



ouverture



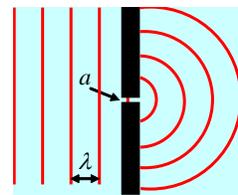
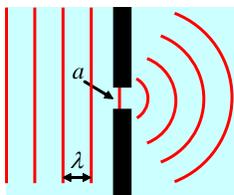
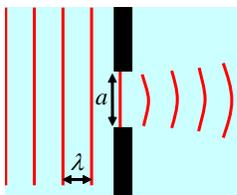
obstacle

Diffraction légère  
lorsque  $a \gg \lambda$

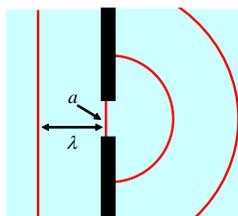
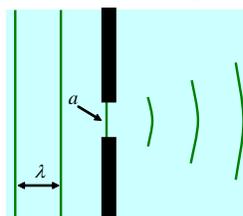
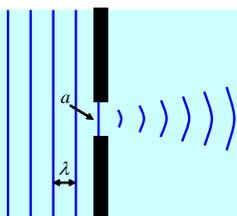
Diffraction prononcée  
lorsque  $a > \lambda$

Diffraction totale  
lorsque  $a \leq \lambda$

Réduction de la l'obstacle/ouverture :



Augmentation de la longueur d'onde :



Voici le patron d'interférence projeté sur un écran plat de la diffraction d'un laser ayant traversé une seule fente très mince :

Fente



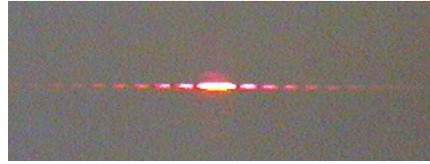
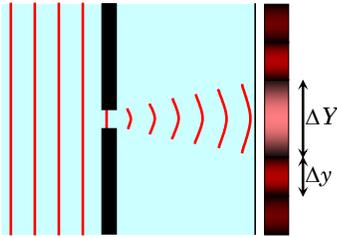
Patron de diffraction<sup>1</sup>



<sup>1</sup> Ce schéma représente le patron d'interférence d'une seule fente de taille  $a \gg \lambda$  (diffraction légère).

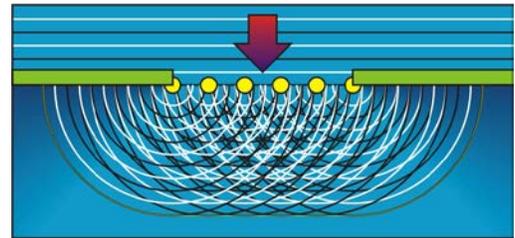
# Modèle à 12 sources de la diffraction

Voici le patron d'interférence de la diffraction d'une source lumineuse cohérente sous la présence s'une fente mince rectiligne projeté sur un écran plat situé à grande distance :



Projection d'un patron de diffraction tel que  $a \gg \lambda$  (diffraction légère).

Selon le modèle d'Huygens de la diffraction, une onde plane qui pénètre dans une petite ouverture se comporte par la suite comme une **infinité de source ponctuelle** alignée sur l'axe de la fente (voir schéma ci-contre). Il y aura des interférences constructives et destructives entre les différentes sources selon la différence de marche entre toutes les combinaisons possibles de sources.



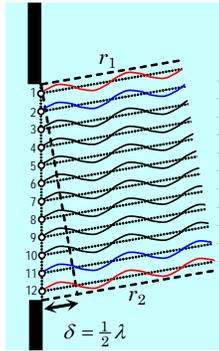
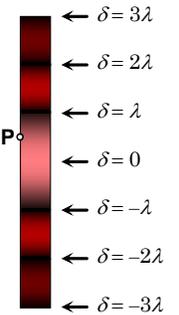
Diffraction selon le modèle d'Huygens.

Étudions la diffraction à l'aide du modèle de Huygens à 12 sources sur **une ouverture rectiligne**. La distance entre la source 1 et la source 12 sera la largeur de la fente  $a$ .

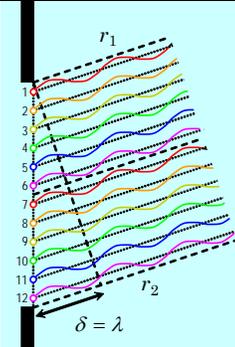
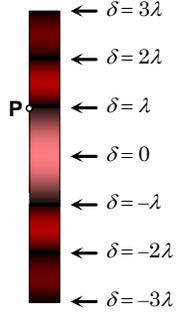
Situation 1 : Aucune différence de marche  $\delta$  au point C.

Interférence	Différence de marche	Patron de diffraction
<ul style="list-style-type: none"> <li>Toutes les sources (1 à 12) sont en phase (différence de marche de 0). Il y a donc interférence constructive entre toutes les sources.</li> </ul>		
<p>Bilan : Il y a de la lumière au point C (intensité maximale).</p>		

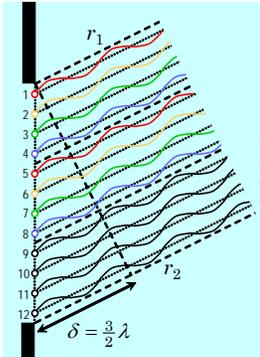
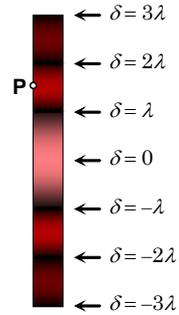
Situation 2 : Différence de marche  $\delta$  de  $\lambda/2$  au point P.

Interférence	Différence de marche	Patron de diffraction
<ul style="list-style-type: none"> <li>Les sources <b>1</b> et <b>12</b> sont déphasées de <math>\pi</math> (différence de marche de <math>\lambda/2</math>). Il y a donc interférence destructive entre ces deux sources.</li> <li>Les sources <b>2</b> et <b>11</b> sont à peu près déphasées de <math>\pi</math> (différence de marche de <math>\lambda/2</math>) ce qui produit une interférence destructive presque totale.</li> <li>Les source 5, 6, 7 et 8 sont à peu près en phase (différence de marche de 0) ce qui produit de l'interférence constructive partielle.</li> </ul>		
Bilan : Il y a de la lumière au point P (intensité forte).		

Situation 3 : Différence de marche  $\delta$  de  $\lambda$  au point P.

Interférence	Différence de marche	Patron de diffraction
<ul style="list-style-type: none"> <li>Toutes les sources sont déphasées deux à deux de <math>\pi</math> (différence de marche de <math>\lambda/2</math>). Toutes ces paires produisent de l'interférence destructive.</li> <li>Paires de sources en interférence destructive :  <b>1 et 7</b>    <b>2 et 8</b>    <b>3 et 9</b>  <b>4 et 10</b>   <b>5 et 11</b>   <b>6 et 12</b> </li> </ul>		
Bilan : Il y a <b>interférence destructive totale</b> au point P (1 <sup>er</sup> minimum)		

Situation 3 : Différence de marche  $\delta$  de  $3\lambda/2$  au point P.

Interférence	Différence de marche	Patron de diffraction
<ul style="list-style-type: none"> <li>Certaines sources sont déphasées deux à deux de <math>\pi</math> (différence de marche de <math>\lambda/2</math>). Ces paires produisent de l'interférence destructive.</li> <li>Paires de sources en interférence destructive :  <b>1 et 5</b>    <b>2 et 6</b>  <b>3 et 7</b>    <b>4 et 8</b> </li> <li>Les autres sources produisent de l'interférence constructive partielle.</li> </ul>		
Bilan : Il y a de la lumière au point P (intensité faible).		

Situation 4 : Différence de marche  $\delta$  de  $2\lambda$  au point P.

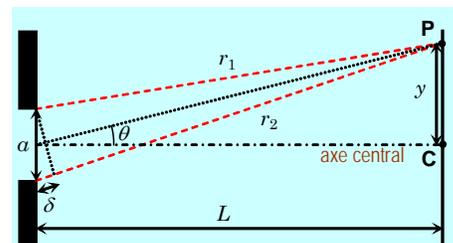
Interférence	Différence de marche	Patron de diffraction
<ul style="list-style-type: none"> <li>Toutes les sources sont déphasées deux à deux de <math>\pi</math> (différence de marche de <math>\lambda/2</math>). Toutes ces paires produisent de l'interférence destructive.</li> <li>Paires de sources en interférence destructive :                       <div style="display: flex; justify-content: space-around; color: red;"> <span>1 et 4</span> <span>2 et 5</span> <span>3 et 6</span> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; color: green;"> <span>7 et 10</span> <span>8 et 11</span> <span>9 et 12</span> </div> </li> </ul>		
Bilan : Il y a <b>interférence destructive totale</b> au point P (2 <sup>ième</sup> minimum)		

Conclusion :

Il y a **interférence destructive** lorsque la **différence de marche** est un **multiple de longueur d'onde**  $\lambda$  (excluant le zéro). Il est important de remarquer que ce résultat est différent de celui obtenu dans l'expérience de Young.

### Les minimums dans un patron de diffraction à fente rectiligne

Dans un patron de diffraction avec ouverture rectiligne, un minimum est localisé lorsque la différence de marche  $\delta$  entre le haut et le bas de la fente est un multiple de longueur d'onde  $\lambda$  **excluant** le zéro. Il n'est pas pertinent de positionner les maximums secondaires en diffraction, car ils sont de très faible amplitude.



Minimums de diffraction		Relation différence de marche et phase
Différence de marche	Différence de phase	$\Delta\phi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$
$\delta = m\lambda$	$\Delta\phi = 2\pi m$ où	

- où
- $r_1$  : Distance entre le haut de l'ouverture et le point P (m)
  - $r_2$  : Distance entre le bas de l'ouverture et le point P (m)
  - $y$  : Position verticale pour situer le point P mesurée par rapport à l'axe central (m)
  - $\delta$  : Différence de marche entre le trajet 1 et le trajet 2 (m) ( $\delta = r_2 - r_1$ )
  - $L$  : Distance entre l'ouverture et l'écran (m)
  - $a$  : Largeur de l'ouverture (m)
  - $\theta$  : Angle pour localiser le point P ( $\tan(\theta) = y/L$ )
  - $m$  : Multiple entier de longueur d'onde ( $m \in \mathbb{Z}$ , sauf  $m = 0$ )
  - $\lambda$  : Longueur d'onde produite par la source (m)

# Approximation dans la diffraction de Fraunhofer

## 1) Approximation des rayons parallèles

Lorsque la largeur de l'ouverture  $a$  est beaucoup plus petite que la distance  $L$  entre l'ouverture et l'écran (approximation de Fraunhofer), nous pouvons approximer le trajet  $r_1$  et  $r_2$  comme étant parallèle. La différence de marche  $\delta$  peut être alors évaluée de façon approximative de la façon suivante :

Approximation :

$$a \ll L$$

Différence de marche :

$$\delta \approx a \sin(\theta)$$

## 2) Approximation des petits angles

Lorsque l'angle  $\theta$  est très petit, nous pouvons effectuer l'approximation suivante :

Approximation :

$$\theta \ll 1 \text{ rad ou } \tan(\theta) \ll 1$$

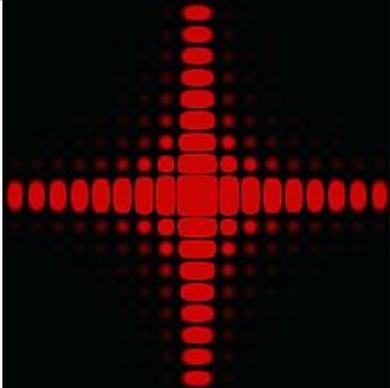
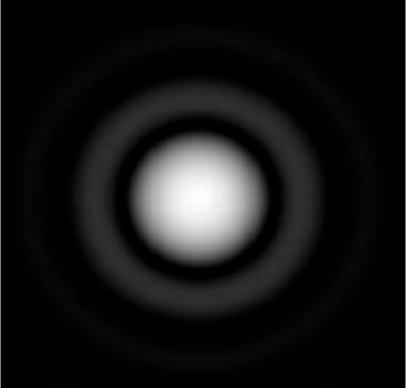
Relation trigonométrique :

$$\tan(\theta) \approx \sin(\theta)$$

## La géométrie de l'ouverture et critère d'interférence destructive

La géométrie de l'ouverture est responsable de la forme de la diffraction ce qui influence le critère à appliquer pour localiser une zone d'interférence destructive. Plus la géométrie de l'ouverture est complexe, plus le calcul menant à l'identification du critère l'est.

Les deux géométries les plus simples sont la **fente rectiligne/carrée** et **circulaire** :

Ouverture carrée de largeur $a$	Ouverture circulaire de diamètre $D$
 <p>Illustration de la diffraction sur une ouverture carrée.  <a href="http://en.wikipedia.org/wiki/Diffraction">http://en.wikipedia.org/wiki/Diffraction</a></p>	 <p>Illustration de la diffraction sur une ouverture circulaire (tâche d'Airy).  <a href="http://fr.wikipedia.org/wiki/Tache_d'Airy">http://fr.wikipedia.org/wiki/Tache_d'Airy</a></p>
<p>1<sup>er</sup> minimum : <math>a \sin(\theta_1) = \lambda</math>                  2<sup>e</sup> minimum : <math>a \sin(\theta_2) = 2\lambda</math>                  3<sup>e</sup> minimum : <math>a \sin(\theta_3) = 3\lambda</math>                  4<sup>e</sup> minimum : <math>a \sin(\theta_4) = 4\lambda</math></p>	<p>1<sup>er</sup> minimum : <math>D \sin(\theta) \approx 1,22 \lambda</math>                  2<sup>e</sup> minimum : <math>D \sin(\theta_2) \approx 2,23 \lambda</math>                  3<sup>e</sup> minimum : <math>D \sin(\theta_3) \approx 3,24 \lambda</math>                  4<sup>e</sup> minimum : <math>D \sin(\theta_4) \approx 4,24 \lambda</math></p>

**Situation 1 : Les minimums de diffraction.** On utilise un laser qui émet de la lumière à 500 nm pour éclairer une fente de 1 mm de largeur. On observe le patron de diffraction sur un écran situé à 3 m de distance. On désire déterminer la position angulaire  $\theta$  et la position linéaire  $y$  (mesurées à partir du centre de l'écran) pour les trois premiers minimums du côté positif de l'écran ( $y > 0$ ).

Évaluons notre différence de marche  $\delta$  :

$$\begin{aligned} \delta = r_2 - r_1 &\Rightarrow \delta = a \sin(\theta) \quad (\text{Approximation : } a \ll L \text{ donc } r_2 - r_1 \approx a \sin(\theta)) \\ &\Rightarrow \delta = a \tan(\theta) \quad (\text{Approximation : } \theta \ll 1 \text{ donc } \tan(\theta) \approx \sin(\theta)) \\ &\Rightarrow \boxed{\delta = a \frac{y}{L}} \quad (\text{Remplacer } \tan(\theta) = y/L) \end{aligned}$$

Évaluons l'expression de la position des minimums dans le patron de diffraction :

$$\begin{aligned} \delta = m\lambda &\Rightarrow a \frac{y}{L} = m\lambda \quad (\text{Remplacer } \delta) \\ &\Rightarrow \boxed{y = \frac{m\lambda L}{a}} \quad (\text{Isoler } y) \end{aligned}$$

Évaluons la position des 3 premiers minimums dans le patron de diffraction :

Avec : 1)  $y = \frac{m\lambda L}{a}$  et 2)  $\tan(\theta) = \frac{y}{L} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{L}\right)$

Nous avons :

$m$	$y$	angle
$m = 1$	$y = 1,5 \times 10^{-3} \text{ m}$	$\theta = 0,0286^\circ$
$m = 2$	$y = 3,0 \times 10^{-3} \text{ m}$	$\theta = 0,0573^\circ$
$m = 3$	$y = 4,5 \times 10^{-3} \text{ m}$	$\theta = 0,0859^\circ$

**Remarque :**

La position du minimum a été obtenue grâce à l'expression suivante :

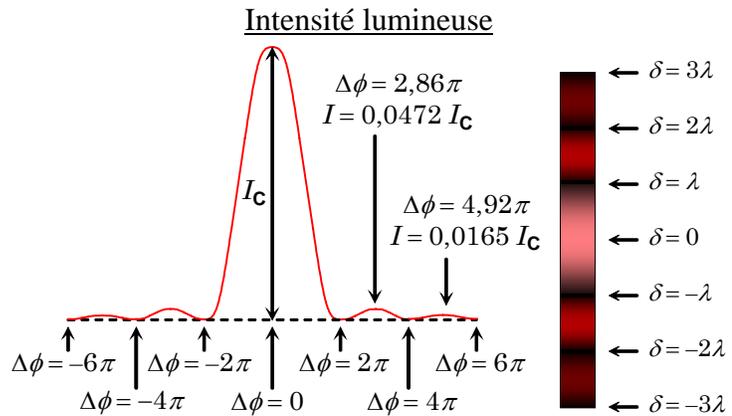
$$y = \frac{m\lambda L}{a}$$

- 1) Lorsque l'ouverture diminue, la position du minimum augmente ( $a \downarrow \Rightarrow y \uparrow$ ).
- 2) Lorsque l'ouverture diminue, la largeur du 1<sup>ier</sup> pic du patron de diffraction augmente.
- 3) Lorsque l'ouverture est très petite, l'approximation des petits angles ne s'applique pas toujours ( $a \downarrow \Rightarrow \sin(\theta) \neq \tan(\theta)$ ).

# Intensité d'un patron de diffraction et étalement central

Dans le patron de diffraction, l'intensité lumineuse des différents maximums diminue en fonction de l'éloignement de l'axe central :

- ❖ Il y a une intensité lumineuse maximum lorsque  $\delta = 0$  (axe central).
- ❖ Il y a une intensité lumineuse lorsque  $\delta = m\lambda + \lambda/2$ . Cette intensité diminue avec l'augmentation de  $\delta$ , car il y a de moins en moins de source qui sont en interférence constructive à ces différences de marche.



Afin d'évaluer la taille de l'étalement central, évaluons la position angulaire du 1<sup>er</sup> minimum de diffraction sous différentes taille d'ouverture  $a$  :

$$a \sin(\theta) = m\lambda \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sin(\theta_1) = \frac{\lambda}{a}} \quad (\text{premier minimum } \theta_1 \text{ lorsque } m = 1)$$

Type de diffraction et taille de l'ouverture $a$	Angle 1 <sup>er</sup> minimum	Patron de la diffraction	Répartition de la puissance lumineuse ou intensité lumineuse
Diffraction légère $a \gg \lambda$ et $(\sin(\theta_1) \approx 0)$	$\theta_1 \approx 0^\circ$		
Diffraction prononcée $a > \lambda$ et $\sin(\theta_1) = \lambda/a < 1$	$\theta_1 \in ]0^\circ, 90^\circ[$		
Diffraction complète $a \leq \lambda$ et $\sin(\theta_1) = \lambda/a \geq 1$	$\theta_1 = 90^\circ$ ou $\theta_1 = impossible$		

## La tache de Poisson

En 1819, Augustin Jean Fresnel participe à un concours de science sur les phénomènes de diffraction à Paris et propose une théorie ondulatoire fondée sur le principe d'Huygens appuyée par l'expérience de Young réalisée en 1801. Le juge Siméon Denis Poisson proposa une expérience visant à contredire la théorie de Fresnel, mais la réalisation de cette expérience eut l'effet contraire en confirmant la nature ondulatoire de la lumière. L'observation d'une tache lumineuse inattendue fut réalisée lors de l'expérience et elle fut nommée en l'honneur de celui qui l'avait prédite avec la théorie de Fresnel sans jamais y croire.



Augustin Jean Fresnel  
(1788-1827)



Siméon Denis Poisson  
(1781-1842)

### Situation :

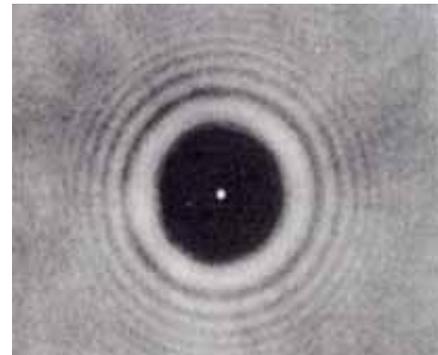
On éclaire une sphère avec une source lumineuse cohérente et l'on projette l'ombre créée par la sphère sur un écran.

### Observation :

Une tache lumineuse derrière la sphère dans la zone d'ombrage.

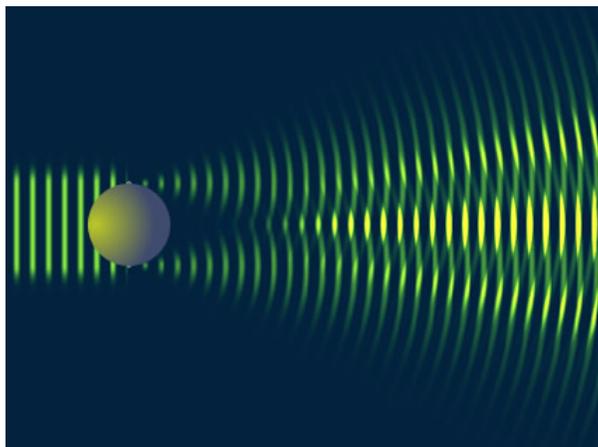
### Conclusion :

La lumière diffracte sur la sphère et les ondes contournant la sphère se retrouvent en phase derrière la sphère en son centre d'où l'apparition de lumière sur l'axe centrale de la source de lumière.



Écran où il y a projection de la tache de Poisson.

Voici une simulation d'une diffraction d'une onde plane après son passage près d'un obstacle sphérique. La haute symétrie de la sphère permet de maintenir une cohérence sur une très grande distance d'où la présence de la tache de Poisson :



Simulation de la diffraction de la lumière sur une sphère. On observe que la lumière contourne la sphère permettant ainsi à la lumière d'être observée dans « l'ombre géométrique » de la sphère.  
<http://www.smkbud4.edu.my/Data/sites/vschool/phy/wave/diffraction.htm>

# Chapitre 3.5b – Le critère de Rayleigh

## La limite de résolution

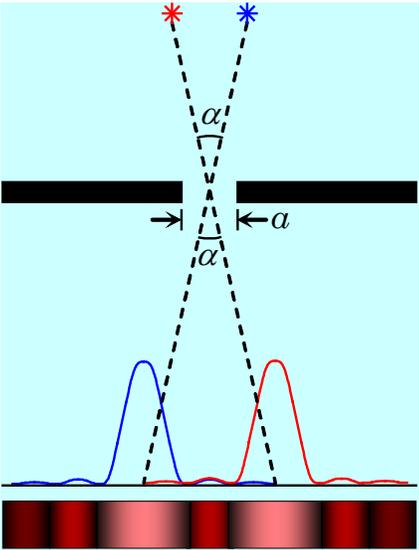
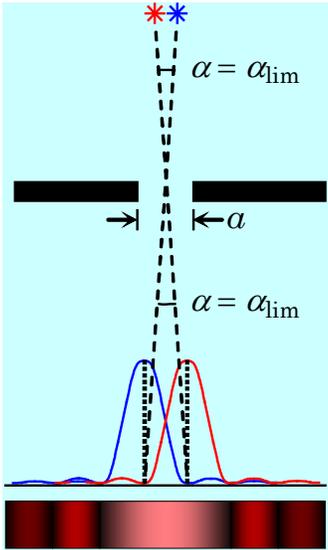
Lorsqu'on observe des objets situés à de très grandes distances, il n'est pas toujours évident d'en faire le dénombrement. Par exemple, on peut observer dans le ciel un point très lumineux et croire qu'on observe une étoile, mais qu'en réalité, le point lumineux est un système d'étoile double (voir schéma ci-contre).



Albireo est une constellation du Cygne composée de deux étoiles rapprochées.

**La limite de résolution** est un critère permettant d'affirmer si l'on observe un objet ou un groupe d'objets. Plusieurs objets seront alors discernables si la limite de résolution n'est pas atteinte. Plus les objets sont éloignés et près les uns des autres, plus la limite de résolution sera petite.

Utilisons la diffraction comme critère de limite de résolution :

Objets discernables	Objets indiscernable
<p><u>Critère :</u>                      Patrons de diffractions discernables                      (Nb de pics observés = nb objets)</p>  <p>Deux patrons de diffraction discernables.</p>	<p><u>Critère :</u>                      Patrons de diffraction indiscernable                      (Nb de pics observés ≠ nb objets)</p>  <p>Deux patrons de diffraction indiscernables. Ils ne sont pas en interférence, car la lumière n'est pas cohérente (pas la même source).</p>

Au **cas limite**, le **maximum central** du chaque patron de diffraction **coïncide** avec le **1<sup>ier</sup> minimum** de l'**autre patron de diffraction**. Utilisons la position du 1<sup>ier</sup> minimum afin d'évaluer notre angle critique  $\alpha$  :

$$\delta = r_2 - r_1 \Rightarrow \delta = a \sin(\alpha) \quad (\text{Approximation : } a \ll L \text{ donc } r_2 - r_1 \approx a \sin(\alpha))$$

$$\Rightarrow \delta = a \alpha \quad (\text{Approximation : } \alpha \ll 1 \text{ donc } \sin(\alpha) \approx \alpha)$$

Évaluons la position du 1<sup>er</sup> minimums dans le patron de diffraction :

$$\begin{aligned} \delta = m\lambda &\Rightarrow (a\alpha) = m\lambda \quad (\text{Remplacer } \delta = a\alpha) \\ &\Rightarrow \alpha = \frac{m\lambda}{a} \quad (\text{Isoler } \alpha) \\ &\Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\lambda}{a}} \quad (1^{\text{er}} \text{ minimum, } m = 1) \end{aligned}$$

## Critère de Rayleigh

Après plusieurs travaux portant sur une approche mathématique de l'optique, le physicien anglais John William Strutt plus connu sous le nom de Lord Rayleigh (titre associé à la succession de son père mort en 1871) analyse la notion de la diffraction de la lumière. Il introduit la notion de limite de résolution en appliquant la théorie de la diffraction dans l'observation d'objets très rapprochés. Cette limite de résolution porte maintenant le nom de **critère de Rayleigh** et permet d'évaluer si **deux objets** sont **discernables** ou pas en **vérifiant** si les  **patrons de diffraction** des deux objets sont **discernables**. Lorsque l'ouverture est rectiligne, le critère de Rayleigh correspond à la démonstration précédente :  $\alpha = \lambda / a$ .



Lord Rayleigh  
(1842-1919)

Il est important de préciser que la forme de l'ouverture influence l'expression du critère de Rayleigh. Puisque plusieurs observations s'effectuent à l'aide de microscopes ou de télescopes à ouverture circulaire comme le télescope Hubble<sup>1</sup>, il sera pratique d'avoir une version modifiée de notre résultat précédent, car il a été démontré pour les ouvertures rectilignes.



Le lancement du télescope Hubble fut réalisé le 24 avril 1990.

Ouverture rectiligne	Ouverture circulaire
$\alpha_{\text{lim}} = \frac{\lambda}{a}$	$\alpha_{\text{lim}} = 1,22 \frac{\lambda}{D}$

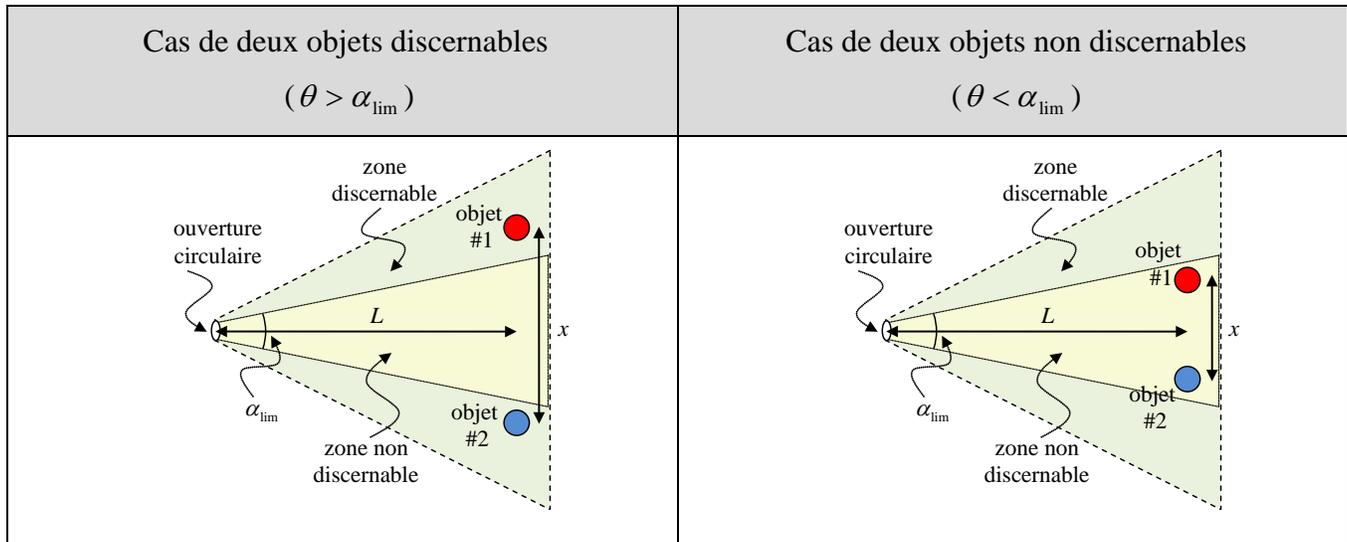
où  $\alpha_{\text{lim}}$  : Séparation angulaire limite (rad)  $(\alpha_{\text{lim}} \ll 1, \tan(\alpha_{\text{lim}}) \approx \alpha_{\text{lim}})$   
 $\lambda$  : Longueur d'onde de la lumière (m)  
 $a$  : Largeur de la fente rectiligne (m)  
 $D$  : Diamètre de la fente circulaire (m)

<sup>1</sup> L'image ci-contre : télescope Hubble (Masse : 11 tonnes, Longueur : 13,2 m, Diamètre : 4,2 m, Lentille : 2,4 m de diamètre, Coût : 2 G\$)

## Deux objets discernables par critère de Rayleigh

Afin de déterminer si deux objets séparés par une distance  $x$  et éloignés d'un dispositif optique (œil, télescope) à une distance  $L$  son discernable par le critère de Rayleigh, nous devons vérifier si l'angle de séparation  $\theta$  des deux objets est supérieur à l'angle limite  $\alpha_{\text{lim}}$ .

Sans approximation	Avec approximation des petits angles ( $L \gg x$ )
$\tan(\theta/2) = \frac{x/2}{L}$	$\tan(\theta) \approx \frac{x}{L}$



**Situation 3 : La limite de résolution de l'œil.** La pupille de l'œil a un diamètre de 5 mm. On désire déterminer (a) la limite de résolution de l'œil pour une longueur d'onde située au milieu du spectre visible ( $\lambda = 550 \text{ nm}$ , ce qui correspond à une teinte de vert) et (b) quelle est la distance minimale entre deux objets pouvant être distingués à 10 m de l'œil.

Puisqu'une pupille est une ouverture circulaire, utilisons le critère de Rayleigh afin d'évaluer la limite de résolution de l'œil :

$$\alpha_{\text{lim}} = 1,22 \frac{\lambda}{D} \quad \Rightarrow \quad \alpha_{\text{lim}} = 1,22 \frac{(550 \times 10^{-9})}{(5 \times 10^{-3})}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\alpha_{\text{lim}} = 1,342 \times 10^{-4} \text{ rad}} \quad \text{(a)}$$

Calculons la distance limite entre deux objets situés à 10 m d'un œil humain en utilisant l'approximation des petits angles, car  $L \gg x_{\text{lim}}$  :

$$\tan(\alpha_{\text{lim}}) = \frac{x_{\text{lim}}}{L} \quad \Rightarrow \quad \tan(1,342 \times 10^{-4}) = \frac{x_{\text{lim}}}{(10)}$$

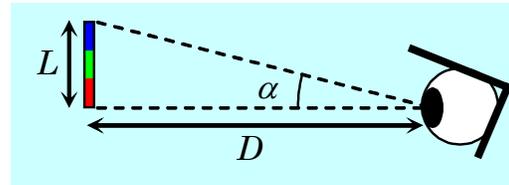
$$\Rightarrow \quad \boxed{x_{\text{lim}} = 1,3 \text{ mm}} \quad \text{(b)}$$

**Situation 4 : La distance optimale pour une télévision à grand écran.** La largeur d'une image DVD correspond à 940 pixels. On la projette sur un écran de 42 pouces de diagonale (1 pouce = 2,54 cm), ce qui correspond à une largeur de 93 cm. On désire déterminer à quelle distance de l'écran on doit se placer pour être tout juste incapable de distinguer les pixels. On suppose que l'œil a une limite de résolution de 1'.

Degré et minute	Minute et seconde	Degré et seconde
1° = 60'	1' = 60''	1° = 3600''

Évaluons la distance entre deux pixels :

$$L = \frac{\text{largeur}}{nb_{\text{pixel}}} = \frac{(0,93)}{(940)} \Rightarrow \boxed{L = 9,89 \times 10^{-4} \text{ m}}$$



Évaluons notre limite de résolution en radian :

$$\alpha_{\text{lim}} = 1' \times \frac{1^\circ}{60'} \Rightarrow \boxed{\alpha_{\text{lim}} = 0,0167^\circ}$$

Évaluons la distance limite entre l'œil et le pixel :

$$\begin{aligned} \tan(\alpha_{\text{lim}}) &= \frac{L}{D} & \Rightarrow & D = \frac{L}{\tan(\alpha_{\text{lim}})} \\ & & \Rightarrow & D = \frac{(9,89 \times 10^{-4})}{\tan(0,0167)} \\ & & \Rightarrow & \boxed{D = 3,39 \text{ m}} \end{aligned}$$

## Le critère de Rayleigh et l'expérience de Young

Lors de l'expérience de Young, nous avons utilisé deux sources de lumière cohérentes séparées par une très petite distance  $d$  ce qui a permis de superposer les deux patrons de diffraction sans pouvoir les distinguer. Puisque la lumière était en plus cohérente, les deux patrons de diffraction ont pu également interférer ensemble ce qui a donné des maximums et minimum lumineux à l'intérieur du patron de diffraction.

Deux patrons de diffraction indiscernables sans interférence	Deux patrons de diffraction indiscernable avec interférence
En construction ...	En construction ...



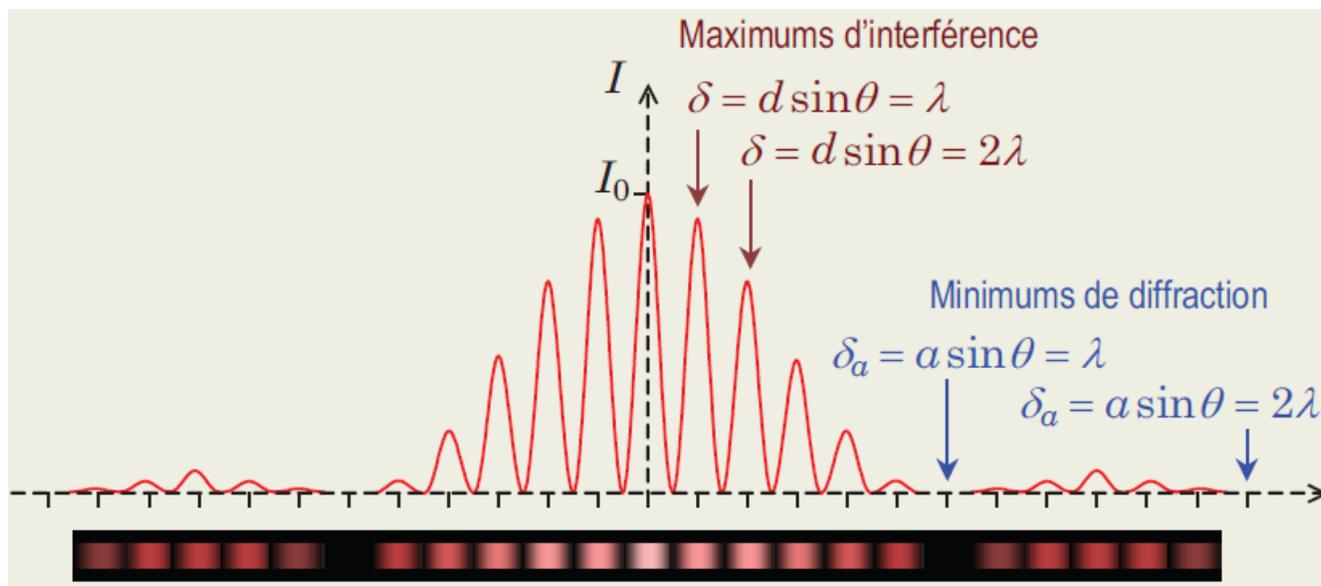




# Chapitre 3.6 – L'intensité de la figure de diffraction

## Comparaison entre l'expérience de Young et la diffraction avec fente rectiligne

Voici un tableau comparatif entre l'expérience de Young à deux fentes et la diffraction avec fente rectiligne. On réalise que les positions des maximums et des minimums de chaque phénomène d'interférence ne coïncident pas avec les mêmes différences de marche  $\delta$  :



Physique XXI - Tome C - p. 374 - © ERPI

Différence de phase (rad) $\Delta\phi$	Différence de marche (m) $\delta$	Expérience de Young $\delta = d \sin(\theta)$	Diffraction $\delta = a \sin(\theta)$
0	0	maximum central	maximum central
$\pi$	$\lambda / 2$	minimum	rien de particulier
$2\pi$	$\lambda$	maximum	minimum
$3\pi$	$3\lambda / 2$	minimum	près du maximum secondaire
$4\pi$	$2\lambda$	maximum	minimum
$5\pi$	$5\lambda / 2$	minimum	près du maximum secondaire

où  $d$  : Distance entre les deux fentes (m)       $a$  : Taille de chaque fente (m)

Voici le patron d'interférence réalisé à l'aide de deux fentes rectilignes :

Nous pouvons remarquer que :

- Les **deux patrons de diffraction** sont **indiscernables**, car la distance  $d$  entre les deux fentes est très petite ( $d/L < \tan(\alpha_{\text{lim}})$ ).
- Puisque la distance  $d$  entre les deux fentes est très petite par rapport à la distance  $L$  entre les fentes et l'écran, on peut supposer que les **deux patrons de diffraction** sont complètement **superposés** (on observe uniquement un pic de diffraction).
- Il y a **plusieurs maximums** de l'interférence de Young à l'intérieur du **1<sup>er</sup> minimum de diffraction**.
- À l'endroit où est situé un minimum de diffraction, l'amplitude lumineuse d'une interférence de Young est égale à zéro même si celui-ci est en interférence constructive.
- À l'endroit où est situé un maximum de diffraction, l'amplitude lumineuse d'une interférence de Young est localement maximale.
- Lorsque le rapport  $d/a$  est entier, les minimums de diffraction coïncident exactement avec des maximums de Young avec amplitude lumineuse nulle.

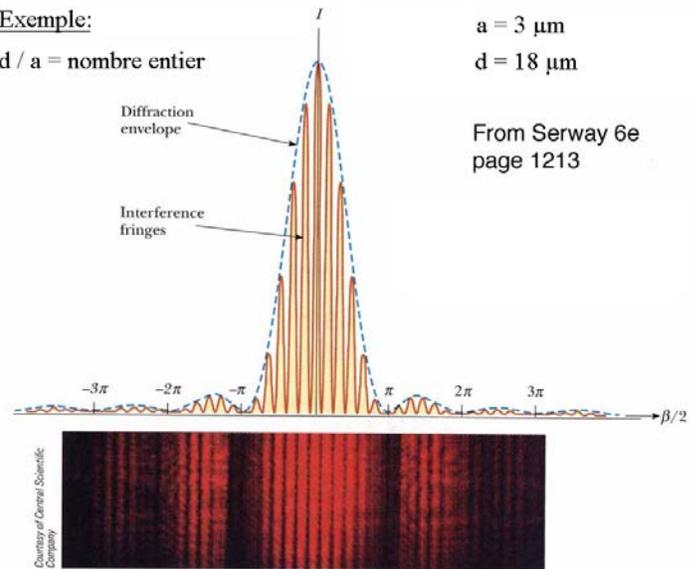
Exemple:

$d/a = \text{nombre entier}$

$a = 3 \mu\text{m}$

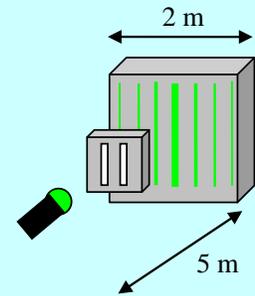
$d = 18 \mu\text{m}$

From Serway 6e  
page 1213



**Active Figure 38.11** The combined effects of two-slit and single-slit interference. This is the pattern produced when 650-nm light waves pass through two  $3.0\text{-}\mu\text{m}$  slits that are  $18 \mu\text{m}$  apart. Notice how the diffraction pattern acts as an "envelope" and controls the intensity of the regularly spaced interference maxima.

**Situation A : Toutes les franges sombres de l'interférence de Young.** Un laser de 550 nm éclaire deux fentes rectilignes verticales de 3 μm de largeur séparées par une distance de 0,02 mm. On observe le patron d'interférence sur un écran carré de 2 m de côté situé à 5 m des deux fentes. L'écran est centré sur le laser et il est aligné perpendiculairement à l'orientation du laser. On désire identifier les positions horizontales sur l'écran où il y a des franges sombres (intensité lumineuse égale à zéro).



Évaluons la différence de marche  $\delta$  associée à la diffraction d'une fente et évaluons la position  $y$  des minimums à l'aide du critère de l'interférence destructive :

$$\begin{aligned} \delta = r_2 - r_1 &\Rightarrow \delta = a \sin(\theta) && \text{(Approximation : } a \ll L \text{ donc } r_2 - r_1 \approx a \sin(\theta)) \\ &\Rightarrow (m\lambda) = a \sin(\theta) && \text{(Critère interférence destructive diffraction : } \delta = m\lambda) \\ &\Rightarrow \sin(\theta) = \frac{m\lambda}{a} && \text{(Isoler } \sin(\theta)) \\ &\Rightarrow \boxed{\theta = \sin^{-1}\left(\frac{m\lambda}{a}\right)} && \text{(Isoler } \theta) \end{aligned}$$

Évaluons les angle de positionnement  $\theta$  des minimums de diffraction et traduisons ces informations en positions horizontales  $y$  sur l'écran : ( $\tan(\theta) = y/L \Rightarrow y = L \tan(\theta)$ )

<b>Données :</b> $\lambda = 550 \times 10^{-9} \text{ m}$ , $a = 3 \times 10^{-6} \text{ m}$		
$m$	$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{m\lambda}{a}\right)$	$y = L \tan(\theta)$
1	10,56°	0,932 m
2	21,51°	1,971 m (exclure)

**P.S.** Les coordonnées horizontales  $y$  des minimums ne doivent pas dépasser la moitié de l'écran ( $y < 1 \text{ m}$ ) sinon la projection du minimum se fera derrière l'écran.

Évaluons la différence de marche  $\delta$  associée à l'expérience de Young et évaluons la position  $y$  des minimums à l'aide du critère de l'interférence destructive :

$$\begin{aligned} \delta = r_2 - r_1 &\Rightarrow \delta = d \sin(\theta) && \text{(Approximation : } d \ll L \text{ donc } r_2 - r_1 \approx d \sin(\theta)) \\ &\Rightarrow \left(\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda\right) = d \sin(\theta) && \text{(Critère interférence destructive : } \delta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda) \\ &\Rightarrow \sin(\theta) = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{d} && \text{(Isoler } \sin(\theta)) \\ &\Rightarrow \boxed{\theta = \sin^{-1}\left(\left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{d}\right)} && \text{(Isoler } \theta) \end{aligned}$$

Évaluons les angles de positionnement  $\theta$  des minimums de l'expérience de Young et traduisons ces informations en positions horizontales  $y$  sur l'écran : ( $y = L \tan(\theta)$ )

<b>Données :</b> $\lambda = 550 \times 10^{-9} \text{ m}$ , $d = 0,02 \times 10^{-3} \text{ m}$		
$m$	$\theta = \sin^{-1}\left(\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{d}\right)$	$y = L \tan(\theta)$
0	0,788°	0,069 m
1	2,364°	0,206 m
2	3,942°	0,345 m
3	5,523°	0,483 m
4	7,109°	0,624 m
5	8,699°	0,765 m
6	10,297°	0,908 m
7	11,903°	1,054 m (exclure)

Ainsi, il y aura absence de lumière sur l'écran aux coordonnées horizontales suivantes sur l'écran. Prenons comme référence  $y = 0$  comme étant le centre de l'écran :

Diffraction	Expérience de Young	
	$\pm 0,069 \text{ m}$	$\pm 0,624 \text{ m}$
	$\pm 0,206 \text{ m}$	$\pm 0,765 \text{ m}$
$\pm 0,932 \text{ m}$	$\pm 0,345 \text{ m}$	$\pm 0,908 \text{ m}$
	$\pm 0,483 \text{ m}$	

DESSIN À COMPLÉTER









# Chapitre 3.8 – L'interférence dans les pellicules minces

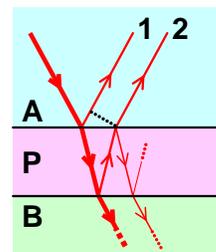
## Lumière à l'interface d'une pellicule

Lorsqu'une onde lumineuse arrive à l'interface d'un milieu différent, il se produit un phénomène de réflexion et de transmission. Puisque l'onde réfléchi et l'onde transmise proviennent de la même onde d'origine, on peut affirmer que l'onde réfléchi et l'onde transmise sont en phase.

Voici une représentation de la situation (schéma ci-contre).

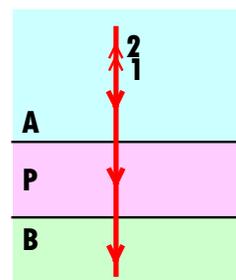
Onde 1 : Onde réfléchi sur la surface AP et demeure dans le milieu A.

Onde 2 : Onde transmise dans le milieu P, réfléchi sur la surface PB et transmise vers le milieu A



Afin de simplifier les calculs, nous étudierons seulement le phénomène d'interférence associé à une onde lumineuse arrivant perpendiculairement à une interface.

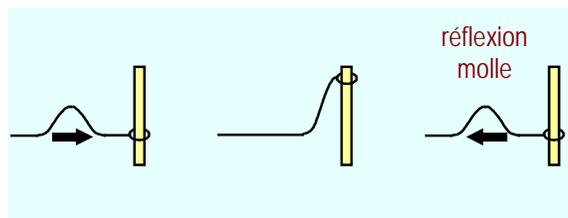
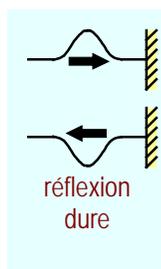
De plus, nous étudierons seulement l'interférence à deux ondes. L'interférence des ondes produites lors de réflexion multiple à l'intérieur de la pellicule mince seront alors négligées dans notre analyse.



## Réflexion d'une onde

Voici un rappel<sup>1</sup> des propriétés d'une onde qui subit une réflexion dure ou molle :

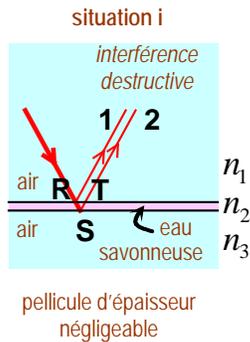
Type de réflexion	Critère au frontière	Inversion par rapport à l'axe de propagation	Déphasage par rapport à l'onde incidente
dure	$\mu_1 < \mu_2$	Oui	$\pi$
molle	$\mu_1 > \mu_2$	Non	0



<sup>1</sup> La réflexion d'une onde fut étudiée au chapitre 1.11.

## Interférence sur une pellicule d'épaisseur négligeable

Lorsqu'on effectue une interférence avec une pellicule d'épaisseur négligeable, il n'y a pas de déphasage associé à une différence de marche spatiale, car l'onde transmise effectue un déplacement supplémentaire négligeable dans la pellicule. Par contre, il y aura quand même un phénomène d'interférence selon les différentes combinaisons de réflexion effectuées par les deux ondes :  
 ( $n_{\text{air}} = 1, n_{\text{eau}} = 1,33$  et  $n_{\text{verre}} = 1,5$ )



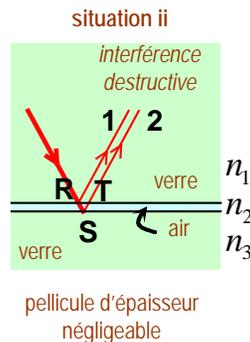
**Réflexion 1 :**  $n_1 < n_2$   
 (réflexion dure)  
 $\delta = \lambda/2$  ou  $\Delta\phi = \pi$

**Réflexion 2 :**  $n_2 > n_3$   
 (réflexion molle)  
 $\delta = 0$  ou  $\Delta\phi = 0$

**Décalage relatif total :**

$$\delta = \lambda/2 \text{ ou } \Delta\phi = \pi$$

⇒ interférence destructive



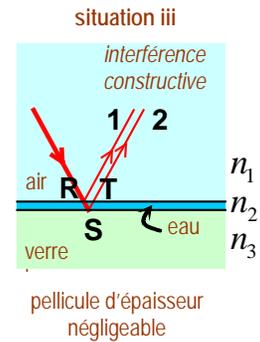
**Réflexion 1 :**  $n_1 > n_2$   
 (réflexion molle)  
 $\delta = 0$  ou  $\Delta\phi = 0$

**Réflexion 2 :**  $n_2 < n_3$   
 (réflexion dure)  
 $\delta = \lambda/2$  ou  $\Delta\phi = \pi$

**Décalage relatif total :**

$$\delta = \lambda/2 \text{ ou } \Delta\phi = \pi$$

⇒ interférence destructive



**Réflexion 1 :**  $n_1 < n_2$   
 (réflexion dure)  
 $\delta = \lambda/2$  ou  $\Delta\phi = \pi$

**Réflexion 2 :**  $n_2 < n_3$   
 (réflexion dure)  
 $\delta = \lambda/2$  ou  $\Delta\phi = \pi$

**Décalage relatif total :**

$$\delta = \lambda \text{ ou } \Delta\phi = 2\pi$$

⇒ interférence constructif

Lorsque l'épaisseur de la pellicule est négligeable, il n'y a pas de différence de marche spatiale et toutes les longueurs d'onde subiront le même type d'interférence. (ex : Une bulle de savon devient localement noire avec d'éclater, car toutes les longueurs d'onde sont en interférence destructive à cette épaisseur.)

## Interférence sur une pellicule mince (petite épaisseur)

Lorsque l'épaisseur de la pellicule n'est plus négligeable, il faut considérer la différence de marche spatiale entre les deux ondes ce qui produit un phénomène d'interférence particulier pour chaque longueur d'onde :



Pellicule d'eau savonneuse



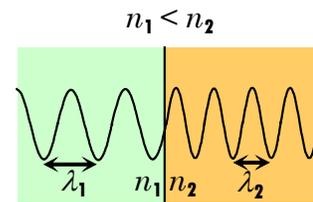
Bulle de savon



Tâche d'huile ou d'essence

## Indice de réfraction et longueur d'onde de la lumière

Lorsque la lumière voyage dans le vide, l'indice de réfraction est  $n = 1$  et la longueur d'onde  $\lambda$  est alors maximale. Lorsque la lumière voyage dans de la matière, l'indice de réfraction est supérieur à  $n = 1$  et la longueur d'onde diminue, car elle voyage à plus petite vitesse tout en conservant sa fréquence  $f$ .



(vers un milieu lent)

La relation entre les longueurs d'onde et les indices de réfraction est la suivante :

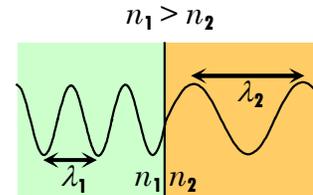
$$n_1 \lambda_1 = n_2 \lambda_2$$

où  $\lambda_1$  : Longueur d'onde de la lumière dans le milieu #1 (m)

$\lambda_2$  : Longueur d'onde de la lumière dans le milieu #2 (m)

$n_1$  : Indice de réfraction du milieu #1

$n_2$  : Indice de réfraction du milieu #2



(vers un milieu rapide)

### Preuve :

La **fréquence**  $f$  de la **lumière ne changera pas** sous le **changement de milieu** (transmission). Évaluons la modification de la longueur d'onde lors d'une transmission d'un milieu  $n_1$  vers un milieu  $n_2$  à partir de  $f_1 = f_2$  :

$$f_1 = f_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{v_1}{\lambda_1} = \frac{v_2}{\lambda_2} \quad \left( \text{Remplacer } f = \frac{v}{\lambda}, \text{ car } \lambda = vT = \frac{v}{f} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{c/n_1}{\lambda_1} = \frac{c/n_2}{\lambda_2} \quad \left( \text{Indice de réfraction, } n = \frac{c}{v} \text{ donc } v = \frac{c}{n} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1/n_1}{\lambda_1} = \frac{1/n_2}{\lambda_2} \quad \left( \text{Simplifier } c \right)$$

$$\Rightarrow \quad n_1 \lambda_1 = n_2 \lambda_2 \quad \blacksquare \quad \left( \text{Inverser les fractions} \right)$$

## Différence de marche dans une pellicule mince

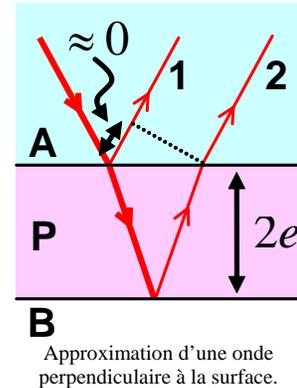
L'interférence se produit lorsqu'il y a une différence de marche entre deux ondes. Dans le cas des pellicules minces, la différence de marche s'observera de deux façons.

### Différence de marche par l'épaisseur : (approximation d'une onde perpendiculaire)

Puisque l'onde transmise doit parcourir la pellicule, réfléchir et parcourir à nouveau la pellicule afin d'être transmise vers le milieu initial, on définit la différence de marche due à l'épaisseur  $\delta_e$  de la façon suivante dans l'approximation d'un rayon perpendiculaire à la pellicule :

$$\delta_e = 2e$$

où  $\delta_e$  : Différence de marche par l'épaisseur (m)  
 $e$  : Épaisseur de la pellicule mince (m)



### Différence de marche par réflexion :

Puisque cette interférence nécessite l'analyse de deux réflexions, il y aura une différence de marche par réflexion selon les différentes combinaisons de réflexions (haut de la pellicule et bas de la pellicule). On utilise l'expression de la longueur d'onde dans la pellicule  $\lambda_p$ , car la différence de marche sera strictement effectuée par le déplacement de l'onde dans la pellicule puisque l'onde réfléchi se déplace dans le milieu A d'une distance négligeable avant d'interférer :

Réflexion molle-molle ( $\Delta\phi = 0$ )	Réflexion dure-dure ( $\Delta\phi = 0$ ou $\Delta\phi = 2\pi$ )	Réflexion dure-molle ( $\Delta\phi = \pi$ )
$\delta_r = 0$	$\delta_r = 0$	$\delta_r = \lambda_p / 2$

## Interférence constructive et destructive par pellicule mince

Durant le voyage de l'onde transmise dans le milieu de la pellicule, la longueur d'onde est influencée par le milieu. Pour cette raison, nous devons adapter nos équations de l'interférence constructive et destructive de la façon suivante pour les interpréter adéquatement avec notre différence de marche :

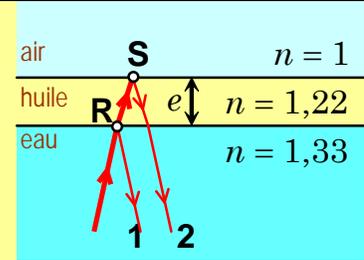
Différence de marche totale	Interférence constructive	Interférence destructive
$\delta = \delta_e + \delta_r$	$\delta = m\lambda_p$	$\delta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda_p$

où  $\delta$  : Différence de marche totale (m)  
 $m$  : Multiple entier de longueur d'onde ( $m \in \mathbb{N}^*$ )  
 $\lambda_p$  : Longueur d'onde dans le milieu de la pellicule (m)

Preuve : En construction ...

Référence : Marc Séguin, Physique XXI Tome C  
 Note de cours rédigée par Simon Vézina

**Situation 1 : Les minimums de réflexion.** Une couche d'huile ( $n = 1,22$ ) flotte sur de l'eau d'une piscine ( $n = 1,33$ ). Un rayon de lumière voyageant dans l'eau verticalement vers le haut frappe la pellicule. La longueur d'onde de la lumière dans l'eau est égale à 500 nm. On désire déterminer les trois plus petites valeurs de l'épaisseur de la couche d'huile pour lesquelles l'intensité de la lumière réfléchie est minimale.



Nous avons les différences de marche suivantes :

Différence de marche due à l'épaisseur	Différence de marche due aux réflexions
$\delta_e = 2e$	$\delta_r = 0$ (Réflexion eau-huile : molle) (Réflexion huile-air : molle)

Évaluons la longueur d'onde de la lumière dans l'huile :

$$n_1 \lambda_1 = n_2 \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad n_{\text{eau}} \lambda_{\text{eau}} = n_{\text{huile}} \lambda_{\text{huile}} \quad (\text{Changement d'indice})$$

$$\Rightarrow \quad (1,33)(500 \times 10^{-9}) = (1,22) \lambda_{\text{huile}} \quad (\text{Remplacer valeurs num.})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\lambda_{\text{huile}} = 545 \times 10^{-9} \text{ m}}$$

À partir de l'équation de l'interférence destructive, évaluons l'épaisseur requise :

$$\delta = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda_p \quad \Rightarrow \quad 2e = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda_{\text{huile}} \quad (\text{Remplacer } \delta = \delta_e + \delta_r \text{ et } \lambda_p = \lambda_{\text{huile}})$$

$$\Rightarrow \quad e = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda_{\text{huile}}}{2} \quad (\text{Isoler l'épaisseur})$$

$$\Rightarrow \quad e = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{(545 \times 10^{-9})}{2} \quad (\text{Remplacer valeurs num.})$$

$$\Rightarrow \quad e = 272,5 \times 10^{-9} \left(m + \frac{1}{2}\right) \quad (\text{Simplification numérique})$$

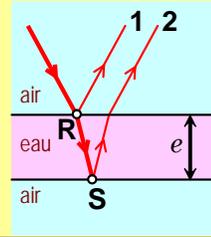
Nous pouvons maintenant évaluer les trois plus petites valeurs d'épaisseur produisant une interférence destructive :

$$m = 0 : \quad e = 272,5 \times 10^{-9} \left(0 + \frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{e = 136 \text{ nm}}$$

$$m = 1 : \quad e = 272,5 \times 10^{-9} \left(1 + \frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{e = 409 \text{ nm}}$$

$$m = 2 : \quad e = 272,5 \times 10^{-9} \left(2 + \frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{e = 681 \text{ nm}}$$

**Situation 2 : La couleur d'une bulle de savon.** Un faisceau de lumière blanche (un mélange de toutes les longueurs d'onde entre 400 nm et 700 nm) tombe perpendiculairement sur une pellicule d'eau savonneuse ( $n = 1,33$ ) de 650 nm d'épaisseur. On désire déterminer pour quelles longueurs d'ondes la réflexion est *maximale*.



Nous avons les différences de marche suivantes :

Différence de marche due à l'épaisseur	Différence de marche due aux réflexions
$\delta_e = 2e$	$\delta_r = \frac{\lambda_{\text{eau}}}{2}$ (Réflexion air-eau : dure) (Réflexion eau-air : molle)

Évaluons la longueur d'onde de la lumière dans l'eau :

$$n_1 \lambda_1 = n_2 \lambda_2 \Rightarrow n_{\text{air}} \lambda_{\text{air}} = n_{\text{eau}} \lambda_{\text{eau}} \quad (\text{Changement d'indice})$$

$$\Rightarrow \lambda_{\text{eau}} = \frac{n_{\text{air}}}{n_{\text{eau}}} \lambda_{\text{air}} \quad (\text{Isoler } \lambda_{\text{eau}})$$

$$\Rightarrow \lambda_{\text{eau}} = \frac{(1)}{(1,33)} \lambda_{\text{air}} \quad (\text{Remplacer valeurs num.})$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_{\text{eau}} = 0,752 \lambda_{\text{air}}} \quad (\text{Relation des longueurs d'onde})$$

À partir de l'équation de l'interférence constructive, évaluons les longueurs d'onde admissibles :

$$\delta = m \lambda_p \Rightarrow 2e + \frac{\lambda_{\text{eau}}}{2} = m \lambda_{\text{eau}} \quad (\text{Remplacer } \delta = \delta_e + \delta_r \text{ et } \lambda_p = \lambda_{\text{eau}})$$

$$\Rightarrow 2e = \left(m - \frac{1}{2}\right) \lambda_{\text{eau}} \quad (\text{Regrouper } \lambda_{\text{eau}} \text{ et le factoriser})$$

$$\Rightarrow 2e = \left(m - \frac{1}{2}\right) (0,752 \lambda_{\text{air}}) \quad (\text{Remplacer } \lambda_{\text{eau}} = 0,752 \lambda_{\text{air}})$$

$$\Rightarrow \lambda_{\text{air}} = 2,66e \left(m - \frac{1}{2}\right)^{-1} \quad (\text{Isoler } \lambda_{\text{air}})$$

$$\Rightarrow \lambda_{\text{air}} = 2,66(650 \times 10^{-9}) \left(m - \frac{1}{2}\right)^{-1} \quad (\text{Remplacer valeurs num.})$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_{\text{air}} = 1729 \times 10^{-9} \left(m - \frac{1}{2}\right)^{-1}} \quad (\text{Simplification numérique})$$

Nous pouvons maintenant évaluer les longueurs d'onde qui produiront de l'interférence constructive :

$$\lambda_{\text{air}} = 1729 \times 10^{-9} \left( m - \frac{1}{2} \right)^{-1}$$

(Équation précédente)

$$m = 0 : \quad \lambda_{\text{air}} = 1729 \times 10^{-9} \left( (0) - \frac{1}{2} \right)^{-1} \Rightarrow \quad \text{« Non physique »}$$

$$m = 1 : \quad \lambda_{\text{air}} = 1729 \times 10^{-9} \left( (1) - \frac{1}{2} \right)^{-1} \Rightarrow \quad \lambda_{\text{air}} = 3458 \text{ nm}$$

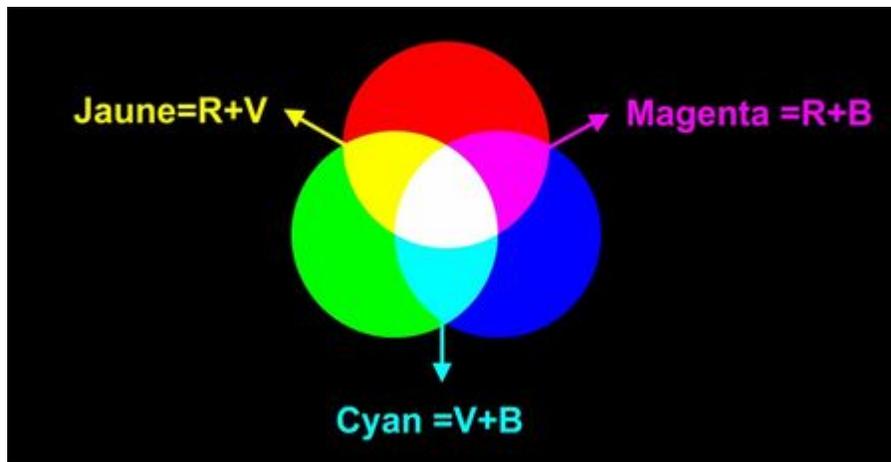
$$m = 2 : \quad \lambda_{\text{air}} = 1729 \times 10^{-9} \left( (2) - \frac{1}{2} \right)^{-1} \Rightarrow \quad \lambda_{\text{air}} = 1153 \text{ nm}$$

$$m = 3 : \quad \lambda_{\text{air}} = 1729 \times 10^{-9} \left( (3) - \frac{1}{2} \right)^{-1} \Rightarrow \quad \boxed{\lambda_{\text{air}} = 692 \text{ nm}} \text{ (rouge)} \quad \text{entre 400 nm et 700 nm}$$

$$m = 4 : \quad \lambda_{\text{air}} = 1729 \times 10^{-9} \left( (4) - \frac{1}{2} \right)^{-1} \Rightarrow \quad \boxed{\lambda_{\text{air}} = 494 \text{ nm}} \text{ (vert)} \quad \text{entre 400 nm et 700 nm}$$

$$m = 5 : \quad \lambda_{\text{air}} = 1729 \times 10^{-9} \left( (5) - \frac{1}{2} \right)^{-1} \Rightarrow \quad \lambda_{\text{air}} = 384 \text{ nm}$$

À cette épaisseur de pellicule, ces deux couleurs seront superposés aux mêmes endroits et, la couleur observée sera jaune.



<http://physiquelumiere.canalblog.com/archives/2010/10/22/19337885.html>  
Couleur observée lors de la superposition de plusieurs couleurs pures.

## Exercices

**3.8.8** *La couleur des bulles de savon.* À un certain endroit de la surface d'une bulle de savon ( $n = 1,33$ ) éclairée par de la lumière blanche, on observe qu'il y a un *minimum* de réflexion dans le vert à 501 nm et un *maximum* de réflexion dans le rouge à 668 nm. Donnez les deux plus petites valeurs possibles pour l'épaisseur de la bulle à cet endroit.

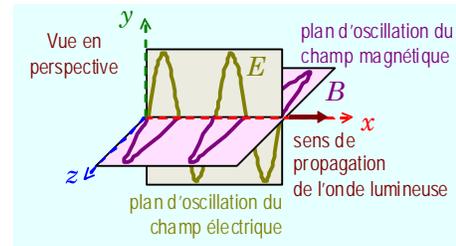
## Solutions

En construction ...

# Chapitre 3.10 – La polarisation

## La polarisation de l'onde électromagnétique

La lumière est une onde électromagnétique généralement<sup>1</sup> transversale dont le champ électrique  $\vec{E}$  et le champ magnétique  $\vec{B}$  oscillent perpendiculairement à la direction de propagation de l'onde. Le plan d'oscillation du champ électrique porte également le nom de **polarisation**.



Exemple : Polarisation linéaire :

Évolution du champ électrique	Polarisation selon l'axe y	Polarisation selon l'axe z
<p>Vue en perspective</p> <p>plan d'oscillation du champ électrique (plan <math>xy</math>)</p> <p>représentation de la polarisation de l'onde</p>	$\vec{E}(x,t) = E_0 \sin(kx - \omega t + \phi) \vec{j}$	$\vec{E}(x,t) = E_0 \sin(kx - \omega t + \phi) \vec{k}$

Lorsqu'il y a superposition de deux ondes électromagnétique de même fréquence polarisées linéairement selon des axes différentes, le champ électrique résultant  $\vec{E}$  peut osciller selon un axe non constant dans le temps ce qui en résulte d'une polarisation non linéaire.

Exemple : Polarisation circulaire

Polarisation circulaire horaire (droite) selon l'axe x	Polarisation circulaire anti-horaire (gauche) selon l'axe x
$\vec{E}(x,t) = E_y(x,t) \vec{j} + E_z(x,t) \vec{k}$ <p>où</p> $E_y = E_0 \sin(kx - \omega t + \phi)$ $E_z = E_0 \sin(kx - \omega t + \phi + \pi/2)$	<p>En construction ...</p> $\vec{E}(x,t) = E_y(x,t) \vec{j} + E_z(x,t) \vec{k}$ <p>où</p> $E_y = E_0 \sin(kx - \omega t + \phi)$ $E_z = E_0 \sin(kx - \omega t + \phi - \pi/2)$

Application : La projection d'un **film 3D** au cinéma requière deux images générées par deux sources de lumière polarisées circulairement droite et gauche. Les lunettes polarisées ont pour fonction de bloquer une image pour chaque œil.

<sup>1</sup> Lorsque la lumière voyage dans une fibre optique ou autre forme de guide d'onde, la lumière peut également être une onde longitudinale.

## Intensité de transmission sur une structure polarisée

Certains matériaux ayant une structure (macroscopique, moléculaire ou atomique) en forme de grillage permettent plus facilement à la lumière ayant une polarisation particulière d'être transmise. Une structure ayant un tel alignement porte le nom de **polariseur** et elle est caractérisée par un **axe de transmission**.

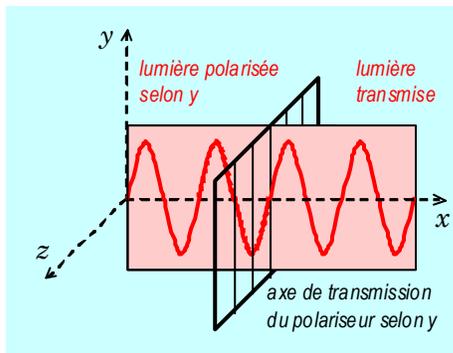


Un polariseur macroscopique à onde radio ( $\lambda > 0,1 \text{ mm}$ )

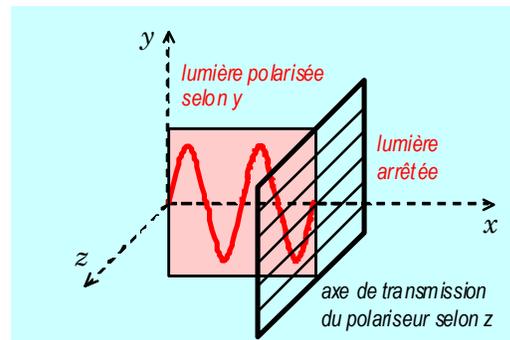
Dans la plus part des cas, un polariseur permet la transmission de la lumière selon les règles d'intensités suivantes :

La lumière est transmise à 100% lorsque la **polarisation** de la lumière est **parallèle** à l'**axe de transmission** du polariseur.

La lumière est transmise à 0% lorsque la **polarisation** de la lumière est **perpendiculaire** à l'**axe de transmission** du polariseur.

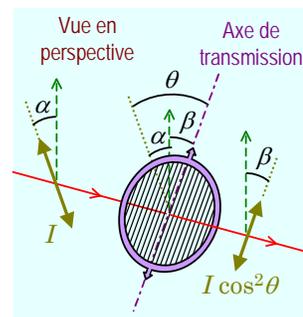
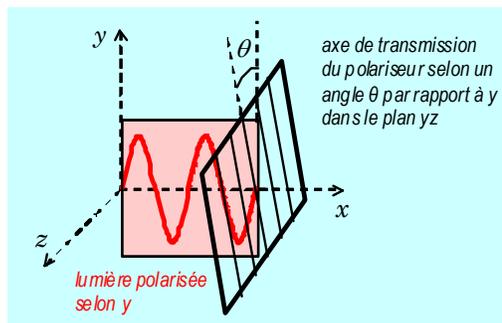


$$I' = I$$



$$I' = 0$$

La lumière est transmise à une intensité  $I' = I \cos^2 \theta$  (entre 0% et 100%) lorsque la **polarisation** de la lumière fait un **angle  $\theta$**  avec l'**axe de transmission** du polariseur.



$$I' = I \cos^2 \theta$$

Preuve : En construction ...

La taille du grillage de la structure influence beaucoup le type de lumière qui sera influencée par les règles précédentes :

- ❖ Si la **distance  $d$**  entre le grillage de la structure est **beaucoup plus élevée** que la **longueur d'onde** de la lumière ( $d \gg \lambda$ ), la lumière sera **transmise quel que soit sa polarisation**.
- ❖ Si la **distance  $d$**  entre le grillage de la structure est **comparable** à la **longueur d'onde** de la lumière ( $d \approx \lambda$ ), la lumière sera **transmise** avec les **intensités** décrites précédemment.

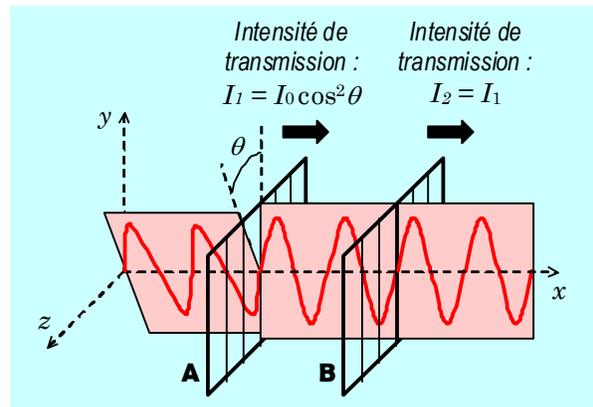
# Polarisation de la lumière

Une lumière ayant une polarisation quelconque peut acquérir une polarisation dans une direction particulière après une interaction avec une structure (transmission ou réflexion).

## Polarisation par transmission dans un polariseur :

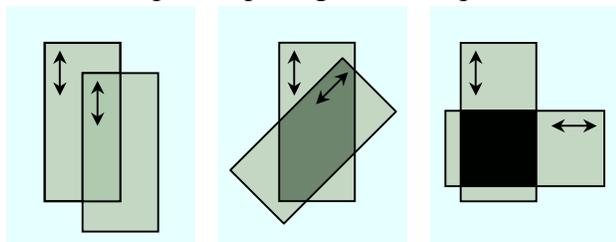
On constate qu'une lumière ayant traversé un polarisateur quelconque est transmise à une certaine intensité ( $I_1 = I_0 \cos^2 \theta$ ), mais que cette même lumière est transmise à 100 % ( $I_2 = I_1$ ) lorsqu'elle traverse un second polariseur aligné dans le même sens que le précédent.

Ainsi, on peut conclure que la lumière ayant traversé un polariseur acquiert une polarisation dans le même sens que l'axe de transmission du polariseur qu'il a traversé.

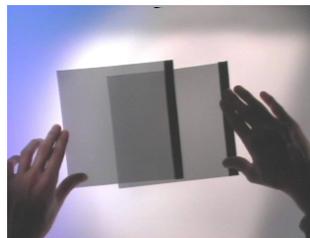


Ceci explique pourquoi la lumière ne peut pas traverser deux polariseurs dont les axes de transmission sont perpendiculaires :

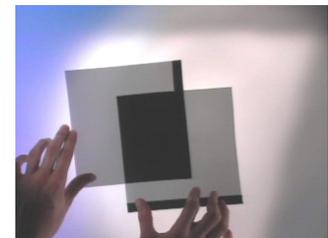
Comparaison de la lumière non polarisée transmise après le passage de deux polariseurs :



Axes de transmission parallèle ( $\theta = 0$ )



Axes de transmission perpendiculaire ( $\theta = 90^\circ$ )



## Polarisation par réflexion et angle de Brewster :

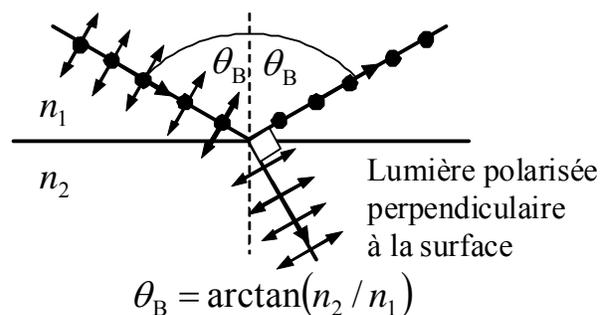
Lorsqu'une lumière non polarisée se dirige vers une surface selon l'angle de Brewster  $\theta_B$  (mesuré par rapport à la normale à la surface), la lumière est réfléchie avec une polarisation parallèle à la surface et elle est transmise avec une polarisation perpendiculaire à la surface.

### Application :

Une **lunette de soleil polarisée** de qualité est composée de verres polarisés perpendiculairement ce qui réduit les reflets.

Lumière non-polarisée

Lumière polarisée parallèle à la surface



# Lumière non polarisée

Une **lumière non polarisée** est une superposition d'onde électromagnétique de même fréquence se dirigeant dans la même direction ayant des polarisations linéaires purement aléatoires, mais équiprobable dans les 360° d'orientations possibles. Ainsi, une lumière non polarisée ne favorise pas une polarisation particulière.



Une ampoule émet de la lumière non polarisée

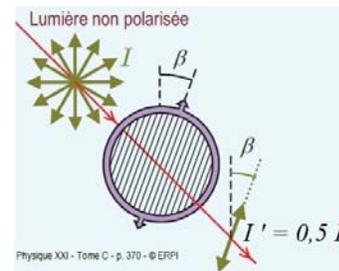
Exemple : Lumière du Soleil  
Lampe incandescente

## Lumière non polarisée et polariseur

Lorsqu'une source de **lumière non polarisée** rencontre un **polariseur**, le **taux de transmission moyen** de la lumière est de 50 % et elle acquiert la polarisation du polariseur :

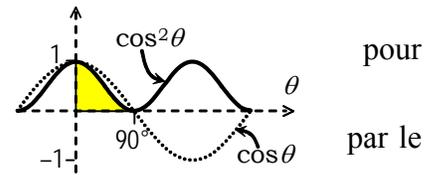
$$I' = 0,5I$$

(la lumière acquiert une polarisation)



Preuve :

Évaluons la moyenne des intensités de transmission  $I = I_0 \cos^2 \theta$  des angles  $\theta$  compris entre 0 à  $\pi/2$  (0° et 90°) en effectuant l'intégrale de la fonction  $\cos^2 \theta$  entre 0 à  $\pi/2$  et en divisant le tout nombre d'angle  $\theta$  possible étant de  $\pi/2$  :



$$I = \int_{\theta=0}^{\pi/2} I_0 \cos^2(\theta) d\theta \Rightarrow I = I_0 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \left( \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^2 d\theta \quad (\text{Remplacer : } \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2})$$

$$\Rightarrow I = \frac{I_0}{4} \int_{\theta=0}^{\pi/2} (e^{2i\theta} + 2 + e^{-2i\theta}) d\theta \quad (\text{Effectuer le carré, } e^0 = 1)$$

$$\Rightarrow I = \frac{I_0}{4} \left( \left[ \frac{e^{2i\theta}}{2i} \right]_0^{\pi/2} + [2\theta]_0^{\pi/2} + \left[ \frac{e^{-2i\theta}}{-2i} \right]_0^{\pi/2} \right) \quad (\text{Effectuer l'intégrale})$$

$$\Rightarrow I = \frac{I_0}{4} \left( \pi + \left[ \frac{e^{2i\theta}}{2i} - \frac{e^{-2i\theta}}{2i} \right]_0^{\pi/2} \right) \quad (\text{Évaluer } 2\theta \text{ et réécriture})$$

$$\Rightarrow I = \frac{I_0}{4} (\pi + [\sin(2\theta)]_0^{\pi/2}) \quad (\text{Remplacer : } \sin(2\theta) = \frac{e^{2i\theta} - e^{-2i\theta}}{2i})$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{\pi}{4} I_0} \quad (\text{Évaluer } \sin(2\theta) \text{ et simplifier})$$

Évaluons l'intensité moyenne à partir de l'aire sous la courbe sur un arc de  $\pi/2$  :

$$\bar{I} = \frac{I}{\pi/2} \quad \Rightarrow \quad \bar{I} = \frac{(\pi/4 I_0)}{\pi/2} \quad \Rightarrow \quad \bar{I} = \frac{I_0}{2} \quad \blacksquare$$

**Situation 1 : La traversée de deux polariseurs.** Un faisceau de lumière non polarisée d'intensité initiale  $I_0$  traverse deux polariseurs. L'axe de polarisation du premier polariseur est incliné à  $20^\circ$  par rapport à la verticale. L'axe de polarisation du second polariseur est incliné à  $50^\circ$  par rapport à la verticale (cet angle d'inclinaison est mesuré dans le même sens que pour le premier polariseur). On désire déterminer l'intensité du faisceau à la sortie du second polariseur.

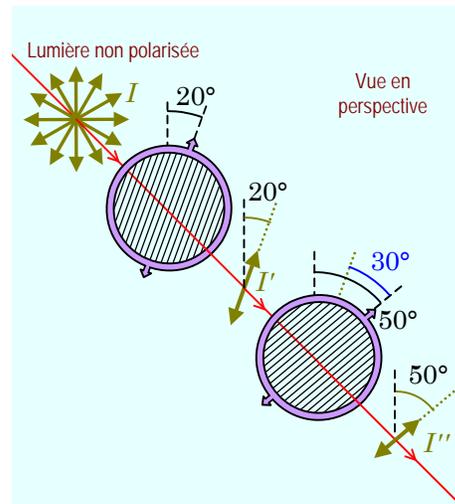
Puisque la lumière est initialement non polarisée, l'intensité lumineuse qui sera transmise après le passage du 1<sup>er</sup> polariseur sera de 50% et la lumière va acquérir la polarisation du 1<sup>er</sup> polariseur :

$$I_1 = 0,5I_0$$

Puisque la lumière ayant traversé le premier polariseur acquiert une polarisation précise, voici l'axe de polarisation de la lumière après le passage du 1<sup>er</sup> polariseur :

$$\theta_1 = 20^\circ$$

(par rapport à la verticale)



Évaluons l'intensité de la lumière  $I_2$  après le passage du 2<sup>ème</sup> polariseur sachant que la lumière d'intensité  $I_1$  est maintenant polarisée à  $20^\circ$  par rapport à la verticale :

$$\begin{aligned} I &= I \cos^2(\theta) & \Rightarrow & \quad I_2 = I_1 \cos^2(\theta) \\ & & \Rightarrow & \quad I_2 = I_1 \cos^2(\theta_2 - \theta_1) & \text{(Angle entre polarisation : } \theta = \theta_2 - \theta_1 \text{)} \\ & & \Rightarrow & \quad I_2 = I_1 \cos^2((50^\circ) - (20^\circ)) \\ & & \Rightarrow & \quad I_2 = I_1 \cos^2(30^\circ) \\ & & \Rightarrow & \quad I_2 = (0,5I_0) \cos^2(30^\circ) \\ & & \Rightarrow & \quad \boxed{I_2 = 0,375I_0} \end{aligned}$$

## Image et polarisation

Voici quelques images qui sont le résultat de l'observation de lumière polarisée :

Vitre arrière d'une voiture :

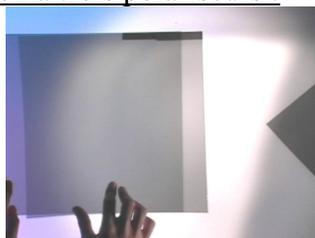


Onde radio polarisée :



**P.S.** Ce grillage ne permet pas de polariser la lumière dans le visible, car celle-ci possède une longueur d'onde beaucoup plus petite que la distance entre deux barreaux consécutifs.

Polarisation à trois polariseurs :







# Chapitre 4.1a – La relativité de Galilée

## Référentiel

Un **référentiel** est un **point de repère (système d'axe)** par rapport au quel on peut prendre une **mesure de position** et de **temps**. Il est préférable d'utiliser une graduation commune pour tous les référentiels utilisés dans une situation.

Exemple :

Évaluer la position horizontale d'une balle rouge dans le référentiel **A** et dans le référentiel **B**.

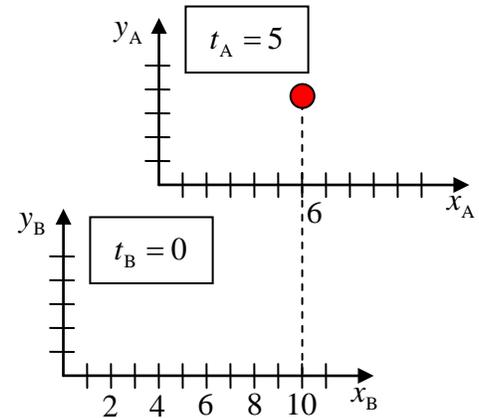
Selon le référentiel **A** :

$$x_A = 6 \quad \text{à} \quad t_A = 5$$

Selon le référentiel **B** :

$$x_B = 10 \quad \text{à} \quad t_B = 0$$

Les deux référentiels ont des valeurs de  $x$  et de  $t$  différentes, mais ils s'accordent sur le fait qu'ils positionnent le même objet au même instant.



Position d'une balle rouge exprimée dans un référentiel A et B.

## Événement

Un **événement** est une observation d'un phénomène à une **position**  $x$  donnée et à un **temps**  $t$  donné. La description de l'événement et la valeur de ses mesures **dépendent** du choix du référentiel.

Exemple :

- Albert est en bas de la tour ( $x$ ) à 2h a.m. ( $t$ ). (1 évé.)
- Albert monte la tour de 100 m ( $\Delta x$ ) en 15 minutes ( $\Delta t$ ). (2 évé.)



<https://www.flickr.com/photos/sleepyjeanie/5738474150/>

Un événement correspond à un lieu et un moment.

## La durée

La **durée** est une **variation de temps** entre **deux événements** mesurée à partir d'un même référentiel :

$$T = \Delta t = t_2 - t_1$$

où  $T$  : Durée entre les deux événements dans un référentiel commun (s)

$t_2$  : Temps associé à l'événement 2 par rapport au référentiel (s)

$t_1$  : Temps associé à l'événement 1 par rapport au référentiel (s)

## La longueur

La **longueur** est une **variation de position** entre **deux événements mesurés simultanément** mesurée à partir d'un même référentiel :

$$L = \Delta x = x_2 - x_1 \quad \text{lorsque} \quad \Delta t = 0$$

- où
- $L$  : Longueur entre les deux événements par rapport à un référentiel (m)
  - $x_2$  : Position de l'événement 2 par rapport au référentiel (m)
  - $x_1$  : Position de l'événement 1 par rapport au référentiel (m)

## La distance

La **distance** est une **variation de position** entre **deux événements non simultanés** mesurée à partir d'un même référentiel :

$$D = \Delta x(t) = x_2(t_2) - x_1(t_1) \quad \text{lorsque} \quad \Delta t \neq 0$$

- où
- $D$  : Distance entre les deux événements par rapport à un référentiel (m)
  - $x_2(t_2)$  : Position de l'événement 2 par rapport au référentiel (m)
  - $x_1(t_1)$  : Position de l'événement 1 par rapport au référentiel (m)

## Référentiel inertiel et non inertiel

Un **référentiel inertiel** est un référentiel où la **1<sup>ère</sup> loi de Newton** est **applicable** ( $\sum \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{v}$  est constant). Ce référentiel est **immobile** ou se **déplace à vitesse constante** par rapport à un autre référentiel inertiel.

Un **référentiel non inertiel** est un **référentiel** où la **1<sup>ère</sup> loi de Newton** est en violation. Ce type de référentiel subit alors une **accélération** par rapport à un autre référentiel inertiel.

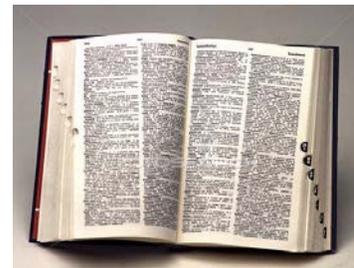
Référentiel inertiel	Référentiel non inertiel
Une voiture (A) se déplace à une vitesse constante $v_{xAB} = 3$ par rapport au sol (B).	Un tourniquet (A) tourne à une vitesse angulaire constante $\omega_{zAB}$ par rapport au sol (B).

## Une transformation entre deux référentiels

Une **transformation** entre **deux référentiels** est une **équation mathématique** permettant de faire **correspondre** une **mesure** effectuée dans un **référentiel A** avec une **mesure** effectuée dans un **référentiel B**. Cette transformation relie mathématiquement un événement mesuré dans deux contextes différents.

Une transformation s'utilise de la façon suivante :

*Si l'on mesure un événement dans le référentiel A et que l'on connaît la transformation pour passer à un référentiel B, on peut calculer la mesure de l'événement dans le référentiel de B.*



<http://www.euroconte.org/de-de/anthropologiedelacommunicationorale/lalett%C3%A9ratureorale/dictionnairedelalitt%C3%A9ratureorale.aspx>

Une transformation est une « traduction » d'une mesure d'un référentiel à un autre.

## La transformation de Galilée

La **transformation de Galilée** permet de **convertir** des **mesures** ( $x$ ,  $v_x$ ,  $t$ ) **d'un référentiel inertiel A** vers un **référentiel inertiel B** qui ont les caractéristiques suivantes :

- 1) Le référentiel **A** se déplace à une vitesse relative  $v_{xAB}$  par rapport au référentiel **B**.
- 2) L'origine du référentiel **A** coïncide avec l'origine du référentiel **B** à  $t_A = t_B = 0$ .

Transformation de A vers B	Transformation de B vers A
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>x_B = x_A + v_{xAB}t_A</math></li> <li>• <math>v_{xB} = v_{xA} + v_{xAB}</math></li> <li>• <math>y_B = y_A</math></li> <li>• <math>t_B = t_A</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>x_A = x_B - v_{xAB}t_B</math></li> <li>• <math>v_{xA} = v_{xB} - v_{xAB}</math></li> <li>• <math>y_A = y_B</math></li> <li>• <math>t_A = t_B</math></li> </ul>

où

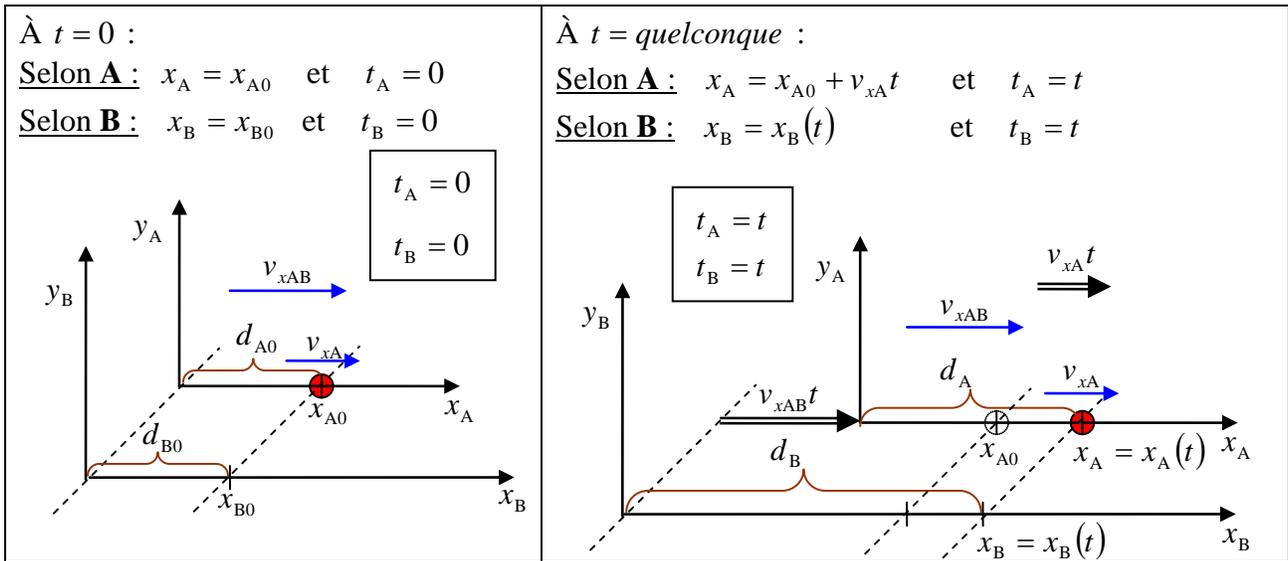
- $x_A$  : Position horizontale d'un événement selon le référentiel **A** (m).
- $x_B$  : Position horizontale d'un événement selon le référentiel **B** (m).
- $v_{xA}$  : Vitesse d'un événement selon le référentiel **A** (s).
- $v_{xB}$  : Vitesse d'un événement selon le référentiel **B** (s).
- $y_A$  : Position verticale d'un événement selon le référentiel **A** (m).
- $y_B$  : Position verticale d'un événement selon le référentiel **B** (m).
- $t_A$  : Moment (temps) d'un événement selon le référentiel **A** (s).
- $t_B$  : Moment (temps) d'un événement selon le référentiel **A** (s).
- $v_{xAB}$  : Vitesse du référentiel A par rapport au référentiel **B** (m/s).

**P.S.** Le **signe** associé de la **vitesse**  $v_{xAB}$  est **très important**, car il précise le **sens** de la **vitesse**.

- ❖ Référentiel **A** se déplace dans le **sens positif** de l'**axe x** par rapport à **B**, alors  $v_{xAB} > 0$ .
- ❖ Référentiel **A** se déplace dans le **sens négatif** de l'**axe x** par rapport à **B**, alors  $v_{xAB} < 0$ .

Preuve :

Considérons un objet situé initialement à la coordonnée  $x_{A0}$  et se déplaçant à vitesse constante  $v_{xA}$  selon un référentiel inertiel **A** étant lui-même en mouvement à vitesse constante  $v_{xAB}$  par rapport à un référentiel **B** inertiel. Évaluons la transformation de la position du référentiel **A** vers **B** sachant que les deux référentiels sont identiques à  $t_A = t_B = 0$  et qu'il s'est écoulé un temps  $t$  dans le référentiel **A** et **B** :



Par un simple ajout de translation  $v_{xAB}t$  du référentiel **A** par rapport à **B**, nous obtenons la transformation de Galilée de la position :

$$x_B = x_A + v_{xAB}t \quad \blacksquare (1)$$

Évaluons la vitesse de l'objet dans le référentiel **B** à partir de la transformation de Galilée de la position :

$$\begin{aligned}
 x_B = x_A + v_{xAB}t &\Rightarrow x_B = (x_{A0} + v_{xA}t) + v_{xAB}t && (\text{MUA : } x_A = x_{A0} + v_{xA}t, a_{xA} = 0) \\
 &\Rightarrow x_B = x_{A0} + (v_{xA} + v_{xAB})t && (\text{Factoriser } t) \\
 &\Rightarrow \frac{d}{dt}(x_B) = \frac{d}{dt}(x_{A0} + (v_{xA} + v_{xAB})t) && (\text{Dériver par rapport au temps } t) \\
 &\Rightarrow \frac{dx_B}{dt} = (v_{xA} + v_{xAB}) \frac{dt}{dt} && (v_{xA}, v_{xAB} \text{ et } x_{A0} \text{ sont des constantes}) \\
 &\Rightarrow v_{xB} = v_{xA} + v_{xAB} && \blacksquare (2) \quad \left( \frac{dx_B}{dt} = v_{xB} \text{ et } \frac{dt}{dt} = 1 \right)
 \end{aligned}$$

**Situation A : Du bowling dans le train.** Durant un voyage, Albert joue une partie de bowling dans un train se déplaçant à 30 m/s (108 km/h) par rapport au sol. À  $t = 0$ , la boule est située  $x_A = 0$  pour Albert et à  $x_B = 0$  pour le sol et elle roule à une vitesse de 1,2 m/s par rapport à Albert. On désire évaluer **(a)** la position de la boule par rapport à Albert à 5 secondes et **(b)** la position de la boule par rapport au sol à 5 secondes (avec la transformation de Galilée), **(c)** la vitesse de la boule par rapport au sol et **(d)** la position de la boule par rapport au sol à 5 secondes (avec la résolution du MUA dans le référentiel au sol).

Dans ce problème, nous avons deux référentiels :

Référentiel **A** : Le train.

Référentiel **B** : Le sol.

Utilisons les équations du MUA pour positionner la boule dans le référentiel **A** :

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \Rightarrow x_A = x_{A0} + v_{xA0}t_A + \frac{1}{2}a_{xA}t_A^2 \quad (\text{Appliquer l'équation dans le réf. A})$$

$$\Rightarrow x_A = (0) + (1,2)(5) + \frac{1}{2}(0)(5)^2 \quad (\text{Remplacer valeurs numériques})$$

$$\Rightarrow \boxed{x_A = 6 \text{ m}} \quad (\mathbf{a})$$

Avec la transformation de Galilée, transposons notre mesure effectuée dans le référentiel **A** vers le référentiel **B** :

Avec :  $x_A = 6 \text{ m}$  à  $t_A = 5 \text{ s}$ ,  $v_{xAB} = 30 \text{ m/s}$

$$x_B = x_A + v_{xAB}t_A \Rightarrow x_B = (6) + (30)(5) \quad (\text{Remplacer } x_A, t_A \text{ et } v_{xAB})$$

$$\Rightarrow \boxed{x_B = 156 \text{ m}} \quad (\mathbf{b})$$

Utilisons la transformation de Galilée des vitesses afin de transformer la vitesse de la boule mesurée par Albert (référentiel **A**) vers le référentiel du sol (référentiel **B**) :

$$v_{xB} = v_{xA} + v_{xAB} \Rightarrow v_{xB} = (1,2) + (30) \quad (\text{Remplacer valeur num.})$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{xB} = 31,2 \text{ m/s}} \quad (\mathbf{c})$$

À partir de la vitesse de la boule  $v_{xB}$  par rapport au référentiel **B**, évaluons la position de la boule par rapport au référentiel **B** :

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \Rightarrow x_B = x_{B0} + v_{xB0}t_B + \frac{1}{2}a_{xB}t_B^2 \quad (\text{Appliquer l'équation dans le réf. B})$$

$$\Rightarrow x_B = (0) + (31,2)(5) + \frac{1}{2}(0)(5)^2 \quad (\text{Remplacer valeurs num.})$$

$$\Rightarrow \boxed{x_B = 156 \text{ m}} \quad (\mathbf{d})$$

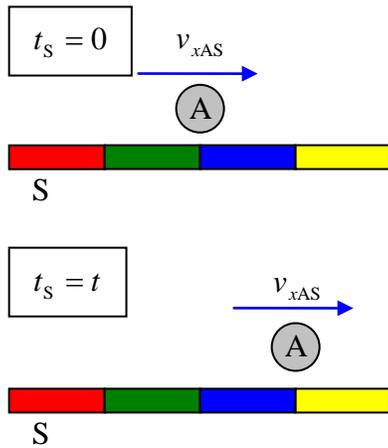
On remarque que la coordonnée  $x_B$  calculée en **(b)** par transformation de Galilée est identique la celle calculée en **(d)** par résolution de la cinématique dans le référentiel **B**.

## La relativité des vitesses

La vitesse  $v_{xAS}$  d'un objet **A** par rapport à un référentiel **S** fait référence à deux référentiels (l'objet lui-même **A** et le référentiel qui observe l'objet en mouvement **S**). Si l'on mesure la vitesse  $v_{xAA}$  de l'objet **A** par rapport à son propre référentiel **A**, alors l'objet est toujours immobile ( $v_{xAA} = 0$ ). Du point de vue du référentiel **A**, l'objet **A** est immobile et le référentiel **S** est en mouvement et vis versa. Chaque référentiel affirme que l'autre référentiel est en mouvement tel qu'illustré ci-bas :

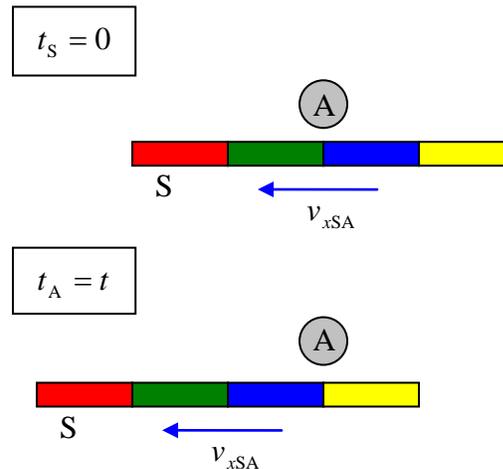
Vitesse de la balle par rapport au sol :

$v_{xAS}$  : Vitesse de **A** par rapport à **S**



Vitesse du sol par rapport à la balle :

$v_{xSA}$  : Vitesse de **S** par rapport à **A**



La relation mathématique existant entre deux vitesses relatives  $v_{xAS}$  et  $v_{xSA}$  est la suivante :

$$v_{xAS} = -v_{xSA}$$

où  $v_{xAS}$  : Vitesse de **A** par rapport à **S** (m/s)

$v_{xSA}$  : Vitesse de **S** par rapport à **A** (m/s)

## L'addition Galiléenne des vitesses relatives

À partir de la transformation des vitesses de Galilée et de la notion de vitesse relative, nous pouvons définir la règle suivante pour additionner des vitesses relatives :

$$v_{xAR} = v_{xAB} + v_{xBR}$$

où  $v_{xAR}$  : Vitesse selon l'axe  $x$  de **A** par rapport à **R** (m/s).

$v_{xAB}$  : Vitesse selon l'axe  $x$  de **A** par rapport à **B** (m/s).

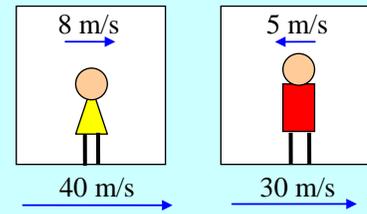
$v_{xBR}$  : Vitesse selon l'axe  $x$  de **B** par rapport à **R** (m/s).



<http://cafresnoyathle.free.fr/actualites-11-12-p4.php>

Lancer un javelot en courant permet à celui-ci d'avoir une plus grande vitesse par rapport au sol avant d'être lancé.

**Situation B : La courte retrouvaille.** Béatrice ne pouvant plus attendre son Albert, elle décide de prendre le prochain train allant dans la même direction qu'Albert. Le train d'Albert se déplace à 30 m/s (108 km/h) et le train de Béatrice se déplace à 40 m/s (144 km/h). Tout juste avant de croiser son regard, Béatrice court vers Albert à une vitesse de 8 m/s par rapport à son train et Albert court vers Béatrice à une vitesse de 5 m/s par rapport à son train. On désire évaluer la vitesse d'Albert par rapport à Béatrice.



Dans ce problème, nous pouvons utiliser 5 référentiels différents :

Référentiel 1	Béatrice
Référentiel 2	Le train de Béatrice
Référentiel 3	Le sol
Référentiel 4	Le train d'Albert
Référentiel 5	Albert

Dans le problème, nous avons les informations suivantes :

- 1) Vitesse de Albert par rapport à son train :  $v_{x54} = -5 \text{ m/s}$
- 2) Vitesse du train de Albert par rapport au sol :  $v_{x43} = 30 \text{ m/s}$
- 3) Vitesse du train de Béatrice par rapport au sol :  $v_{x23} = 40 \text{ m/s}$
- 4) Vitesse de Béatrice par rapport à son train :  $v_{x12} = 8 \text{ m/s}$

Pour évaluer la vitesse de Albert (5) par rapport à Béatrice (1), il faut évaluer la vitesse relative  $v_{x51}$ .

Voici une série de transformations nous permettant d'évaluer la vitesse relative  $v_{x51}$  :

$$1) v_{x53} = v_{x54} + v_{x43} \qquad 2) v_{x52} = v_{x53} + v_{x32} \qquad 3) v_{x51} = v_{x52} + v_{x21}$$

En combinant ces trois transformations, nous obtenons l'expression simplifiée suivante :

$$\begin{aligned}
 v_{x51} &= v_{x54} + v_{x43} + v_{x32} + v_{x21} \Rightarrow v_{x51} = (-5) + (30) + v_{x32} + v_{x21} && \text{(Remplacer valeurs connues)} \\
 &\Rightarrow v_{x51} = 25 + (-v_{x23}) + (-v_{x12}) && \text{(Utiliser } v_{xAS} = -v_{xSA} \text{)} \\
 &\Rightarrow v_{x51} = 25 - (40) - (8) && \text{(Remplacer autres valeurs)} \\
 &\Rightarrow \boxed{v_{x51} = -23 \text{ m/s}}
 \end{aligned}$$

# Les invariants de Galilée

Un invariant est une mesure dont la valeur numérique est identique pour deux référentiels. Cela signifie que si l'on mesure deux événements dans un référentiel inertiel **A** et que l'on applique la **transformation de Galilée** pour transformer les mesures des deux événements vers un autre référentiel **B**, calculer l'expression de l'invariant donnera la même valeur numérique pour le référentiel **A** et **B**.

Voici quelques invariants selon la transformation de Galilée :

Le module de la vitesse relative entre les référentielles <b>A</b> et <b>B</b>	$ v_{xAB}  =  v_{xBA} $
La durée	$T_B = T_A$
La longueur	$L_B = L_A$
La composante selon l'axe $x$ d'une force	$F_{xB} = F_{xA}$

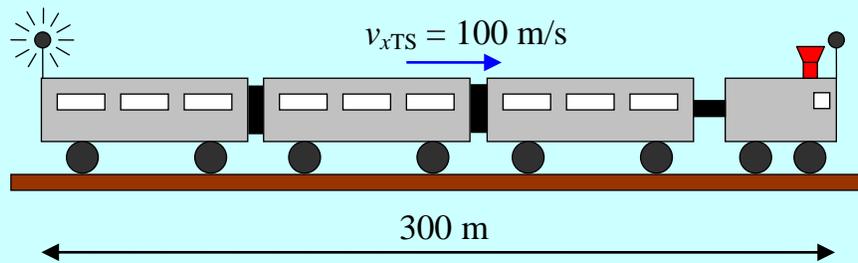
### Preuve :

- $v_{xAB} = -v_{xBA} \Rightarrow |v_{xAB}| = |-v_{xBA}|$  (Mettre valeur absolue)
   
 $\Rightarrow |v_{xAB}| = |v_{xBA}| \blacksquare$  (Simplifier)
  
- $T_B = t_{B2} - t_{B1} \Rightarrow T_B = (t_{A2}) - (t_{A1})$  (Utiliser  $t_B = t_A$ )
   
 $\Rightarrow T_B = T_A \blacksquare$  (Remplacer  $T_A$ )
  
- $L_B = x_{B2} - x_{B1} \Rightarrow L_B = (x_{A2} + v_{xAB}t_{A2}) - (x_{A1} + v_{xAB}t_{A1})$  (Utiliser  $x_B = x_A + u_{xAB}t_A$ )
   
 $\Rightarrow L_B = (x_{A2} - x_{A1}) + v_{xAB}(t_{A2} - t_{A1})$  (Factoriser  $u_{xAB}$ )
   
 $\Rightarrow L_B = D_A + v_{xAB}T_A$  (Remplacer  $D_A$  et  $T_A$ )
   
 $\Rightarrow L_B = (L_A) + v_{xAB}(0)$  ( $T_A = T_B = 0$ , car longueur)
   
 $\Rightarrow L_B = L_A \blacksquare$  (Simplifier)
  
- $F_{xB} = ma_{xB} \Rightarrow F_{xB} = m \frac{dv_{xB}}{dt_B}$  (Remplacer  $a_{xB} = dv_{xB} / dt_B$ )
   
 $\Rightarrow F_{xB} = m \frac{d}{dt_A} (v_{xA} + v_{xAB})$  (Remplacer  $v_{xB}$  et  $t_B = t_A$ )
   
 $\Rightarrow F_{xB} = m \left( \frac{dv_{xA}}{dt_A} + \frac{dv_{xAB}}{dt_A} \right)$  (Distribuer la dérivée)
   
 $\Rightarrow F_{xB} = ma_{xA}$  ( $v_{xAB}$  est constant)
   
 $\Rightarrow F_{xB} = F_{xA} \blacksquare$  (2<sup>ème</sup> loi de Newton)

## La causalité et la transformation de Galilée

La transformation de Galilée permet une propagation de la causalité à des vitesses qui dépendent du choix du référentiel. Selon la transformation de Galilée, les longueurs et les durées sont mesurées avec des valeurs identiques dans tous les référentiels (invariantes sous une transformation de Galilée). Ainsi, la vitesse d'un signal dépend du choix de l'observateur.

**Situation C : Le signal radio.** Un train super rapide (référentiel **T**) de 300 m de longueur se déplaçant à 100 m/s par rapport au sol (référentiel **S**) possède deux antennes radio à ses deux extrémités. L'antenne arrière émet le signal radio à  $3 \times 10^8$  m/s (par rapport à l'antenne) et l'antenne avant reçoit le signal. On désire évaluer la vitesse du signal radio par rapport au sol sans utiliser la transformation des vitesses de Galilée.



Évaluons le temps de voyage du signal radio selon le référentiel du train **T** :

$$\Delta x_T = v \Delta t_T \quad \Rightarrow \quad (300) = (3 \times 10^8) \Delta t_T \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta t_T = 1 \mu\text{s}}$$

Évaluons la position où sera capté le signal radio par rapport au sol **S** à partir de la transformation de Galilée de la position :

$$x_S = x_T + v_{xTS} t_T \quad \Rightarrow \quad x_S = (300) + (100)(1 \times 10^{-6}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_S = 300,0001 \text{ m}}$$

Évaluons la vitesse du signal radio par rapport au sol **S**. Il est important de rappeler que le temps de voyage du signal radio est le même dans les deux référentiels ( $\Delta t_S = \Delta t_T$ ) selon la transformée de Galilée du temps :

$$\begin{aligned} \Delta x_S &= v \Delta t_S & \Rightarrow & \quad (x_S) = v(\Delta t_T) & \quad & \text{(Remplacer } \Delta x_S = x_S, \Delta t_S = \Delta t_T) \\ & & \Rightarrow & \quad (300,0001) = v(1 \times 10^{-6}) & \quad & \text{(Remplacer valeurs numériques)} \\ & & \Rightarrow & \quad \boxed{v = 300\,000\,100 \text{ m/s}} & \quad & \text{(Évaluer la vitesse du signal radio)} \end{aligned}$$

- ❖ La vitesse du signal radio par rapport au sol **S** respect la transformation des vitesses de Galilée ( $v_{xS} = v_{xT} + v_{xTS}$  tel que  $v_{xT} = 300\,000 \text{ m/s}$  et  $v_{xTS} = 100 \text{ m/s}$ ).
- ❖ Nous réaliserons dans le **chapitre 4** que le **raisonnement** précédent basé sur les transformations de Galilée **ne s'applique pas** aux objets se déplaçant à **grande vitesse** comme la lumière. Ainsi, la transformation de Galilée n'est valide qu'à basse vitesse (approximation non-relativiste).

## La relativité de Galilée

La relativité de Galilée peut être résumée par les affirmations suivantes :

Vitesse relative $v_{xAB}$ du référentiel <b>A</b> par rapport au référentiel <b>B</b>	
Transformation de la position/déplacement selon l'axe $x$	$x_B = x_A + v_{xAB}t_A$ $\Delta x_B = \Delta x_A + v_{xAB} \Delta t_A$
Transformation de la position/déplacement selon l'axe $y$	$y_B = y_A$ $\Delta y_B = \Delta y_A$
Transformation du temps/durée	$t_B = t_A$ $\Delta t_B = \Delta t_A$
Transformation de la vitesse selon l'axe $x$	$v_{xB} = v_{xA} + v_{xAB}$
Transformation de la vitesse selon l'axe $y$	$v_{yB} = v_{yA}$
Les invariants entre le référentiel <b>A</b> et <b>B</b>	
Le module de la vitesse relative entre les référentielles <b>A</b> et <b>B</b>	$ v_{xAB}  =  v_{xBA} $
La longueur	$L_B = L_A$
La composante selon l'axe $x$ d'une force	$F_{xB} = F_{xA}$
La composante selon l'axe $y$ d'une force	$F_{yB} = F_{yA}$













# Chapitre 4.1b – L'invariance de la vitesse de la lumière

## La vitesse de la lumière et l'électromagnétisme

En 1873, James Clerk Maxwell publia une synthèse des différentes lois de l'électromagnétisme :

- L'électrostatique
- Le magnétisme
- L'induction électrique
- L'induction magnétique



J. C. Maxwell  
(1831-1879)

Cette synthèse a pris la forme de quatre équations faisant intervenir le concept de champ électrique  $\vec{E}$ , champ magnétique  $\vec{B}$ , densité de charge électrique  $\rho$  et de densité de courant électrique  $\vec{J}$ . Maxwell a également introduit le concept de « courant de déplacement » afin d'unifier le tout :

Équations de Maxwell	Avec charge et courant
Théorème de Gauss	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
Sans nom	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
Loi de Faraday	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Théorème d'Ampère	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Ces quatre équations ont permis d'évaluer théoriquement la vitesse de la lumière :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Malgré ce résultat fort intéressant, plusieurs questions demeuraient en suspens :

- ❖ Quel est le milieu de propagation de la lumière ?
- ❖ Est-ce que la vitesse de la lumière varie d'un référentiel à l'autre ?
- ❖ Est-ce que la lumière peut être transportée par un « vent » ?

## L'éther

Afin d'expliquer la propagation de la lumière, les physiciens de la fin du 19<sup>ème</sup> siècle croyaient qu'il était nécessaire de mieux comprendre le milieu de propagation de la lumière, car la lumière était une onde et qu'une onde devrait nécessairement posséder un milieu pour se propager. C'est pour cette raison que « l'éther » était au cœur de toutes ces discussions. Selon eux, la vitesse de la lumière  $c$  obtenue à partir des équations de Maxwell était celle mesurée par rapport à l'éther (milieu de propagation de la lumière) et tout objet en mouvement par rapport à l'éther devait mesurer une vitesse de la lumière différente de  $c$ .

L'éther était un milieu très spécial ayant des contradictions :

- L'éther devait être un milieu très tendu et très dense afin de permettre à la lumière de se déplacer aussi rapidement

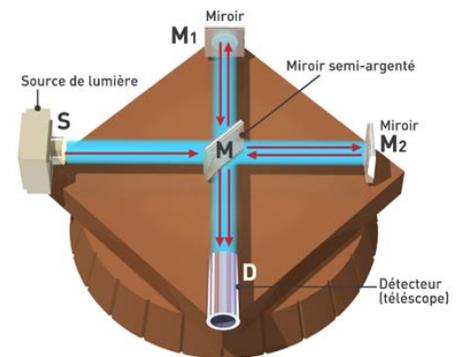
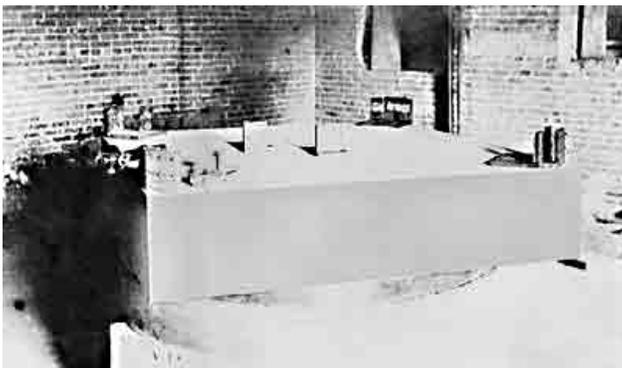
Analogie : Vitesse d'une onde dans une corde  $v = \sqrt{F / \mu}$

- L'éther devait être très fluide, car une planète se déplace dans l'espace avec une grande vitesse sans ralentissement

Analogie : Un bateau qui se déplace dans l'eau doit déplacer l'eau autour de lui ce qui provoque un ralentissement.

## L'interféromètre de Michelson-Morley

L'expérience d'Albert A. Michelson et Edward Morley (1887) avait pour but d'évaluer la **vitesse** de la **Terre par rapport à l'éther**. Si la Terre était en mouvement par rapport à l'éther, la vitesse de la lumière provenant d'une source devait subir l'influence d'un « vent »<sup>1</sup>. C'est pourquoi l'appareil était conçu pour faire voyager de la lumière dans le sens du « vent » et dans un sens perpendiculaire au « vent ». Puisque la lumière devait effectuer deux trajets de même distance avec des vitesses différentes, une interférence causée par une différence de marche devait être observée au détecteur. Malheureusement, cette observation ne fut pas réalisée et l'expérience fut considérée comme un échec.



<sup>1</sup> On peut définir le « vent » comme la vitesse d'un milieu qui transporte des ondes.

## Le conflit entre Galilée et l'électromagnétisme

En plus des observations effectuées grâce à l'expérience de Michelson-Morley, un problème mathématique était toujours présent :

*Les équations de Maxwell ne sont pas invariantes sous une transformation de Galilée.*

Cette remarque implique que :

*Un expérimentateur qui effectue une mesure d'un phénomène électromagnétique dans son référentiel n'obtient pas les mêmes résultats après une transformation de Galilée qu'un autre expérimentateur qui effectue la même mesure, mais dans un autre référentiel.*

## La transformation particulière de l'électromagnétisme

Afin de régler la question de la transformation des équations de Maxwell, Hendrix Antoon Lorentz a dérivé une nouvelle forme de transformation (transformation de Lorentz) rendant invariante les équations de Maxwell. Cette nouvelle transformation avait des conséquences très inattendues :

- 1) La vitesse de la lumière est une constante pour tous les référentiels inertiels.
- 2) Les distances ne se transforment plus de la même façon.

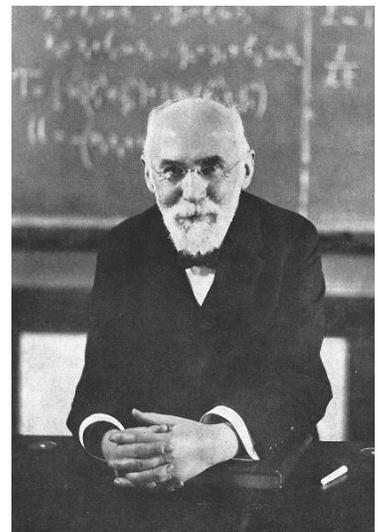
$$D_B \neq D_A + u_{xAB} T_A$$

- 3) Les longueurs ne se transforment plus de la même façon.

$$L_B \neq L_A$$

- 4) Les durées ne se transforment plus de la même façon.

$$T_B \neq T_A$$



H.A. Lorentz  
(1853-1928)

Il est important de remarquer que la transformation de Lorentz est identique à la transformation de Galilée lorsque la vitesse relative  $u_{xAB}$  est faible par rapport à la vitesse de la lumière ( $u_{xAB} \ll c$ ). On peut donc affirmer que la transformation de Galilée est une approximation à basse vitesse de la transformation de Lorentz.

Ces nouveaux résultats contre intuitifs mènent au dilemme suivant :

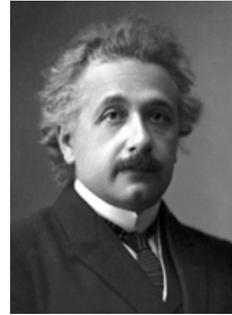
*Les équations de Maxwell sont bonnes et la transformation la plus complète et la plus générale est celle de Lorentz.*

ou

*Les équations de Maxwell sont erronées et la transformation de Galilée est toujours vraie quelque soit la vitesse du référentiel.*

# Albert Einstein et les deux postulats de la relativité

Malgré le travail exceptionnel de Lorentz, plusieurs questions demeuraient sans réponses et les explications étaient insatisfaisantes. En 1905, Albert Einstein publia un 3<sup>ième</sup> article sur la relativité restreinte basée sur la transformation de Lorentz et les résultats de l'expérience de Michelson-Morley. Il fut en mesure de décrire qualitativement et quantitativement la physique dans n'importe quel référentiel sans l'intervention de « l'éther » si l'on acceptait le fait que la lumière était un invariant (la vitesse de la lumière est constante quelque soit le choix du référentiel). Sa théorie faisait intervenir les deux postulats.



Albert Einstein  
(1879-1955)

## Postulats 1 : Principe de relativité

Les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels.

## Postulats 2 : L'invariance de la vitesse de la lumière

La vitesse de la lumière dans le vide est égale à  $c$  dans tous les référentiels inertiels. Elle ne dépend pas du mouvement de la source ni de l'observateur.

Ces deux postulats ont eux les conséquences suivantes :

- 1) Il n'y a pas « d'éther ». La lumière voyage dans le vide et elle interagit avec la matière.
- 2) La lumière se déplace à une vitesse qui est égale à  $c$  quel que soit le choix du référentiel.
- 3) Le temps est relatif. L'écoulement du temps entre deux événements dépend du choix du référentiel (*dilatation du temps : Chapitre 4.2*).
- 4) L'espace est relatif. La distance entre deux événements dépend du choix du référentiel (*contraction des longueurs : Chapitre 4.3*).
- 5) La simultanéité est relative. Le moment d'un événement dépend du choix du référentiel (*relativité de la simultanéité : Chapitre 4.4*).

Maintenant, le concept de mesure est entièrement relatif au choix du référentiel :

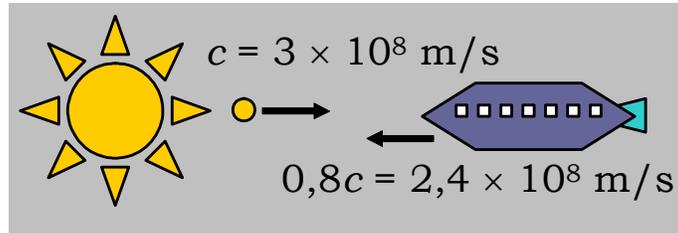
Galilée (Mécanique Newtonienne)	Einstein (Mécanique relativiste)
<ul style="list-style-type: none"><li>• Temps (absolu)</li><li>• Espace (absolu)</li><li>• Vitesse de la lumière (relative)</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Temps (relatif)</li><li>• Espace (relatif)</li><li>• Vitesse de la lumière (absolue)</li></ul>

## La vitesse de la lumière et deux objets en mouvement

La vitesse de la lumière doit toujours être égale à  $c$  par rapport à un référentiel inertiel. Cependant, la vitesse relative de la lumière par rapport à un objet en mouvement d'après un référentiel inertiel qui n'est pas l'objet lui-même peut être différente de  $c$ .

Considérons la situation suivante :

Un vaisseau spatial fonce vers le Soleil avec une vitesse de  $0,8c$  et rencontre un faisceau de lumière qui fonce vers le vaisseau à vitesse  $c$ .



Dans le référentiel du Soleil :

- Le Soleil est immobile.
- Le vaisseau fonce vers le Soleil avec une vitesse égale à  $0,8c$ .
- Le faisceau de lumière quitte le Soleil avec une vitesse égale à  $c$ .
- *Par rapport au Soleil*, la vitesse relative de rapprochement du vaisseau et du faisceau de lumière est égale à  $c + 0,8c = 1,8c$ .

Dans le référentiel du vaisseau :

- Le vaisseau est immobile.
- Le Soleil fonce vers le vaisseau avec une vitesse égale à  $0,8c$ .
- Le faisceau de lumière fonce vers le vaisseau avec une vitesse égale à  $c$ .
- *Par rapport au vaisseau*, la vitesse relative d'éloignement du Soleil et du faisceau de lumière est égale à  $c - 0,8c = 0,2c$ .







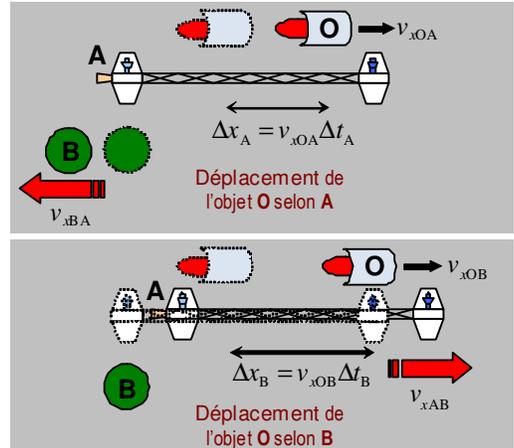
# Chapitre 4.2SP – Les transformations de l'espace-temps en relativité restreinte

## La transformation de Lorentz du déplacement

La transformation de Lorentz du déplacement permet de transformer un déplacement  $\Delta x_A$  effectué à un objet **O** mesuré par un référentiel **A** en de déplacement  $\Delta x_B$  par rapport à un référentiel **B** sachant que le référentiel **A** est en mouvement à vitesse relative  $v_{xAB}$  par rapport **B**. Cette règle de transformation de « Galilée modifiée » permet de rendre la vitesse de la lumière invariante dans le référentiel **A** et **B** :

$$\Delta x_B = \gamma_{AB} (\Delta x_A + v_{xAB} \Delta t_A)$$

tel que  $\gamma_{AB} = 1 / \sqrt{1 - v_{xAB}^2 / c^2}$



- où
- $\Delta x_A$  : Distance entre les deux événements mesurée dans le référentiel **A** (m)
  - $\Delta x_B$  : Distance entre les deux événements mesurée dans le référentiel **B** (m)
  - $\Delta t_A$  : Intervalle de temps entre les deux événements dans le référentiel **A** (s)
  - $\Delta t_B$  : Intervalle de temps entre les deux événements dans le référentiel **B** (s)
  - $v_{xAB}$  : Vitesse relative du référentiel **A** par rapport au référentiel **B** (m/s)
  - $\gamma_{AB}$  : Facteur de Lorentz ( $\gamma_{AB} = 1 / \sqrt{1 - v_{xAB}^2 / c^2}$ ,  $v^2 = v_{xAB}^2 = v_{xBA}^2$ ,  $\gamma_{AB} = \gamma_{BA}$ )

**P.S.** Le **signe** associé de la **vitesse**  $v_{xAB}$  est **très important**, car il précise le **sens** de la **vitesse**.

- ❖ Référentiel **A** se déplace dans le **sens positif** de l'**axe x** par rapport à **B**, alors  $v_{xAB}$  est **positif**.
- ❖ Référentiel **A** se déplace dans le **sens négatif** de l'**axe x** par rapport à **B**, alors  $v_{xAB}$  est **négatif**.

Preuve :

À partir des transformations de Galilée

$$\Delta x_B = \Delta x_A + v_{xAB} \Delta t_A \quad \text{et} \quad \Delta x_A = \Delta x_B + v_{xBA} \Delta t_B,$$

effectuons l'expérience de la **cinétique de la lumière** le long d'un axe  $x$  en appliquant le **2<sup>ème</sup> postulat de la relativité restreinte** signifiant que la **lumière se déplace toujours à une vitesse constante  $c$  dans n'importe quel référentiel** qui observe la cinématique de la lumière (vitesse de la lumière est un invariant).

Puisque la vitesse de la lumière est égale à  $c$  dans nos deux référentiels **A** et **B**, nous pouvons remplacer le déplacement  $\Delta x = c\Delta t$  dans nos transformations de Galilée qui prendrons la forme de

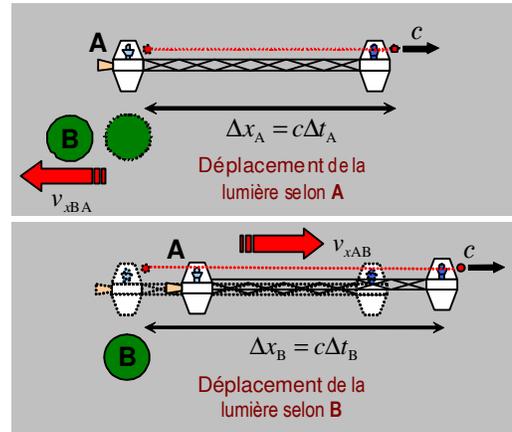
$$c\Delta t_B = \Delta x_A + v_{xAB}\Delta t_A$$

et

$$c\Delta t_A = \Delta x_B + v_{xBA}\Delta t_B \quad ,$$

car

$$c = \frac{\Delta x_A}{\Delta t_A} = \frac{\Delta x_B}{\Delta t_B} \quad .$$



Effectuons le rapport de nos deux transformations de Galilée :

$$\frac{c\Delta t_B}{c\Delta t_A} = \frac{\Delta x_A + v_{xAB}\Delta t_A}{\Delta x_B + v_{xBA}\Delta t_B} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta t_B}{\Delta t_A} = \frac{\Delta x_A + v_{xAB}\Delta t_A}{\Delta x_B + v_{xBA}\Delta t_B} \quad \text{(Simplifier } c)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta t_B}{\Delta t_A} = \frac{\Delta t_A}{\Delta t_B} \frac{\Delta x_A / \Delta t_A + v_{xAB}}{\Delta x_B / \Delta t_B + v_{xBA}} \quad \text{(Factoriser } \Delta t_A \text{ et } \Delta t_B)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta t_B}{\Delta t_A} = \frac{\Delta t_A}{\Delta t_B} \frac{c + v_{xAB}}{c + v_{xBA}} \quad \text{(} c = \Delta x_A / \Delta t_A = \Delta x_B / \Delta t_B)$$

$$\Rightarrow \Delta t_B^2 = \frac{c + v_{xAB}}{c + v_{xBA}} \Delta t_A^2 \quad \text{(Regrouper terme } \Delta t_A \text{ et } \Delta t_B)$$

$$\Rightarrow \Delta t_B^2 = \frac{c + v_{xAB}}{c - v_{xAB}} \Delta t_A^2 \quad \text{(} v_{xBA} = -v_{xAB})$$

$$\Rightarrow \Delta t_B = \sqrt{\frac{c + v_{xAB}}{c - v_{xAB}}} \Delta t_A \quad \text{(Effectuer la racine)}$$

À partir de la cette relation, nous réalisons que  $\Delta t_B \neq \Delta t_A$  sauf si  $v_{xAB} \ll c$ . Puisque la transformation de Galilée du temps exige que  $\Delta t_B = \Delta t_A$  en mécanique classique<sup>1</sup>, la vitesse de la **lumière n'est pas un invariant sous une transformation de Galilée** en mécanique relativiste<sup>2</sup>.

Ainsi, la transformation de Galilée on ne peut pas accepter que

$$c = \frac{\Delta x_A}{\Delta t_A} = \frac{\Delta x_B}{\Delta t_B} \quad \text{tel que} \quad \Delta t_B = \sqrt{\frac{c + v_{xAB}}{c - v_{xAB}}} \Delta t_A$$

tout en appliquant la règle de transformation des déplacements

$$\Delta x_B = \Delta x_A + v_{xAB}\Delta t_A \quad \text{et} \quad \Delta x_A = \Delta x_B + v_{xBA}\Delta t_B \quad .$$

<sup>1</sup> La mécanique classique s'applique à basse vitesse comparativement à la vitesse de la lumière ( $v_{xAB} \ll c$ ).

<sup>2</sup> La mécanique relativiste s'applique à haute vitesse comparativement à la vitesse de la lumière ( $v_{xAB} < c$ ).

Puisque nous avons modifié la règle de transformation du temps ( $\Delta t_B \neq \Delta t_A$ ) pour satisfaire l'invariance de la vitesse de la lumière, nous devons également modifier la règle de transformation du déplacement. Afin de solutionner cette impasse, proposons une « expression alternative » à la transformation de Galilée portant le nom de **transformation de Lorentz du déplacement** sous la forme

$$\Delta x_B = \gamma_{AB}(\Delta x_A + v_{xAB}\Delta t_A) \quad \text{et} \quad \Delta x_A = \gamma_{BA}(\Delta x_B + v_{xBA}\Delta t_B) \quad \text{tel que} \quad \gamma_{AB} = \gamma_{BA} = \gamma$$

ce qui ajoute une constante  $\gamma$  portant le nom de **facteur de Lorentz**. Pour déterminer  $\gamma$ , utilisons la vitesse de la lumière dans le référentiel **B** et transformons les mesures de  $\Delta x_B$  et  $\Delta t_B$  vers le référentiel **A** afin d'évaluer l'expression de  $\gamma$  requise :

$$c = \frac{\Delta x_B}{\Delta t_B} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{\Delta x_B}{\sqrt{\frac{c + v_{xAB}}{c - v_{xAB}} \Delta t_A}} \quad (\text{Remplacer } \Delta t_B = \sqrt{\frac{c + v_{xAB}}{c - v_{xAB}} \Delta t_A})$$

$$\Rightarrow \quad c = \frac{\gamma(\Delta x_A + v_{xAB}\Delta t_A)}{\sqrt{\frac{c + v_{xAB}}{c - v_{xAB}} \Delta t_A}} \quad (\text{Remplacer } \Delta x_B = \gamma(\Delta x_A + v_{xAB}\Delta t_A))$$

$$\Rightarrow \quad c = \frac{\Delta t_A}{\Delta t_A} \frac{\gamma(\Delta x_A / \Delta t_A + v_{xAB})}{\sqrt{\frac{c + v_{xAB}}{c - v_{xAB}}}} \quad (\text{Factoriser } \Delta t_A)$$

$$\Rightarrow \quad c = \frac{\gamma(c + v_{xAB})}{\sqrt{\frac{c + v_{xAB}}{c - v_{xAB}}}} \quad (\text{Imposer } c = \frac{\Delta x_A}{\Delta t_A} \text{ et simplifier } \Delta t_A)$$

$$\Rightarrow \quad c = \gamma \sqrt{c + v_{xAB}} \sqrt{c - v_{xAB}} \quad (\text{Simplifier les racines})$$

$$\Rightarrow \quad c^2 = \gamma^2 (c + v_{xAB})(c - v_{xAB}) \quad (\text{Mettre au carré})$$

$$\Rightarrow \quad c^2 = \gamma^2 (c^2 - v_{xAB}^2) \quad (\text{Distribution})$$

Pour que l'égalité puisse être possible et ainsi permettre à la lumière de voyager à la vitesse  $c$  dans les référentiels **A** et **B**, nous devons définir le facteur  $\gamma$  tel que

$$\gamma^2 = \frac{c^2}{c^2 - v_{xAB}^2} .$$

Il peut être réécrit sous la forme suivante :

$$\gamma^2 = \frac{c^2}{c^2 - v_{xAB}^2} \quad \Rightarrow \quad \gamma^2 = \frac{1}{1 - v_{xAB}^2 / c^2} \quad (\text{Diviser par } c^2)$$

$$\Rightarrow \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{xAB}^2 / c^2}} \quad \blacksquare \quad (\text{Appliquer la racine carrée})$$

## Le facteur de Lorentz

Le facteur de Lorentz  $\gamma$  est un facteur permettant d'effectuer des transformations relativistes entre un référentiel **A** se déplaçant à une vitesse relative  $v$  par rapport à un référentiel **B** :

Expression exacte	Approximation à basse vitesse ( $\beta \ll 1$ )
$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{tel que} \quad \beta = \frac{v}{c}$	$\gamma \approx 1 + \frac{1}{2}\beta^2$

où  $\gamma$  : Facteur de Lorentz avec vitesse relative entre le référentiel A et B

$v$  : Vitesse du référentiel B par rapport à A (m/s)

$c$  : Vitesse de la lumière ( $3 \times 10^8$  m/s)

$\beta$  : Fraction de la vitesse de la lumière ( $\beta = v/c$ )

Preuve :

Effectuons le développement en série de Taylor du facteur de Lorentz et conservons uniquement les deux premiers termes de la série :

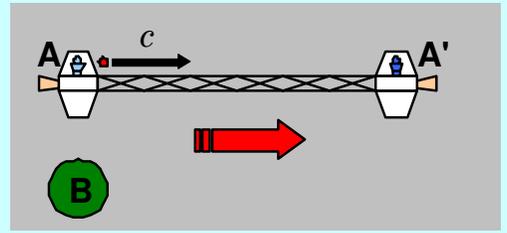
$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} &\Rightarrow & \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} && \text{(Mettre l'exposant en haut)} \\ & &\Rightarrow & \gamma \approx 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\beta^2 && \text{(Approximation : } (1-x)^n \approx 1 - nx, x \ll 1, x = \beta^2) \\ & &\Rightarrow & \gamma \approx 1 + \frac{1}{2}\beta^2 && \blacksquare \text{ (Simplification du signe négatif)} \end{aligned}$$

## Ordre de grandeur du facteur de Lorentz

Voici un tableau décrivant la correction relativiste à apporter à des mesures d'objets en mouvement :

Objet en mouvement	Vitesse	$\beta = v/c$	$\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$
Marche humaine	8 km/h	0,000 000 007	1,000 000 000
Son	333 m/s	0,000 001 11	1,000 000 000
Lune autour de la Terre	1000 m/s	0,000 003 33	1,000 000 000
Vitesse libération de la Terre	11,2 km/s	0,000 037	1,000 000 001
Pioneer 10 (sonde voyageur)	14,4 km/s	0,000 048	1,000 000 001
Soleil à l'intérieur de la Galaxie	$2,1 \times 10^5$ m/s	0,000 70	1,000 000 245
Électron dans un tube de TV	$9 \times 10^7$ m/s	0,3	1,05
Muons au CERN	$2,996 \times 10^8$ m/s	0,999 4	28,87

**Situation A : Le signal lumineux de l'Altair, partie 1.** Le vaisseau spatial *Altair* ayant une longueur de 9 km (par rapport à l'*Altair*) émet un signal de lumière de communication de l'arrière du vaisseau vers l'avant du vaisseau. Selon la planète *B450* qui observe l'*Altair* s'éloigner à une vitesse relative de  $0,6c$ , on désire déterminer le déplacement  $\Delta x_B$  du signal de lumière.



La situation physique à résoudre est la cinématique de la lumière que l'on peut identifier à l'aide de deux événements :

Référentiel	Événement
<b>A : Altair</b>	<b>E1</b> : Émission du signal de lumière à l'arrière de l' <i>Altair</i> (A).
<b>B : Planète B450</b>	<b>E2</b> : Réception du signal de lumière à l'avant de l' <i>Altair</i> (A').

Si l'on considère que le signal de lumière se déplace dans le sens positif de l'axe  $x$ , nous pouvons établir la vitesse relative suivante entre nos deux référentiels :

$$v_{xAB} = 0,6c \quad \text{et} \quad v_{xBA} = -0,6c$$

Voici la description de la situation dans nos deux référentiels :

	Événement E1		Événement E2	
A	<p style="text-align: center;">Événement E1</p>		<p style="text-align: center;">Événement E2</p>	
	$\Delta x_A = 9 \text{ km}$	$\Delta t_A = ?$	$L_A = 9 \text{ km}$	
B	<p style="text-align: center;">Événement E1</p>		<p style="text-align: center;">Événement E2</p>	
	$\Delta x_B = ?$	$\Delta t_B = ?$	$L_B = ?$	
Relation AB	$v_{xAB} = 0,6c$	$v_{xBA} = -0,6c$	$\gamma_{AB} = \gamma_{BA} = ?$	

Évaluons le temps  $\Delta t_A$  requis pour effectuer le déplacement de la lumière dans le référentiel **A** étant donné que nous avons la distance parcourue  $\Delta x_A = 9 \text{ km}$  et la vitesse de la lumière  $c$  :

$$\begin{aligned} \Delta x_A = v_A \Delta t_A &\Rightarrow \Delta x_A = (c) \Delta t_A && (v_A = c, \text{ invariant}) \\ &\Rightarrow (9 \times 10^3) = (3 \times 10^8) \Delta t_A && (\text{Valeurs num.}) \\ &\Rightarrow \boxed{\Delta t_A = 30 \text{ } \mu\text{s}} && (\text{Évaluer } \Delta t_A) \end{aligned}$$

Évaluons le facteur de Lorentz  $\gamma_{AB}$  à partir de  $v_{xAB}$  :

$$\begin{aligned} \gamma_{AB} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{xAB}^2 / c^2}} &\Rightarrow \gamma_{AB} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0,6c)^2 / c^2}} && (\text{Valeurs num.}) \\ &\Rightarrow \boxed{\gamma_{AB} = 1,25} && (\text{Évaluer } \gamma_{AB}) \end{aligned}$$

À partir de la transformation de Lorentz du déplacement, évaluons le déplacement  $\Delta x_B$  de la lumière selon le référentiel **B** :

$$\begin{aligned} \Delta x_B = \gamma_{AB} (\Delta x_A + v_{xAB} \Delta t_A) &\Rightarrow \Delta x_B = (1,25) ((9 \times 10^3) + (0,6c)(30 \times 10^{-6})) && (\text{Valeurs num.}) \\ &\Rightarrow \boxed{\Delta x_B = 18 \text{ km}} && (\text{Évaluer } \Delta x_B) \end{aligned}$$

## La transformation de Lorentz du temps

La transformation de Lorentz du temps permet de transformer un intervalle de temps  $\Delta t_A$  entre deux événements mesuré par un référentiel **A** en un intervalle de temps  $\Delta t_B$  par rapport à un référentiel **B** sachant que le référentiel **A** est en mouvement à vitesse relative  $v_{xAB}$  par rapport **B** :

$$\Delta t_B = \gamma_{AB} \left( \Delta t_A + \frac{v_{xAB} \Delta x_A}{c^2} \right) \quad \text{tel que} \quad \gamma_{AB} = 1 / \sqrt{1 - v_{xAB}^2 / c^2}$$

où  $\Delta x_A$  : Distance entre les deux événements mesurée dans le référentiel **A** (m)

$\Delta x_B$  : Distance entre les deux événements mesurée dans le référentiel **B** (m)

$\Delta t_A$  : Intervalle de temps entre les deux événements dans le référentiel **A** (s)

$\Delta t_B$  : Intervalle de temps entre les deux événements dans le référentiel **B** (s)

$v_{xAB}$  : Vitesse relative du référentiel **A** par rapport au référentiel **B** (m/s)

$\gamma_{AB}$  : Facteur gamma ( $\gamma_{AB} = 1 / \sqrt{1 - v_{xAB}^2 / c^2}$ ,  $v^2 = v_{xAB}^2 = v_{xBA}^2$ ,  $\gamma_{AB} = \gamma_{BA}$ )

Preuve :

À partir de nos deux transformations de Lorentz du déplacement

$$\Delta x_B = \gamma(\Delta x_A + v_{xAB} \Delta t_A) \quad \text{et} \quad \Delta x_A = \gamma(\Delta x_B + v_{xBA} \Delta t_B),$$

isolons le terme  $\Delta x_B$  de la seconde équation ce qui nous donne rapidement

$$\Delta x_B = \frac{\Delta x_A}{\gamma} - v_{xBA} \Delta t_B.$$

Égalisons les deux équations de  $\Delta x_B$  et isolons  $\Delta t_B$  ce qui nous permettra ainsi de construire notre transformation du temps :

$$\frac{\Delta x_A}{\gamma} - v_{xBA} \Delta t_B = \gamma(\Delta x_A + v_{xAB} \Delta t_A) \quad (\text{Égalité de } \Delta x_B)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta x_A}{\gamma} + v_{xAB} \Delta t_B = \gamma(\Delta x_A + v_{xAB} \Delta t_A) \quad (v_{xBA} = -v_{xAB})$$

$$\Rightarrow \Delta t_B = \frac{1}{v_{xAB}} \left[ \gamma(\Delta x_A + v_{xAB} \Delta t_A) - \frac{\Delta x_A}{\gamma} \right] \quad (\text{Isoler } \Delta t_B)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta t_B = \frac{\gamma}{v_{xAB}} \left[ \Delta x_A + v_{xAB} \Delta t_A - \frac{\Delta x_A}{\gamma^2} \right]} \quad (\text{Factoriser } \gamma)$$

Nous pouvons remplacer l'expression  $\gamma^2$  par

$$\gamma^2 = \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v_{xAB}^2 / c^2}} \right)^2 = \frac{1}{1 - v_{xAB}^2 / c^2} = \frac{c^2}{c^2 - v_{xAB}^2}.$$

En remplaçant  $\gamma^2$ , nous obtenons l'expression suivante :

$$\Delta t_B = \frac{\gamma}{v_{xAB}} \left[ \Delta x_A + v_{xAB} \Delta t_A - \frac{\Delta x_A}{\gamma^2} \right] \quad (\text{Équation précédente})$$

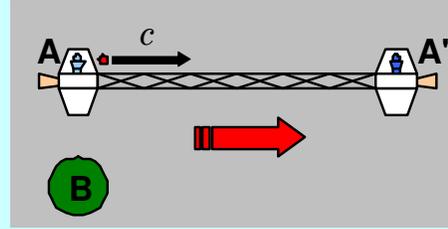
$$\Rightarrow \Delta t_B = \frac{\gamma}{v_{xAB}} \left[ \Delta x_A + v_{xAB} \Delta t_A - \frac{\Delta x_A (c^2 - v_{xAB}^2)}{c^2} \right] \quad (\text{Remplacer } \gamma^2 = \frac{c^2}{c^2 - v_{xAB}^2})$$

$$\Rightarrow \Delta t_B = \frac{\gamma}{v_{xAB}} \left[ \frac{\Delta x_A c^2 + v_{xAB} \Delta t_A c^2 - \Delta x_A c^2 + \Delta x_A v_{xAB}^2}{c^2} \right] \quad (\text{Distribuer et dénominateur commun})$$

$$\Rightarrow \Delta t_B = \frac{\gamma}{v_{xAB}} \left[ \frac{v_{xAB} \Delta t_A c^2 + \Delta x_A v_{xAB}^2}{c^2} \right] \quad (\text{Simplifier terme } \Delta x_A c^2)$$

$$\Rightarrow \Delta t_B = \gamma \left( \Delta t_A + \frac{v_{xAB} \Delta x_A}{c^2} \right) \quad \blacksquare \quad (\text{Simplifier } v_{xAB} \text{ et } c^2)$$

**Situation B : Le signal lumineux de l'Altair, partie 2.** Le vaisseau spatial *Altair* ayant une longueur de 9 km (par rapport à l'*Altair*) émet un signal de lumière de communication de l'arrière du vaisseau vers l'avant du vaisseau. Selon la planète *B450* qui observe l'*Altair* s'éloigner à une vitesse relative de  $0,6c$ , on désire (a) la durée  $\Delta t_B$  du déplacement du signal de lumière et (b) vérifier que la lumière s'est bien déplacée à vitesse  $c$ .



À partir des résultats de la **situation A**, rappelons les mesures obtenues :

	Événement E1		Événement E2	
A				
	$\Delta x_A = 9 \text{ km}$	$\Delta t_A = \frac{\Delta x_A}{c} = 30 \text{ } \mu\text{s}$ (obtenu en A)	$L_A = 9 \text{ km}$	
B				
	$\Delta x_B = 18 \text{ km}$ (obtenu en A)	$\Delta t_B = ?$	$L_B = ?$	
Relation AB	$v_{xAB} = 0,6c$	$v_{xBA} = -0,6c$	$\gamma_{AB} = \gamma_{BA} = 1,25$ (obtenu en A)	

À partir de la transformation de Lorentz du temps, évaluons la durée  $\Delta t_B$  du déplacement de la lumière selon le référentiel **B** :

$$\Delta t_B = \gamma \left( \Delta t_A + \frac{v_{xAB} \Delta x_A}{c^2} \right) \Rightarrow \Delta t_B = (1,25) \left( (30 \times 10^{-6}) + \frac{(0,6c)(9 \times 10^3)}{c^2} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta t_B = 60 \text{ } \mu\text{s}} \quad \text{(a)}$$

Évaluons la vitesse du signal de lumière dans le référentiel **B** à partir du déplacement  $\Delta x_B$  et de la durée  $\Delta t_B$  et vérifions que cette vitesse est égale à  $c$  :

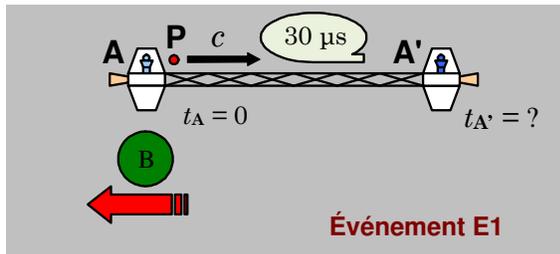
$$v_{xB} = \frac{\Delta x_B}{\Delta t_B} \Rightarrow v_{xB} = \frac{(18 \times 10^3)}{(60 \times 10^{-6})}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{xB} = c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}} \quad \text{(b)}$$

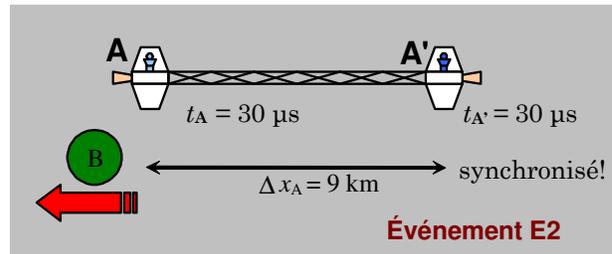
## La synchronisation et le défaut de synchronisation

Illustrons un mécanisme de synchronisation des horloges d'un vaisseau (l'*Altair*) de 9 km en mouvement à une vitesse de  $0,6c$  par rapport à une planète (*B450*).

Selon l'*Altair*, la synchronisation est réussie grâce à l'envoi d'un message «  $30 \mu\text{s}$  » voyageant à la vitesse de la lumière précisant le réglage de l'horloge lorsqu'elle captera le message.

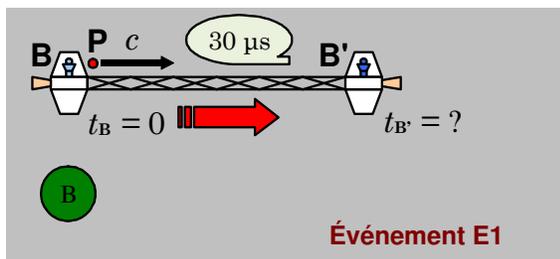


- Initialisation de l'horloge A à  $0 \mu\text{s}$ .
- L'horloge A' est indéterminée.

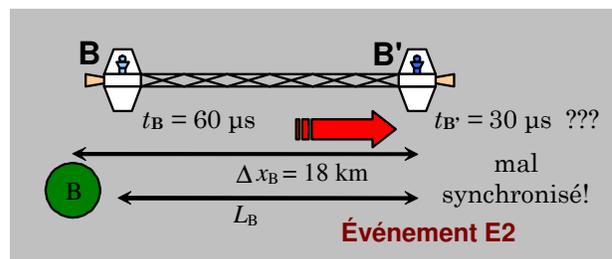


- L'horloge A indique maintenant  $30 \mu\text{s}$ .
- Initialisation de l'horloge A' à  $30 \mu\text{s}$ .

Selon la planète *B450*, la synchronisation est un échec parce que le message de «  $30 \mu\text{s}$  » n'est pas bon. Puisque la lumière prend plus de temps à voyager selon la planète, les horloges du référentiel A selon B sont mal synchronisées.



- Initialisation de l'horloge B à  $0 \mu\text{s}$ .
- L'horloge B' est indéterminée.



- L'horloge B indique maintenant  $60 \mu\text{s}$ .
- Initialisation de l'horloge B' à  $30 \mu\text{s}$ .

Ainsi, avant que A transforme son écoulement de temps pour B, le référentiel A doit ajouter une correction de synchronisation pour B puisque B interprète A avec une désynchronisation dont l'ampleur augmente avec l'espace  $\Delta x_A$  par selon l'expression du **défaut de synchronisation**

$$\tau_A = \frac{v_{xAB} \Delta x_A}{c^2}$$

ce qui donne dans l'exemple

$$\tau_A = \frac{(0,6c)(9 \text{ km})}{c^2} = 18 \mu\text{s} .$$

Pour avoir la synchronisation selon la planète *B450*, il faudra effectuer la transformation du temps en incluant le défaut de synchronisation de A perçu par B

$$\Delta t_B = \gamma_{AB} (\Delta t_A + \tau_A)$$

ce qui donne dans cet exemple

$$\Delta t_B = (1,25)((30 \mu\text{s}) + (18 \mu\text{s})) = 60 \mu\text{s} .$$

## La relativité de la simultanéité

Selon la transformation de Lorentz du temps, si **deux événements** espacés par une distance  $\Delta x_A$  sont effectués **simultanément** ( $\Delta t_A = 0$ , comme la mesure d'une longueur) par rapport à un référentiel **A**, ces deux événements **ne seront plus simultanés** pour un référentiel **B** en mouvement  $v_{xBA}$  par rapport à **A**, car avec la transformation de Lorentz du temps

$$\Delta t_B = \gamma_{AB} \left( \Delta t_A + \frac{v_{xAB} \Delta x_A}{c^2} \right),$$

nous obtenons

$$\Delta t_B = \gamma_{AB} \frac{v_{xAB} \Delta x_A}{c^2} \quad \text{lorsque} \quad \Delta t_A = 0.$$

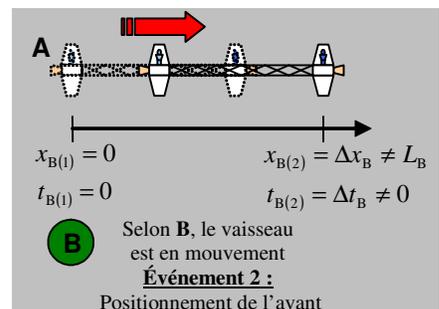
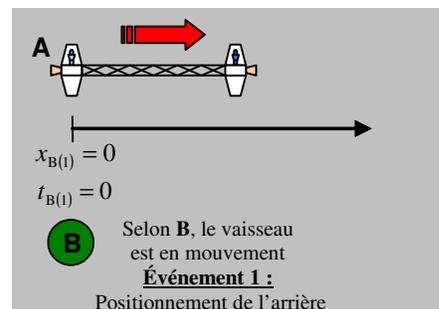
Pour illustrer le tout, imaginons que l'on mesure la distance  $\Delta x_A$  entre l'avant et l'arrière d'un vaisseau **A** simultanément dans le référentiel du vaisseau **A** afin d'en évaluer la longueur ( $\Delta x_A = L_A$ ). Pour un référentiel **B** observant le vaisseau se déplacer à une vitesse relative  $v_{xAB}$  par rapport à **B** dans le sens positif de l'axe  $x$ , on peut positionner l'arrière du vaisseau à la coordonnée  $x_{B(1)} = 0$  à un temps  $t_{B(1)} = 0$  et positionner l'avant du vaisseau à la coordonnée

$$x_{B(2)} = \Delta x_B = \gamma_{AB} (\Delta x_A + v_{xAB} \Delta t_A) = \gamma_{AB} \Delta x_A$$

à un temps

$$t_{B(2)} = \Delta t_B = \gamma_{AB} \frac{v_{xAB} \Delta x_A}{c^2}.$$

Ces deux positions n'étant plus simultanées ( $\Delta t_B \neq 0$ ) selon **B**, la distance  $\Delta x_B$  entre ces deux positions ne représente donc plus une longueur ( $\Delta x_B \neq L_B$ ).



## La longueur propre

Une **longueur**  $L$  est une mesure de distance entre deux événements simultanés ( $\Delta t = 0$ ) par rapport à un référentiel. On utilise la longueur pour définir la taille d'un objet.

Une **longueur propre**  $L_0$  est une longueur tel que l'objet défini par cette longueur est **immobile** par rapport au référentiel. Un référentiel qui mesure la longueur propre d'un objet mesure toujours la plus grande longueur de l'objet possible.

Notation mathématique : longueur propre =  $L_0$

Unité (mètre) :  $[L_0] = \text{m}$

Référence : Marc Séguin, Physique XXI Tome C  
 Note de cours rédigée par : Simon Vézina



<https://fr.wikipedia.org/wiki/Gratte-ciel>

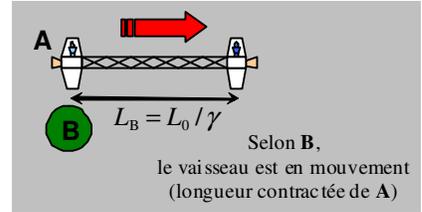
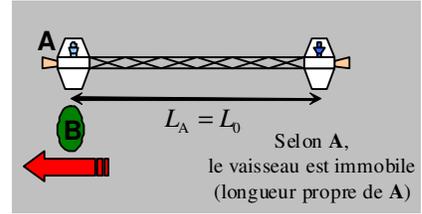
Un gratte-ciel immobile par rapport à un observateur possède une longueur propre.

# La contraction des longueurs propres

La contraction d'une longueur  $L$  s'applique lorsque l'on veut transformer une longueur propre  $L_0$  d'un objet vers un référentiel qui observe l'objet en mouvement à vitesse relative  $v$  par rapport à lui. La contraction des longueur s'effectue uniquement dans le sens de la vitesse relative :

$$L = L_0 / \gamma$$

- où  $L$  : Longueur de l'objet en mouvement par rapport à un référentiel (m).
- $\gamma$  : Facteur de Lorentz ( $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ ).
- $L_0$  : Longueur propre (m).
- $v$  : Vitesse relative entre les deux référentiels (m/s).



## Preuve :

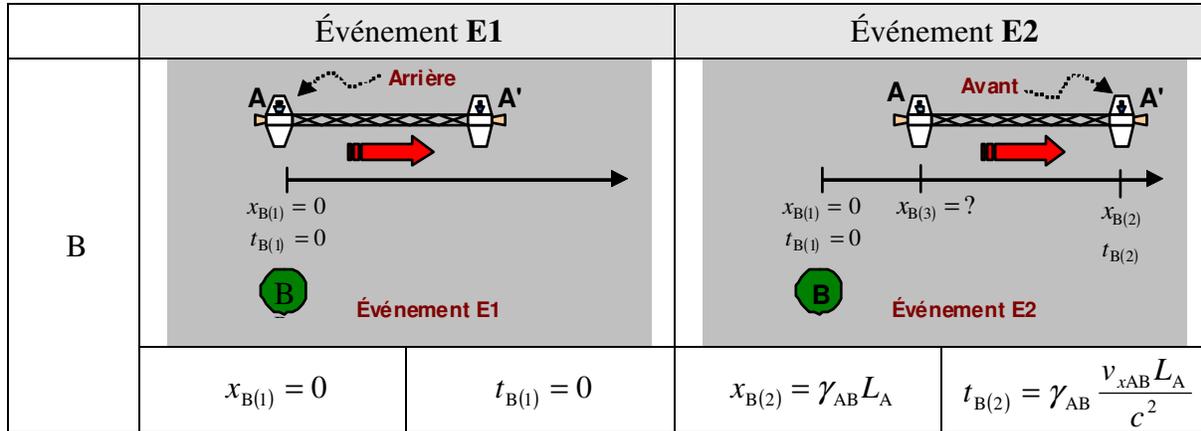
Considérons un vaisseau spatial **A** de longueur propre  $L_A$  se déplaçant à une vitesse relative  $v_{xAB}$  par rapport à un référentiel **B** tel qu'illustré sur le schéma ci-contre. Évaluons la position de l'arrière et de l'avant du vaisseau simultanément dans le référentiel **A** à l'aide de deux événements **E1** et **E2** :

	Événement E1		Événement E2	
A	<p>Arrière</p> <p><math>x_{A(1)} = 0</math> <math>t_{A(1)} = 0</math></p> <p>Événement E1</p>		<p>Avant</p> <p><math>x_{A(1)} = 0</math>      <math>x_{A(2)} = L_A</math> <math>t_{A(1)} = 0</math>      <math>t_{A(2)} = 0</math></p> <p>Événement E2</p>	
	$x_{A(1)} = 0$	$t_{A(1)} = 0$	$x_{A(2)} = L_A$	$t_{A(2)} = 0$

Effectuons la transformation de Lorentz de ces événements vers le référentiel **B**. On réalise que ces deux événements ne sont plus simultanés d'après le référentiel **B** :

- $x_{B(1)} = \gamma_{AB} (x_{A(1)} + v_{xAB} t_{A(1)}) \Rightarrow x_{B(1)} = \gamma_{AB} ((0) + v_{xAB} (0)) \Rightarrow \boxed{x_{B(1)} = 0}$
- $t_{B(1)} = \gamma_{AB} \left( t_{A(1)} + \frac{v_{xAB} x_{A(1)}}{c^2} \right) \Rightarrow t_{B(1)} = \gamma_{AB} \left( (0) + \frac{v_{xAB} (0)}{c^2} \right) \Rightarrow \boxed{t_{B(1)} = 0}$
- $x_{B(2)} = \gamma_{AB} (x_{A(2)} + v_{xAB} t_{A(2)}) \Rightarrow x_{B(2)} = \gamma_{AB} ((L_A) + v_{xAB} (0)) \Rightarrow \boxed{x_{B(2)} = \gamma_{AB} L_A}$
- $t_{B(2)} = \gamma_{AB} \left( t_{A(2)} + \frac{v_{xAB} x_{A(2)}}{c^2} \right) \Rightarrow t_{B(2)} = \gamma_{AB} \left( (0) + \frac{v_{xAB} (L_A)}{c^2} \right) \Rightarrow \boxed{t_{B(2)} = \gamma_{AB} \frac{L_A v_{xAB}}{c^2}}$

Représentons les deux événements dans le référentiel **B** :



Afin de déterminer la longueur du vaisseau selon le référentiel **B**, il faudrait évaluer la position de l'arrière du vaisseau en même temps que la position de l'avant du vaisseau. Puisque l'arrière est positionné à  $t_{B(1)} = 0$ , nous pouvons effectuer la cinématique de l'arrière du vaisseau afin de le positionner à  $t_{B(2)}$ , moment où l'avant du vaisseau est positionner ce qui aura pour effet de synchroniser la localisation de l'avant et l'arrière selon **B**. Puisque le vaisseau se déplace à une vitesse  $v_{xAB}$  par rapport à **B**, nous pouvons introduire un événement **E3** localisant l'arrière du vaisseau au temps  $t_{B(2)}$  :

$$\begin{aligned}
 x_{B(3)} &= x_{B(1)} + v_{xAB} \Delta t_{B(1 \rightarrow 3)} & \Rightarrow & \quad x_{B(3)} = x_{B(1)} + v_{xAB} t_{B(2)} & \quad (\Delta t_{B(1 \rightarrow 3)} = t_{B(2)}) \\
 & & \Rightarrow & \quad x_{B(3)} = (0) + v_{xAB} \left( \gamma_{AB} \frac{v_{xAB} L_A}{c^2} \right) & \quad (\text{Remplacer } x_{B(1)} \text{ et } t_{B(2)}) \\
 & & \Rightarrow & \quad \boxed{x_{B(3)} = \gamma_{AB} \frac{v_{xAB}^2 L_A}{c^2}} & \quad (\text{Simplifier})
 \end{aligned}$$

Pour obtenir la longueur  $L_B$  du vaisseau selon **B**, il suffit d'évaluer la distance  $\Delta x_B$  entre l'événement **E2** et **E3**, car ils sont simultanés selon **B** :

$$\begin{aligned}
 L_B = x_{B(2)} - x_{B(3)} & \Rightarrow L_B = (\gamma_{AB} L_A) - \left( \gamma_{AB} \frac{v_{xAB}^2 L_A}{c^2} \right) & \quad (\text{Remplacer } x_{B(2)} \text{ et } x_{B(3)}) \\
 & \Rightarrow L_B = \gamma_{AB} L_A \left( 1 - \frac{v_{xAB}^2}{c^2} \right) & \quad (\text{Factoriser } \gamma_{AB} L_A) \\
 & \Rightarrow L_B = \gamma_{AB} L_A \left( \frac{c^2 - v_{xAB}^2}{c^2} \right) & \quad (\text{Dénominateur commun}) \\
 & \Rightarrow L_B = \gamma_{AB} L_A \left( \frac{1}{\gamma_{AB}^2} \right) & \quad (\text{Identité : } \gamma^2 = \frac{c^2}{c^2 - v_{xAB}^2}) \\
 & \Rightarrow L_B = \frac{L_A}{\gamma_{AB}} \quad \blacksquare & \quad (L_A = L_0 \text{ et } L_B = L)
 \end{aligned}$$

Représentons les trois événements dans le référentiel **B** :

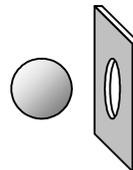
		Événement E1		Événement E2 et E3		
B	<p style="text-align: center;">Arrière</p> <p style="text-align: center;">A A'</p> <p style="text-align: center;"><math>x_{B(1)} = 0</math> <math>t_{B(1)} = 0</math></p> <p style="text-align: center;">Événement E1</p>			<p style="text-align: center;">Déplacement de l'arrière</p> <p style="text-align: center;">Avant</p> <p style="text-align: center;">A A'</p> <p style="text-align: center;"><math>x_{B(1)} = 0</math> <math>x_{B(3)}</math> <math>x_{B(2)}</math> <math>t_{B(1)} = 0</math> <math>t_{B(3)} = t_{B(2)}</math> <math>t_{B(2)}</math></p> <p style="text-align: center;"><math>L_B = L_A / \gamma_{AB}</math></p> <p style="text-align: center;">Événement E2 et E3</p>		
	$x_{B(1)} = 0$	$t_{B(1)} = 0$	$x_{B(2)} = \gamma_{AB} L_A$ $x_{B(3)} = v_{xAB} t_{B(2)}$	$t_{B(2)} = \gamma_{AB} \frac{L_A v_{xAB}}{c^2}$ $t_{B(3)} = t_{B(2)}$		

### Sens de la contraction des longueurs<sup>3</sup>

La contraction des longueurs s'effectue seulement dans le sens des vitesses relatives, car une **contraction** dans le **sens perpendiculaire** des **vitesse relatives** introduirait des **paradoxes** (contradiction sur l'explication d'un événement).

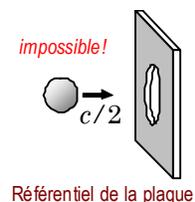
Voici un exemple simple qui introduirait un paradoxe s'il existait une contraction des longueurs perpendiculaires à la vitesse relative :

Situation : Un boulet de rayon  $R$  s'approche d'une plaque ayant une ouverture circulaire de rayon  $R$  avec une vitesse relative  $v = c/2$ .



Dans le référentiel de la plaque :

- Le boulet s'approche de la plaque avec une vitesse relative  $v = c/2$ .
- Il y a contraction des longueurs parallèles et perpendiculaires à la vitesse relative (le boulet est rétréci).
- La conclusion : le **boulet passe dans l'ouverture**.

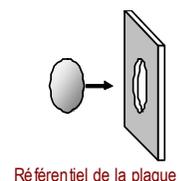


Dans le référentiel du boulet :

- La plaque s'approche du boulet avec une vitesse relative  $v = c/2$ .
- Il y a contraction des longueurs parallèles et perpendiculaire à la vitesse relative (plaque rétrécie et diminution de l'ouverture).
- La conclusion : le **boulet ne passe pas dans l'ouverture**.

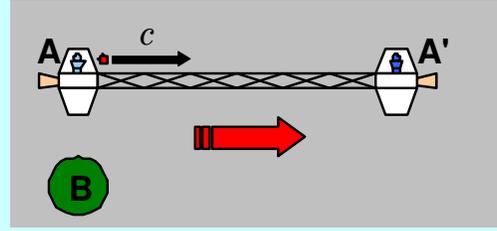


Cette contradiction permet la conclusion qu'il **ne peut pas** y avoir de **contraction des longueurs** dans le sens **perpendiculaire** de la **vitesse relative**.



<sup>3</sup> Cette section est discutée dans la section 4.4 du livre de référence.  
Référence : Marc Séguin, Physique XXI Tome C  
Note de cours rédigée par : Simon Vézina

**Situation C : Le signal lumineux de l'Altair, partie 3.** Le vaisseau spatial *Altair* ayant une longueur de 9 km (par rapport à l'*Altair*) émet un signal lumineux de communication de l'arrière du vaisseau vers l'avant du vaisseau. Selon la planète *B450* qui observe l'*Altair* s'éloigner à une vitesse relative de  $0,6c$ , on désire (a) évaluer la longueur de l'*Altair* selon la planète *B450* et (b) calculer le déplacement du signal lumineux dans le référentiel **B**.



À partir des résultats de la **situation B**, rappelons les mesures obtenues :

	Événement E1		Événement E2	
A				
	$\Delta x_A = 9 \text{ km}$	$\Delta t_A = \frac{\Delta x_A}{c} = 30 \text{ } \mu\text{s}$ (obtenue en A)	$L_A = 9 \text{ km}$	
B				
	$\Delta x_B = 18 \text{ km}$ (obtenue en A)	$\Delta t_B = 60 \text{ } \mu\text{s}$ (obtenue en B)	$L_B = ?$	
Relation AB	$v_{xAB} = 0,6c$	$v_{xBA} = -0,6c$	$\gamma_{AB} = \gamma_{BA} = 1,25$ (obtenue en A)	

À partir de la contraction des longueurs, évaluons la longueur de l'Altair  $L_B$  selon le référentiel **B** :

$$L_B = \frac{L_A}{\gamma_{AB}} \Rightarrow L_B = \frac{(9 \text{ km})}{(1,25)}$$

$$\Rightarrow \boxed{L_B = 7,2 \text{ km}}$$

On peut également vérifier que le déplacement du signal lumineux effectue adéquatement le déplacement  $\Delta x_B$  selon le référentiel **B** :

$$\Delta x_B = L_B + v_{xAB} \Delta t_B \Rightarrow (18 \text{ km}) = (7,2 \text{ km}) + (0,6c)(60 \text{ } \mu\text{s})$$

$$\Rightarrow (18 \text{ km}) = (7,2 \text{ km}) + (10,8 \text{ km})$$

## L'intervalle de temps propre

Un **intervalle de temps propre**  $T_0$  est une durée entre deux événements dont la distance qui les séparent est nulle ( $\Delta x = 0$ ). On remarque de le temps propre se mesure dans un référentiel à l'aide d'un observateur unique. Il existe toujours un seul référentiel qui peut mesurer un intervalle de temps propre entre deux événements sauf lorsque l'on étudie la cinématique de la lumière, car on ne peut pas être situé dans le référentiel de la lumière puisqu'elle se déplace à vitesse  $c$ . L'intervalle de temps propre est toujours le plus petit intervalle de temps mesurable entre deux événements.



<http://peninsulamontejo.com/blog/>  
Regarder sa montre correspond à un écoulement de temps propre pour celui qui porte la montre (immobile par rapport à la montre).

Notation mathématique : intervalle de temps propre =  $T_0$

Unité (seconde) :  $[T_0] = s$

## La dilatation du temps propre

La dilatation du temps  $T$  s'applique lorsque l'on veut transformer un intervalle de temps propre  $T_0$  mesuré entre deux événements vers un référentiel qui constante l'unique observateur (qui mesure le temps propre) être en mouvement à vitesse relative  $v$  par rapport à lui :

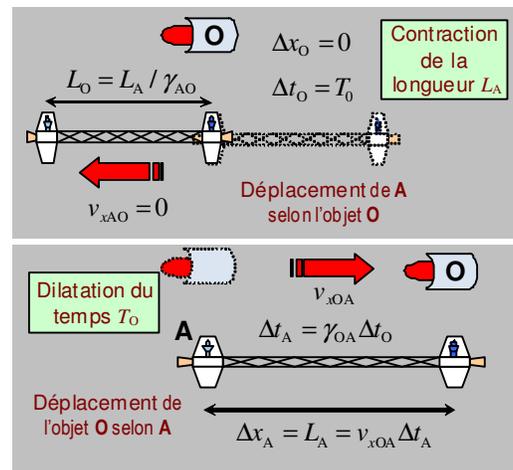
$$T = \gamma T_0$$

où  $T$  : Intervalle de temps dilaté (s).

$\gamma$  : Facteur de Lorentz ( $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ ).

$T_0$  : Intervalle de temps propre (s).

$v$  : Vitesse relative entre les deux référentiels (m/s).



### Preuve :

Effectuons une transformation du temps pour transformer un intervalle de temps  $\Delta t_A$  nécessitant aucune distance ( $\Delta x_A = 0$ ) dans le référentiel **A** vers le référentiel **B** :

$$\begin{aligned} \Delta t_B &= \gamma_{AB} \left( \Delta t_A + \frac{v_{xAB} \Delta x_A}{c^2} \right) \Rightarrow \Delta t_B = \gamma_{AB} \left( \Delta t_A + \frac{v_{xAB}(0)}{c^2} \right) \\ &\Rightarrow \Delta t_B = \gamma_{AB} \Delta t_A \\ &\Rightarrow T = \gamma T_0 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

# Application de la dilatation du temps

Voici quelques exemples et expériences qui nécessitent une correction relativiste du temps :

1) Désynchronisation des montres des astronautes



Astronaute en orbite

2) Désynchronisation des horloges atomiques (avion et au sol)



horloge atomique à rubidium

3) Le système GPS



Satellite pour GPS

4) Temps de demi-vie et désintégration du muon  $\mu^-$  via la force faible

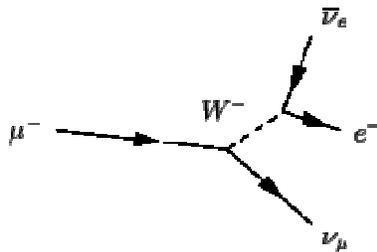


Diagramme de Feynman

5) La physique des particules au CERN



CERN : 27 km de circonférence

Effet du champs gravitationnelle sur l'écoulement du temps :

Si  $\bar{g}$  augmente, alors l'écoulement du temps ralentit.

**N.B.** Lorsqu'il y a désynchronisation entre deux horloges en des lieux où la gravité n'est pas identique, il faut ajouter un effet de dilatation gravitationnel du temps fondé sur des arguments de relativité général (dilatation du temps sous une diminution du champ  $g$ ).

**Situation 3 (Chapitre 4.2) : Du Soleil vers Proxima du Centaure.** Proxima du Centaure est une l'étoile la plus rapprochée du Soleil : elle se situe à 4,22 années-lumière de distance. Un astronef voyageant à vitesse constante prend 3 ans (d'après ses passagers) pour aller du Soleil à Proxima du Centaure. On désire déterminer le module de la vitesse de l'astronef par rapport au Soleil. (On suppose que Proxima du Centaure est immobile par rapport au Soleil.)

La situation physique à résoudre est la cinématique d'un astronef dans l'espace que l'on peut étudier l'aide de deux événements :

Référentiel	Événement
<b>S</b> : Soleil et Proxima du Centaure (immobiles l'un par rapport à l'autre dans l'espace)	<b>E1</b> : L'astronef est près du Soleil.
<b>A</b> : L'astronef	<b>E2</b> : L'astronef est près de Proxima du Centaure.

La vitesse relative entre nos deux référentiels est inconnue :

$$v = |v_{xAS}| = |v_{xSA}| = ?$$

Dans le référentiel de l'astronef **A**, les deux événements sont situés **au même endroit**. Selon l'astronef, c'est le Soleil qui s'éloigne et Proxima du Centaure qui s'approche. Nous savons que le temps propre sera associé à ce référentiel ( $T_A = T_0$ ) :

Longueur :  $L_A = L_S / \gamma_{SA}$  (longueur en mouvement, donc longueur contractée)

Distance :  $\Delta x_A = 0$  (permet de conclure au temps propre)

Durée :  $\Delta t_A = T_0 = 3 \text{ ans} \Rightarrow T_A = 3 \text{ ans} \times \frac{365,25 \text{ j}}{\text{an}} \times \frac{24 \text{ h}}{\text{j}} \times \frac{60 \text{ min}}{\text{h}} \times \frac{60 \text{ s}}{\text{min}}$   
 $\Rightarrow \Delta t_A = 9,467 \times 10^7 \text{ s}$

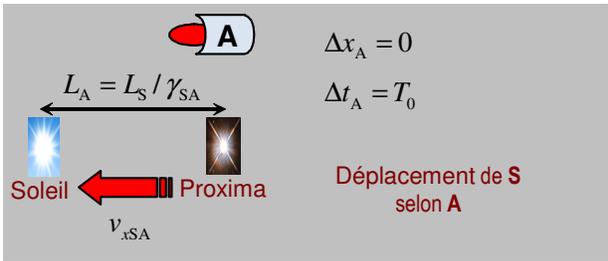
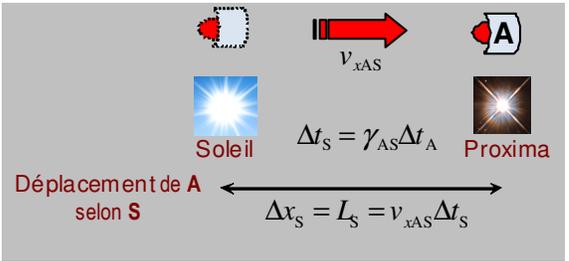
Dans le référentiel du Soleil **S**, les deux événements sont situés à **deux endroits différents**. Selon eux, c'est l'astronef qui se déplace pour passer de la position du Soleil à la position de Proxima du Centaure :

Longueur :  $L_S = L_0 = 4,22 \text{ a.l.} \Rightarrow L_S = 4,22 \text{ a.l.} \times \frac{365,25 \text{ j}}{\text{a}} \times \frac{24 \text{ h}}{\text{j}} \times \frac{60 \text{ min}}{\text{h}} \times \frac{60 \text{ s}}{\text{min}} \times 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$   
 $\Rightarrow L_S = 3,995 \times 10^{16} \text{ m}$

Distance :  $\Delta x_S = L_S$  (les deux lieux sont synchronisés dans ce référentiel)

Durée :  $\Delta t_S = \gamma_{AS} \Delta t_A$  (un seul observateur en mouvement, donc temps dilaté)

Pour obtenir la vitesse  $v$  de l'astronef, il faut évaluer la cinématique de l'astronef selon le référentiel du Soleil ou évaluer la cinématique du Soleil selon le référentiel de l'astronef ce qui nous donnera la même interprétation de la vitesse  $v$  :

Selon A (Le Soleil recule)	Selon S (L'astronef se déplace du Soleil à Proxima)
$L_A = v_{xSA} \Delta t_A \Rightarrow (L_S / \gamma_{SA}) = v_{xSA} \Delta t_A$ $\Rightarrow L_0 / \gamma_{SA} = v_{xSA} T_0$ $\Rightarrow L_0 / \gamma = v T_0$	$\Delta x_S = v_{xAS} \Delta t_S \Rightarrow L_S = v_{xAS} (\gamma_{AS} \Delta t_A)$ $\Rightarrow L_0 = v_{xAS} \gamma_{AS} T_0$ $\Rightarrow L_0 = v \gamma T_0$
	

À partir de nos relations entre la longueur propre et notre temps propre, évaluons la vitesse relative  $v$  entre nos deux référentiels :

$$\begin{aligned}
 L_0 = v \gamma T_0 &\Rightarrow L_S = v \gamma T_A && \text{(Remplacer } L_0 = L_S \text{ et } T_0 = T_A) \\
 &\Rightarrow L_S = v \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} T_A && \text{(Remplacer } \gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} \text{)} \\
 &\Rightarrow L_S^2 = \frac{v^2 T_A^2}{1 - v^2/c^2} && \text{(Mettre au carré)} \\
 &\Rightarrow L_S^2 = \frac{v^2 T_A^2}{(c^2 - v^2)/c^2} && \text{(Dénominateur commun)} \\
 &\Rightarrow L_S^2 = \frac{c^2 v^2 T_A^2}{(c^2 - v^2)} && \text{(Monter le } c^2 \text{ au numérateur)} \\
 &\Rightarrow L_S^2 (c^2 - v^2) = c^2 v^2 T_A^2 && \text{(Retirer les dénominateurs)} \\
 &\Rightarrow L_S^2 c^2 - L_S^2 v^2 = c^2 v^2 T_A^2 && \text{(Distribution de } L_S^2 \text{)} \\
 &\Rightarrow L_S^2 c^2 = c^2 v^2 T_A^2 + L_S^2 v^2 && \text{(Isoler les termes en } v^2 \text{)} \\
 &\Rightarrow L_S^2 c^2 = v^2 (c^2 T_A^2 + L_S^2) && \text{(Factoriser } v^2 \text{)} \\
 &\Rightarrow v^2 = \frac{L_S^2 c^2}{c^2 T_A^2 + L_S^2} && \text{(Isoler } v^2 \text{)} \\
 &\Rightarrow \boxed{v = \pm \sqrt{\frac{L_S^2 c^2}{c^2 T_A^2 + L_S^2}}} && \text{(Isoler } v \text{)}
 \end{aligned}$$

Évaluons cette expression afin d'obtenir la vitesse de l'astronef : (vitesse positive)

$$\begin{aligned}
 v = \sqrt{\frac{L_S^2 c^2}{c^2 T_A^2 + L_S^2}} &\Rightarrow v = \sqrt{\frac{(3,995 \times 10^{16})^2 (3 \times 10^8)^2}{(3 \times 10^8)^2 (9,467 \times 10^7)^2 + (3,995 \times 10^{16})^2}} \\
 &\Rightarrow v = 2,445 \times 10^8 \text{ m/s} \\
 &\Rightarrow \boxed{v = 0,815 c}
 \end{aligned}$$

Remarque :

À cette vitesse, le facteur de Lorentz sera

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0,815 c)^2/c^2}} = 1,7257$$

ce qui donnera un voyage de

$$\Delta t_s = \gamma \Delta t_A = (1,7257)(3 \text{ ans}) = 5,177 \text{ ans}$$

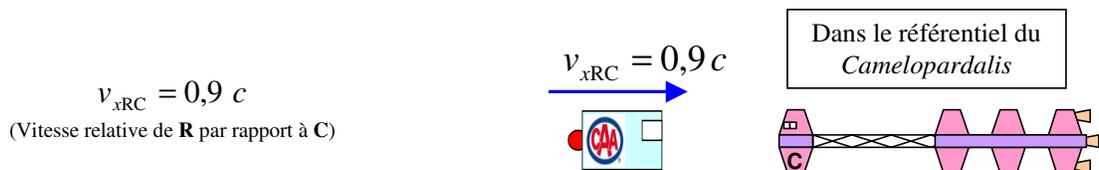
pour l'astronef selon le référentiel du Soleil.

**Situation D : Le Camelopardalis en panne.** Durant un long voyage intersidéral, le *Camelopardalis* (5000 m de longueur propre) rencontre des ennuis techniques et se doit d'être remorqué. Afin de communiquer avec la remorqueuse la plus près, le *Camelopardalis* émet un **éclair rouge** à l'avant du vaisseau et un **éclair vert** à l'arrière de son vaisseau en même temps selon le référentiel du *Camelopardalis*. Par chance, un vaisseau remorque se dirige vers l'avant du *Camelopardalis* avec une vitesse relative de  $0,9 c$  par rapport au *Camelopardalis*. On désire évaluer *par rapport au référentiel du vaisseau remorque* (a) la distance entre les deux émissions, (b) l'intervalle de temps entre les deux lieux d'émissions, (c) quel éclair sera vu en premier selon le vaisseau remorque et (d) quelle est la longueur du *Camelopardalis* dans le référentiel du vaisseau remorque.

La situation physique à résoudre est la cinématique de la lumière émise par le *Camelopardalis* en mouvement par rapport à un *vaisseau remorque* que l'on peut étudier l'aide de deux événements :

Référentiel	Événement
Référentiel C : Le <i>Camelopardalis</i>	<b>E1</b> : Émission de l' <b>éclair rouge</b> à l'avant du vaisseau.
Référentiel R : Le vaisseau remorque.	<b>E2</b> : Émission de l' <b>éclair vert</b> à l'arrière du vaisseau.

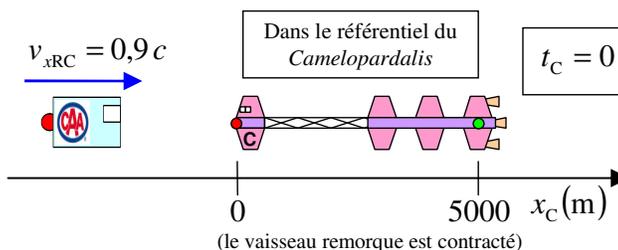
La vitesse relative entre nos deux référentiels est



Dans le référentiel de *Camelopardalis* C, les deux événements sont bien mesurés. Par rapport au vaisseau, les deux émissions ont lieu au même moment et sont séparés spatialement par 5000 m :

Référentiel C	Événement 1 (rouge)	Événement 2 (vert)
Position	$x_{C(1)} = 0$	$x_{C(2)} = 5000 \text{ m}$
Temps	$t_{C(1)} = 0$	$t_{C(2)} = 0$

Schéma des événements E1 et E2 simultanés :



Dans le référentiel du vaisseau remorque **R**, les deux événements doivent être transformés. Puisque la vitesse relative est exprimée à partir de **R** par rapport à **C** et que les mesures sont connues dans le référentiel **C**, utilisons la transformation **C** vers **R** en inversant la vitesse relative :

Vitesse relative inverse :  $v_{xCR} = -v_{xRC} \Rightarrow \boxed{v_{xCR} = -0,9c}$

Facteur de Lorentz :  $\gamma_{CR} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{xCR}^2 / c^2}} \Rightarrow \gamma_{CR} = \frac{1}{\sqrt{1 - (-0,9c)^2 / c^2}} \Rightarrow \boxed{\gamma_{CR} = 2,294}$

Transformation **C** vers **R** :  $x_R = \gamma_{CR}(x_C + v_{CR}t_C)$  et  $t_R = \gamma_{CR}\left(t_C + \frac{v_{CR}x_C}{c^2}\right)$

Référentiel R	Événement 1 (rouge)	Événement 2 (vert)
Position	$x_{R(1)} = \gamma_{CR}(x_{C(1)} + v_{CR}t_{C(1)})$ $= (2,294)((0) + (-0,9c)(0))$ $= 0 \text{ m}$	$x_{R(2)} = \gamma_{CR}(x_{C(2)} + v_{CR}t_{C(2)})$ $= (2,294)(5000 + (-0,9c)(0))$ $= 11470 \text{ m}$
Temps	$t_{R(1)} = \gamma_{CR}\left(t_{C(1)} + \frac{v_{CR}x_{C(1)}}{c^2}\right)$ $= (2,294)\left(0 + \frac{(-0,9c)(0)}{c^2}\right)$ $= 0 \text{ s}$	$t_{R(2)} = \gamma_{CR}\left(t_{C(2)} + \frac{v_{CR}x_{C(2)}}{c^2}\right)$ $= (2,294)\left(0 + \frac{(-0,9c)(5000)}{c^2}\right)$ $= -34,41 \mu\text{s}$

Schéma de l'événement **E2** qui se réalise en 1<sup>er</sup> :

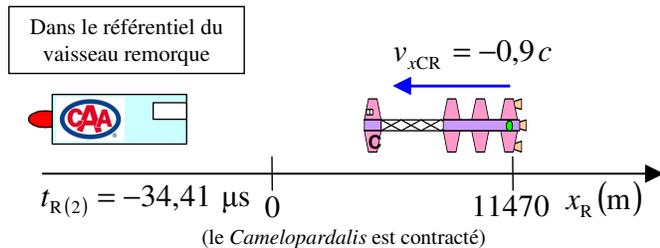
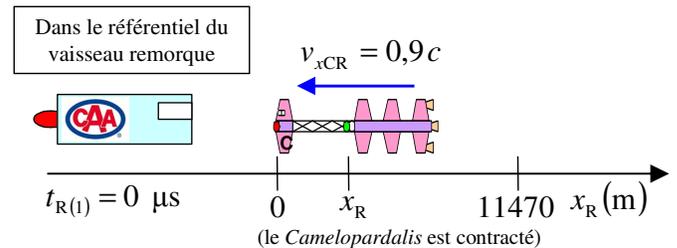


Schéma événement **E1** qui se réalise en 2<sup>ième</sup> :



Question : Où est rendu l'éclair vert à  $t_{R(1)} = 0 \text{ s}$  ? Peut-il avoir dépassé l'éclair rouge ?

La distance entre nos deux lieux par rapport au vaisseau remorque est égale à la valeur suivante : (attention, l'événement **E2** se réalise avant l'événement **E1**)

$\Delta x_R = x_{R(1)} - x_{R(2)} \Rightarrow \Delta x_R = (0) - (11470) \Rightarrow \boxed{\Delta x_R = -11470 \text{ m}} \quad \text{(a)}$

L'intervalle de temps entre nos deux événements par rapport au vaisseau remorque est égal à la valeur suivante : (attention, l'événement **E2** se réalise avant l'événement **E1**)

$\Delta t_R = t_{R(1)} - t_{R(2)} \Rightarrow \Delta t_R = (0) - (-34,41 \times 10^{-6}) \Rightarrow \boxed{\Delta t_R = 34,41 \mu\text{s}} \quad \text{(b)}$

Puisque **l'éclair vert** est émis **avant l'éclair rouge**, évaluons la position de **l'éclair vert** à  $t_R = 0$  grâce aux équations du MUA et de la vitesse de la lumière :

$$\begin{aligned} x = x_0 + v_x \Delta t &\Rightarrow x = x_{R(2)} + (-c)(T_R) \\ &\Rightarrow x = (11470) + (-3 \times 10^8)(34,41 \times 10^{-6}) \\ &\Rightarrow \boxed{x = 1147 \text{ m}} \end{aligned}$$

(c) Puisque le vaisseau remorque est du côté négatif de l'axe et que **l'éclair vert** est derrière **l'éclair rouge** à  $t_R = 0$ , **l'éclair rouge** sera vu en premier par le vaisseau remorque.

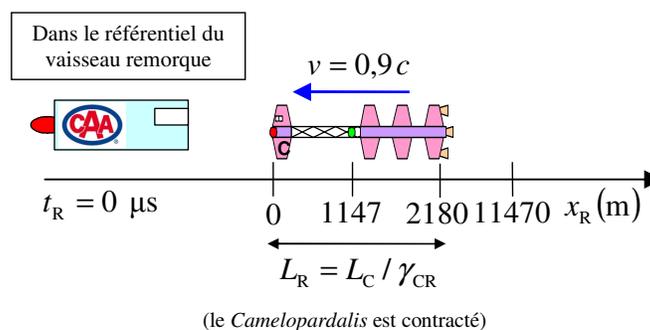
Évaluons la position arrière du *Camelopardalis* à  $t_R = 0$  grâce aux équations du MUA et à la vitesse du vaisseau de  $0,9 c$  :

$$\begin{aligned} x = x_0 + v_x \Delta t &\Rightarrow x = x_{R(2)} + (-0,9 c)(T_R) \\ &\Rightarrow x = (11470) - 0,9(3 \times 10^8)(34,41 \times 10^{-6}) \\ &\Rightarrow \boxed{x = 2180 \text{ m}} \end{aligned}$$

Puisque cette coordonnée est simultanée avec le devant du vaisseau à  $t_R = 0$ , elle permet d'évaluer la longueur *Camelopardalis* à  $L_R = 2180 \text{ m}$  selon le vaisseau remorque. Vérifions le tout en calculant la longueur du *Camelopardalis* dans le référentiel du vaisseau remorque par la contraction des longueurs :

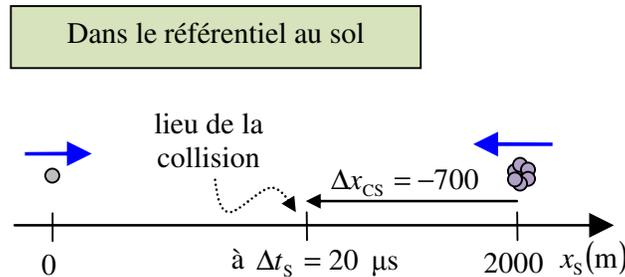
$$\begin{aligned} L_R = \frac{L_C}{\gamma_{CR}} &\Rightarrow L_R = \frac{(5000)}{(2,294)} \\ &\Rightarrow \boxed{L_R = 2180 \text{ m}} \quad \text{(d)} \end{aligned}$$

Schéma à  $t_R = 0$  dans le référentiel du vaisseau remorque :



**Situation E : La collision entre deux particules.** Un atome de carbone et un neutron séparé par une distance de 2 km se dirige l'un vers l'autre. Ils entrent en collision 20  $\mu\text{s}$  plus tard. Le site de la collision a lieu à une distance de 0,7 km de la position initiale de l'atome de carbone. Toutes ces mesures sont effectuées par rapport au sol. On désire évaluer la vitesse du neutron dans le référentiel de l'atome de carbone.

Voici une représentation de la situation initiale selon le référentiel au sol **S** où le neutron **n** est à l'origine et l'atome de carbone **C** est situé à la coordonnée 2 km selon l'axe  $x$  :

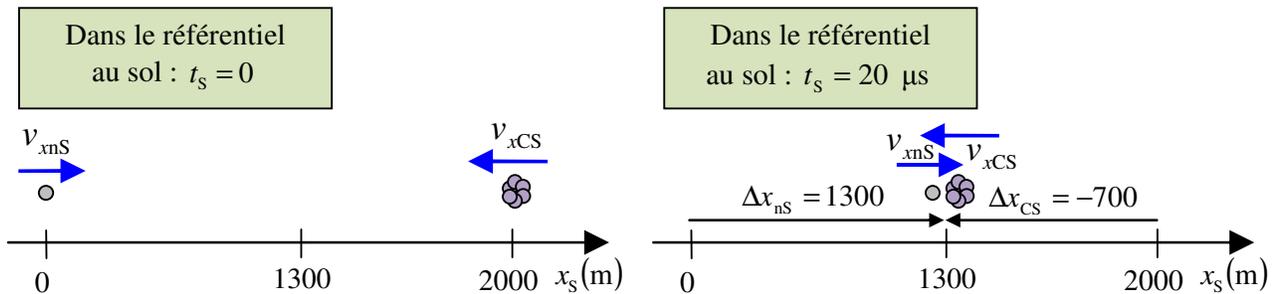


Évaluons le déplacement  $\Delta x_{ns}$  du neutron par rapport au sol :

$$\Delta x_{ns} = d_0 - \Delta x_{CS} \quad \Rightarrow \quad \Delta x_{ns} = (2 \text{ km}) - (0,7 \text{ km})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta x_{ns} = 1,3 \text{ km}}$$

Voici une représentation de nos deux événements (avant et après la collision) :



Afin d'évaluer la vitesse  $v_{xnC}$  du neutron par rapport au carbone, nous devons évaluer l'expression

$$v_{xnC} = \frac{\Delta x_{nC}}{\Delta t_{nC}} \quad .$$

(expression à évaluer)

Évaluons la vitesse de l'atome de carbone par rapport au sol :

$$v_{xCS} = \frac{\Delta x_{CS}}{\Delta t_{CS}} \quad \Rightarrow \quad v_{xCS} = \frac{(-0,7 \times 10^3)}{(20 \times 10^{-6})}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_{xCS} = -3,5 \times 10^7 \text{ m/s}} \quad (v_{xCS} = -0,1167 c)$$

Évaluons la vitesse relative du sol par rapport à l'atome de carbone :

$$v_{xSC} = -v_{xCS} \Rightarrow v_{xSC} = -(-3,5 \times 10^7)$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{xSC} = 3,5 \times 10^7 \text{ m/s}} \quad (v_{xSC} = 0,1167c)$$

Évaluons le facteur de Lorentz  $\gamma_{SC}$  pour effectuer une transformation de Lorentz du référentiel au sol **S** vers le référentiel de l'atome de carbone **C** :

$$\gamma_{SC} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{xSC}^2 / c^2}} \Rightarrow \gamma_{SC} = \frac{1}{\sqrt{1 - (3,5 \times 10^7)^2 / (3 \times 10^8)^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma_{SC} = 1,0069}$$

Évaluons le déplacement  $\Delta x_{nC}$  du neutron dans le référentiel de l'atome de carbone :

$$\Delta x_{nC} = \gamma_{SC} (\Delta x_{nS} + v_{xSC} \Delta t_{nS}) \Rightarrow \Delta x_{nC} = (1,0069) \left( (1,3 \times 10^3) + (3,5 \times 10^7) (20 \times 10^{-6}) \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta x_{nC} = 2013,8 \text{ m}}$$

Évaluons le temps  $\Delta t_{nC}$  du déplacement du neutron dans le référentiel de l'atome de carbone :

$$\Delta t_{nC} = \gamma_{SC} \left( \Delta t_{nS} + \frac{v_{xSC} \Delta x_{nS}}{c^2} \right) \Rightarrow \Delta t_{nC} = (1,0069) \left( (20 \times 10^{-6}) + \frac{(3,5 \times 10^7) (1,3 \times 10^3)}{(3 \times 10^8)^2} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta t_{nC} = 20,647 \times 10^{-6} \text{ s}}$$

Évaluons la vitesse  $v_{xnC}$  du neutron par rapport à l'atome de carbone :

$$v_{xnC} = \frac{\Delta x_{nC}}{\Delta t_{nC}} \Rightarrow v_{xnC} = \frac{(2013,8)}{(20,647 \times 10^{-6})}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{xnC} = 9,7545 \times 10^7 \text{ m/s}} \quad (v_{xnC} = 0,3251c)$$

Remarque :

- Les vitesses du neutron et de l'atome du carbone par rapport au sol sont égales à :

$$v_{xnS} = \frac{\Delta x_{nS}}{\Delta t_{nS}} = \frac{(1,3 \times 10^3)}{(20 \times 10^{-6})} = 0,2167c \quad \text{et} \quad v_{xCS} = \frac{\Delta x_{CS}}{\Delta t_{CS}} = -0,1167c$$

- Selon l'addition relative des vitesses Galiléenne, la vitesse du neutron par rapport à l'atome de carbone serait égale à :

$$v_{xnC} = v_{xnS} + v_{xSC} = v_{xnS} + (-v_{xCS}) = (0,2167) - (-0,1167c) = 0,3334c \neq 0,3251c$$

- Il existe une transformation pouvant résoudre plus rapidement la situation précédente et elle sera présentée au **chapitre 4.6**.

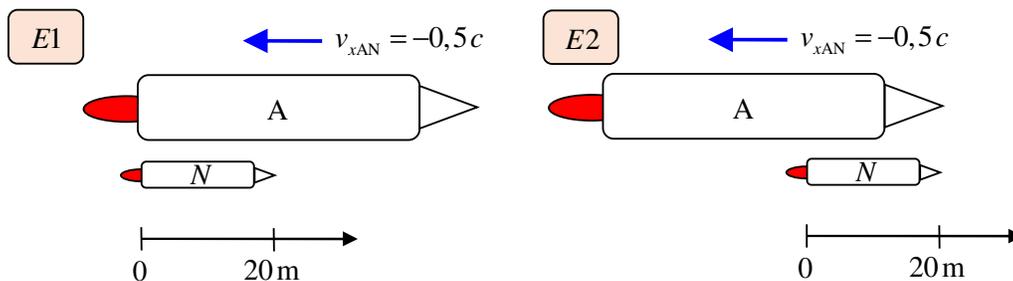
## Exercice

**4.5.2 Une navette double un astronef.** Un astronef se fait doubler par une navette de 20 m de longueur (selon la navette) qui voyage à  $0,5c$  par rapport à lui. Dans le référentiel de la navette, il s'écoule  $1\ \mu\text{s}$  entre l'instant où les arrières des deux véhicules coïncident et l'instant où les avants coïncident. Déterminez (a) l'intervalle de temps entre les deux événements d'après l'astronef et (b) la longueur propre de l'astronef.

## Solution

**4.5.2 Une navette double un astronef.**

Voici une représentation de la situation dans le référentiel de la navette :



D'après notre représentation de la situation, nous avons les vitesses relatives suivantes :

$$v_{xAN} = -0,5c \quad \text{et} \quad v_{xNA} = 0,5c$$

Évaluons notre facteur de Lorentz entre nos deux référentiels A et N :

$$\gamma_{NA} = 1/\sqrt{1 - \frac{v_{xNA}^2}{c^2}} \Rightarrow \gamma_{NA} = 1/\sqrt{1 - \frac{(0,5c)^2}{c^2}} \Rightarrow \boxed{\gamma_{NA} = 1,1547}$$

Évaluons les deux temps associés à nos deux événements d'après le référentiel de l'astronef A :

$$t_{A(1)} = \gamma_{NA} \left( t_{N(1)} + \frac{v_{xNA} x_{N(1)}}{c^2} \right) \Rightarrow t_{A(1)} = (1,1547) \left( (0) + \frac{(0,5c)(0)}{c^2} \right) \Rightarrow t_{A(1)} = 0$$

$$t_{A(2)} = \gamma_{NA} \left( t_{N(2)} + \frac{v_{xNA} x_{N(2)}}{c^2} \right) \Rightarrow t_{A(2)} = (1,1547) \left( (1 \times 10^{-6} \text{ s}) + \frac{(0,5c)(20 \text{ m})}{c^2} \right) \Rightarrow t_{A(2)} = 1,1932 \ \mu\text{s}$$

(a) On peut déduire que l'intervalle de temps entre les deux événements selon l'astronef sera de

$$\Delta t_A = 1,1932 \ \mu\text{s} .$$

(b) Pour déterminer la longueur propre de l'astronef, nous pouvons utiliser la relation suivante :

$$L_{0A} = v_{xNA} \Delta t_A + \frac{L_{0N}}{\gamma_{NA}} \Rightarrow L_{0A} = (0,5c)(1,1932 \times 10^{-6} \text{ s}) + \frac{(20 \text{ m})}{(1,1547)}$$

$$\Rightarrow L_{0A} = (178,98 \text{ m}) + (17,32 \text{ m})$$

$$\Rightarrow \boxed{L_{0A} = 196,3 \text{ m}}$$

# Chapitre 4.6 – La combinaison relativiste des vitesses

## Transformation de Lorentz des vitesses parallèles

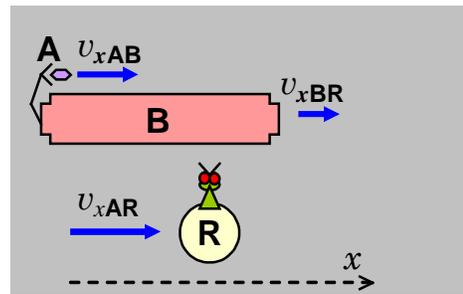
La transformation de Lorentz des vitesses parallèles permet de convertir des mesures  $(v_x, t)$  d'un référentiel inertiel **B** vers un référentiel inertiel **R** qui ont les caractéristiques suivantes :

- 1) Le référentiel **B** se déplace à une vitesse relative  $v_{xBR}$  par rapport au référentiel **R**.
- 2) L'origine du référentiel **B** coïncide avec l'origine du référentiel **R** à  $t_B = t_R = 0$ .
- 3) La vitesse relative  $v_{xBR}$  du référentiel **B** par rapport au référentiel **R** est une fraction non négligeable de la vitesse de la lumière  $c$ .

La transformation prend la forme suivante :

$$v_{xAR} = \frac{v_{xAB} + v_{xBR}}{1 + \left(\frac{v_{xAB}}{c}\right)\left(\frac{v_{xBR}}{c}\right)}$$

- où
- $v_{xAR}$  : Vitesse de A par rapport à R selon  $x$  (m/s)
  - $v_{xAB}$  : Vitesse de A par rapport à B selon  $x$  (m/s)
  - $v_{xBR}$  : Vitesse de B par rapport à R selon  $x$  (m/s)
  - $c$  : Vitesse de la lumière ( $c = 3 \times 10^8$  m/s)



- ❖ Il est toujours permis d'inverser une relation de vitesse relative ( $v_{xAB} = -v_{xBA}$ ).
- ❖ La vitesse d'un objet par rapport à un référentiel ne peut **jamais** dépasser  $c$  ( $v_x < c$ ).

### Preuve :

À partir de la transformation de Lorentz de la position et du temps d'un référentiel A vers un référentiel B sachant que A se déplace à vitesse  $v_{xAB}$  par rapport au référentiel B, appliquons la différentiel à ces transformation pour construire une règle de transformation des vitesses faisant intervenir  $v_x = dx/dt$ .

$$v_{xB} = \frac{dx_B}{dt_B} \Rightarrow v_{xB} = \frac{d(\gamma_{AB}(x_A + v_{xAB}t_A))}{dt_B} \quad (\text{Trans. Lorentz : } x_B = \gamma_{AB}(x_A + v_{xAB}t_A))$$

$$\Rightarrow v_{xB} = \frac{d(\gamma_{AB}(x_A + v_{xAB}t_A))}{d\left(\gamma_{AB}\left(t_A + \frac{x_A v_{xAB}}{c^2}\right)\right)} \quad (\text{Trans. Lorentz : } t_B = \gamma_{AB}\left(t_A + \frac{x_A v_{xAB}}{c^2}\right))$$

$$\Rightarrow v_{xB} = \frac{d(x_A + v_{xAB}t_A)}{d\left(t_A + \frac{x_A v_{xAB}}{c^2}\right)} \quad (\text{Factoriser } \gamma_{AB}, \text{ car } v_{xAB} = \text{cst et simplifier})$$

Appliquons la différentielle à  $x_A$  et  $t_A$  dans notre expression afin de formuler un terme de vitesse  $v_{xA} = dx_A / dt_A$  :

$$v_{xB} = \frac{d(x_A + v_{xAB}t_A)}{d\left(t_A + \frac{x_A v_{xAB}}{c^2}\right)} \Rightarrow v_{xB} = \frac{dx_A + v_{xAB}dt_A}{dt_A + \frac{v_{xAB}}{c^2}dx_A} \quad (\text{Appliquer la différentielle et } v_{xAB} = \text{cst et } c)$$

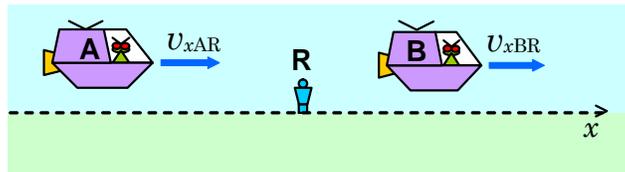
$$\Rightarrow v_{xB} = \frac{\frac{dx_A}{dt_A} + v_{xAB}}{1 + \frac{v_{xAB}}{c^2} \frac{dx_A}{dt_A}} \quad (\text{Factoriser } dt_A \text{ et simplifier } dt_A)$$

$$\Rightarrow v_{xB} = \frac{v_{xA} + v_{xAB}}{1 + \frac{v_{xAB}}{c^2} v_{xA}} \quad \blacksquare \quad (\text{Remplacer } v_{xA} = dx_A / dt_A)$$

## La vitesse d'un objet ne dépasse jamais $c$ selon son observateur

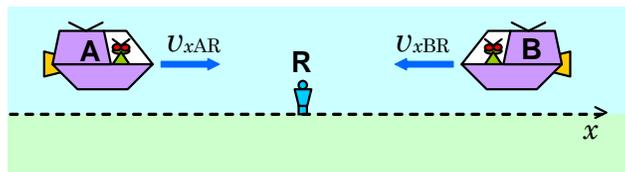
Voici un tableau comparatif des vitesses pouvant être évaluées tel qu'aucun objet ne peut se déplacer à une vitesse supérieure à  $c$  selon son observateur.

Situation : Une poursuite



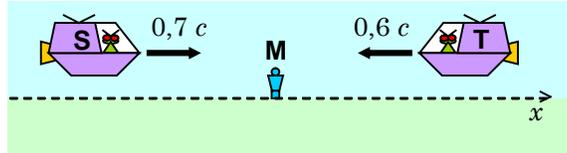
Référentiel	Équation	Effet relativiste	Vitesses admissibles
B	$v_{xAB} = \frac{ v_{xAR}  -  v_{xRB} }{1 + \left(\frac{ v_{xAR} }{c}\right)\left(-\frac{ v_{xRB} }{c}\right)}$	$ v_{xAB}  >  v_{xAR}  -  v_{xRB} $ car dénominateur < 1	$0 \leq v_{xAB} < c$
R	$v_{xAB(\text{selon R})} =  v_{xAR}  -  v_{xBR} $		$0 \leq v_{xAB(\text{selon R})} < c$

Situation : Un rapprochement/éloignement



Référentiel	Équation	Effet relativiste	Vitesses admissibles
B	$v_{xAB} = \frac{ v_{xAR}  +  v_{xRB} }{1 + \left(\frac{ v_{xAR} }{c}\right)\left(\frac{ v_{xRB} }{c}\right)}$	$ v_{xAB}  <  v_{xAR}  +  v_{xRB} $ car dénominateur > 1	$0 \leq v_{xAB} < c$
R	$v_{xAB(\text{selon R})} =  v_{xAR}  +  v_{xBR} $		$0 \leq v_{xAB(\text{selon R})} < 2c$

Situation 1 : Les extraterrestres contre-attaquent. L'agent Mulder est pétrifié de peur au milieu d'une clairière : une soucoupe volante **S** s'approche de lui à  $0,7 c$  en venant de la gauche pendant qu'une autre soucoupe **T** s'approche de lui à  $0,6 c$  en venant de la droite. On désire déterminer le module de la vitesse de la soucoupe **T** par rapport à la soucoupe **S**, du point de vue du pilote de **S**.



Dans cette situation, nous avons trois référentiels différents :

Référentiel **S** : Soucoupe volante **S**

Référentiel **T** : Soucoupe volante **T**

Référentiel **M** : L'agent Mulder

Nous avons également les vitesses relatives suivantes :

1) Vitesse relative de **S** par rapport à **M** :  $v_{xSM} = 0,7 c$

2) Vitesse relative de **T** par rapport à **M** :  $v_{xTM} = -0,6 c$

Afin d'évaluer la vitesse relative de **T** par rapport à **S**, nous devons utiliser la transformation relativiste des vitesses :

$$v_{xAR} = \frac{v_{xAB} + v_{xBR}}{1 + \left(\frac{v_{xAB}}{c}\right)\left(\frac{v_{xBR}}{c}\right)} \Rightarrow v_{xTS} = \frac{v_{xTM} + v_{xMS}}{1 + \left(\frac{v_{xTM}}{c}\right)\left(\frac{v_{xMS}}{c}\right)} \quad (\text{Remplacer les indices})$$

$$\Rightarrow v_{xTS} = \frac{v_{xTM} + (-v_{xSM})}{1 + \left(\frac{v_{xTM}}{c}\right)\left(\frac{-v_{xSM}}{c}\right)} \quad (\text{Remplacer } v_{xMS} = -v_{xSM})$$

$$\Rightarrow v_{xTS} = \frac{(-0,6c) + (-0,7c)}{1 + \left(\frac{-0,6c}{c}\right)\left(\frac{-0,7c}{c}\right)} \quad (\text{Remplacer valeurs num.})$$

$$\Rightarrow v_{xTS} = \frac{-1,3c}{1 + (-0,6)(-0,7)} \quad (\text{Simplification})$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{xTS} = -0,915c} \quad (\text{Évaluer la vitesse})$$

La soucoupe **T** fonce vers la soucoupe **S** avec une vitesse de  $0,915 c$ . Cette vitesse est inférieure à  $c$  ce qui est en accord avec le 2<sup>ième</sup> postulat de la relativité.

Toutefois, la vitesse de la soucoupe **T** par rapport à la soucoupe **S** dans le référentiel de Mulder **M** est égale à  $v_{TS(\text{selon } M)} = -1,3c$  ce qui ne viole par le 2<sup>ième</sup> postulat de la relativité.

$$v_{TS(\text{selon } M)} = v_{xTM} + v_{xMS} = (-0,7c) + (-0,6c) = -1,3c$$

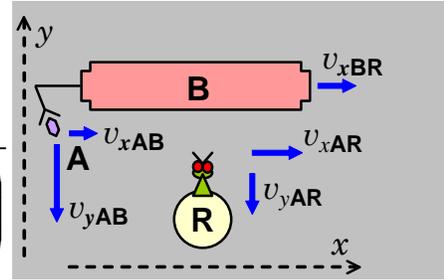
# Transformation de Lorentz des vitesses perpendiculaires

La transformation de Lorentz des vitesses perpendiculaires permet de convertir des mesures  $(v_y, t)$  d'un référentiel inertiel **B** vers un référentiel inertiel **R** qui ont les caractéristiques suivantes :

- 1) Le référentiel **B** se déplace à une vitesse relative  $v_{xBR}$  par rapport au référentiel **R**.
- 2) L'origine du référentiel **B** coïncide avec l'origine du référentiel **R** à  $t_B = t_R = 0$ .
- 3) La vitesse relative  $v_{xBR}$  du référentiel **B** par rapport au référentiel **R** est une fraction non négligeable de la vitesse de la lumière  $c$ .

La transformation prend la forme suivante :

$$v_{yAR} = \frac{v_{yAB}}{\gamma_{BR} \left( 1 + \left( \frac{v_{xAB}}{c} \right) \left( \frac{v_{xBR}}{c} \right) \right)}$$



où  $v_{yAR}$  : Vitesse de l'objet A par rapport au référentiel R selon y (m/s)

$v_{xAB}$  : Vitesse de l'objet A par rapport au référentiel B selon x (m/s)

$v_{yAB}$  : Vitesse de l'objet A par rapport au référentiel B selon y (m/s)

$v_{xBR}$  : Vitesse relative du référentiel B par rapport au référentiel R (m/s)

$\gamma_{BR}$  : Facteur gamma avec vitesse relative entre les référentiels ( $\gamma_{BR} = 1/\sqrt{1 - v_{xBR}^2/c^2}$ )

$c$  : Vitesse de la lumière ( $c = 3 \times 10^8$  m/s)

## Preuve :

À partir de la transformation de Lorentz de la position et du temps d'un référentiel A vers un référentiel B sachant que A se déplace à vitesse  $v_{xAB}$  par rapport au référentiel B, appliquons la différentiel à ces transformation pour construire une règle de transformation des vitesses faisant intervenir  $v_y = dy/dt$ .

$$v_{yB} = \frac{dy_B}{dt_B} \Rightarrow v_{xB} = \frac{dy_A}{dt_B} \quad (\text{Trans. Lorentz : } y_B = y_A)$$

$$\Rightarrow v_{yB} = \frac{dy_A}{d\left(\gamma_{AB} \left( t_A + \frac{v_{xAB}}{c^2} x_A \right)\right)} \quad (\text{Trans. Lorentz : } t_B = \gamma_{AB} \left( t_A + \frac{x_A v_{xAB}}{c^2} \right))$$

$$\Rightarrow v_{yB} = \frac{dy_A}{\gamma_{AB} d\left( t_A + \frac{v_{xAB}}{c^2} x_A \right)} \quad (\text{Factoriser } \gamma_{AB} \text{ car } v_{xAB} = \text{cst})$$

Appliquons la différentielle à  $y_A$  et  $t_A$  dans notre expression afin de formuler un terme de vitesse  $v_{yA} = dy_A / dt_A$  :

$$v_{yB} = \frac{dy_A}{\gamma_{AB} d\left(t_A + \frac{v_{xAB}}{c^2} x_A\right)} \quad (\text{Équation précédente})$$

$$\Rightarrow v_{yB} = \frac{dy_A}{\gamma_{AB} \left(dt_A + \frac{v_{xAB}}{c^2} dx_A\right)} \quad (\text{Appliquer la différentielle et } v_{xAB} = \text{cst et } c)$$

$$\Rightarrow v_{yB} = \frac{\frac{dy_A}{dt_A}}{\gamma_{AB} \left(1 + \frac{v_{xAB}}{c^2} \frac{dx_A}{dt_A}\right)} \quad (\text{Factoriser } dt_A \text{ et simplifier})$$

$$\Rightarrow v_{yB} = \frac{v_{yA}}{\gamma_{AB} \left(1 + \frac{v_{xAB}}{c} \frac{v_{xA}}{c}\right)} \quad \blacksquare \quad (\text{Remplacer } v_{xA} = dx_A / dt_A \text{ et } v_{yA} = dy_A / dt_A)$$

**Situation A : Le temps de chute en relativité.** Dans une fusée **F** s'éloignant d'une station orbitale **S** à  $0,8c$ , on lance une balle **B** verticalement (perpendiculairement à la vitesse d'éloignement) sur une distance de  $2 \text{ m}$  à une vitesse de  $5 \text{ m/s}$ . On désire déterminer le temps de chute (**a**) dans le référentiel de la fusée, (**b**) dans le référentiel de la balle et (**c**) dans le référentiel de la station orbitale.

Voici les informations de l'énoncé :

$$v_{xFS} = 0,8c \quad \Delta y_F = 2 \text{ m} \quad v_{yBF} = 5 \text{ m/s}$$

Évaluons le temps de chute de la balle dans le référentiel de la fusée **F** :

$$\begin{aligned} \Delta y_F &= v_{yF} \Delta t_F & \Rightarrow & \Delta y_F = v_{yBF} \Delta t_F & (\text{Cinématique de } \mathbf{B} \text{ selon } \mathbf{F} : v_{yF} = v_{yBF}) \\ & & \Rightarrow & (2) = (5) \Delta t_F \\ & & \Rightarrow & \boxed{\Delta t_F = 0,4 \text{ s}} \quad (\mathbf{a}) \end{aligned}$$

Puisque la vitesse de la balle par rapport à la fusée est faible, nous n'avons pas de correction relativiste à apporter au temps de chute mesuré par la fusée **F** vers le référentiel de la balle **B**. Ainsi, nous pouvons appliquer la transformation de Galilée :

$$\Delta t_B = \Delta t_F \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta t_B = 0,4 \text{ s}} \quad (\mathbf{b})$$

Évaluons le facteur de Lorentz pour effectuer une transformation de **F** vers **S** :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{FS}^2 / c^2}} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (0,8c)^2 / c^2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\gamma = 1,667}$$

Évaluons la vitesse  $v_{yBS}$  selon l'axe  $y$  de la balle dans le référentiel de la station orbitale à partir de la transformation de Lorentz des vitesses perpendiculaires :

$$v_{yBS} = \frac{v_{yBF}}{\gamma \left( 1 + \left( \frac{v_{xBF}}{c} \right) \left( \frac{v_{xFS}}{c} \right) \right)} \Rightarrow v_{yBS} = \frac{(5)}{(1,667) \left( 1 + \left( \frac{(0)}{c} \right) \left( \frac{(0,8c)}{c} \right) \right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{yBS} = 3 \text{ m/s}}$$

Puisqu'il n'y a pas de contraction des longueurs perpendiculaires, nous pouvons déterminer le déplacement vertical de la balle dans le référentiel de la station orbitale  $\mathbf{S}$  :

$$\Delta y_S = \Delta y_F \Rightarrow \boxed{\Delta y_S = 2 \text{ m}}$$

Évaluons le temps de chute de la balle dans le référentiel de la station orbitale  $\mathbf{S}$  :

$$\Delta y_S = v_{yS} \Delta t_S \Rightarrow \Delta y_S = v_{yBS} \Delta t_S \quad (\text{Cinématique de } \mathbf{B} \text{ selon } \mathbf{S} : v_{yS} = v_{yBS})$$

$$\Rightarrow (2) = (3) \Delta t_S$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta t_S = 0,667 \text{ s}} \quad (\mathbf{c})$$

On constate que le temps  $\Delta t_S$  selon  $\mathbf{S}$  correspond à un temps dilaté par rapport à  $\Delta t_F$  selon  $\mathbf{F}$ , car le référentiel  $\mathbf{F}$  mesure les deux événements à la même coordonnée  $x$  lui attribuant la définition d'intervalle de temps propre :

$$\Delta t_S = \gamma \Delta t_F \Rightarrow (0,667) = (1,667)(0,4)$$

$$\Rightarrow 0,667 = 0,667 \quad \blacksquare$$





# Chapitre 4.7 – L'effet Doppler lumineux

## Effet Doppler lumineux longitudinal

Lorsqu'un émetteur **A** se déplace avec une vitesse relative  $v$  par rapport à un récepteur **B**, la fréquence de la lumière mesurée par le récepteur **B** est modifiée par un effet relativiste portant le nom d'effet Doppler lumineux :

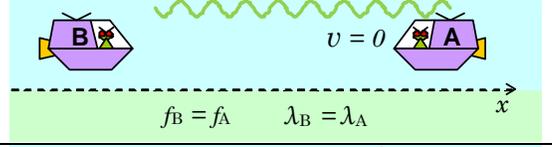
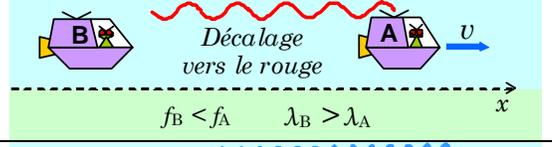
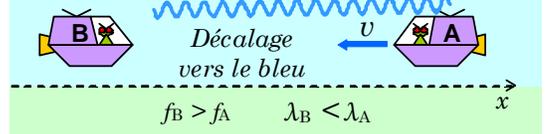
$$f_B = \frac{\sqrt{c \pm v}}{\sqrt{c \mp v}} f_A$$

où  $f_A$  : Fréquence de la lumière émise par le référentiel A (Hz).

$f_B$  : Fréquence de la lumière reçue par le référentiel B (Hz).

$c$  : Vitesse de la lumière ( $c = 3 \times 10^8$  m/s).

$v$  : Vitesse relative du référentiel A par rapport au référentiel B (m/s).

Situation	Équation	Selon le référentiel B
Vitesse relative nulle entre l'émetteur <b>A</b> et le récepteur <b>B</b> (fréquence inchangée)	$f_B = f_A$	
Émetteur A s'éloigne du récepteur B (fréquence diminue)	$f_B = \frac{\sqrt{c - v}}{\sqrt{c + v}} f_A$	
Émetteur A s'approche du récepteur B (fréquence augmente)	$f_B = \frac{\sqrt{c + v}}{\sqrt{c - v}} f_A$	

### Preuve :

L'effet Doppler lumineux longitudinal représente une reformulation de la transformation de Lorentz du temps. Dans le référentiel de l'émetteur A, la lumière voyage à vitesse  $c$  et une longueur d'onde  $\lambda_A$  prend une période  $T_A$  avant d'être complètement formée dans l'espace (selon l'émetteur **A**). La fréquence de la lumière est alors  $f_A = 1/T_A$ .

Selon un référentiel **B** tel que le référentiel **A** se déplace à une vitesse relative  $v_{xAB}$  par rapport au référentiel **B**, une longueur d'onde  $\lambda_B$  sera complètement captée après une période  $T_B$ . Des effets relativistes impliqueront que  $\lambda_A \neq \lambda_B$  et  $T_A \neq T_B$ , mais que la vitesse de la lumière  $c = \lambda_A/T_A = \lambda_B/T_B$  reste la même selon le référentiel **A** et **B**.

Appliquons la transformation de Lorentz du temps du référentiel **A** vers **B** à l'aide de  $\lambda_A$  et  $T_A$  afin d'évaluer  $f_B = 1/T_B$  où **A** s'éloigne de **B** avec une vitesse relative  $v_{xAB}$  :

$$\begin{aligned} \Delta t_B &= \gamma \left( \Delta t_A + \frac{v_{xAB} \Delta x_A}{c^2} \right) && \text{(Transformation de Lorentz de du temps)} \\ \Rightarrow T_B &= \gamma \left( T_A + \frac{v_{xAB} \lambda_A}{c^2} \right) && \text{(Remplacer } \Delta t = T \text{ et } \Delta x = \lambda \text{)} \\ \Rightarrow T_B &= \gamma \left( T_A + T_A \frac{v_{xAB}}{c} \right) && \text{(Longueur d'onde : } \lambda_A = cT_A \text{, alors } T_A = \frac{\lambda_A}{c} \text{)} \\ \Rightarrow T_B &= \gamma T_A \left( 1 + \frac{v_{xAB}}{c} \right) && \text{(Factoriser } T_A \text{)} \\ \Rightarrow T_B &= \gamma T_A \left( \frac{c + v_{xAB}}{c} \right) && \text{(Dénominateur commun)} \\ \Rightarrow T_B &= \frac{1}{\sqrt{1 - v_{xAB}^2/c^2}} T_A \left( \frac{c + v_{xAB}}{c} \right) && \text{(Remplacer } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{xAB}^2/c^2}} \text{)} \\ \Rightarrow T_B &= \frac{1}{\sqrt{\frac{c^2 - v_{xAB}^2}{c^2}}} T_A \left( \frac{c + v_{xAB}}{c} \right) && \text{(Dénominateur commun)} \\ \Rightarrow T_B &= \frac{1}{\frac{1}{c} \sqrt{c^2 - v_{xAB}^2}} T_A \left( \frac{c + v_{xAB}}{c} \right) && \text{(Factoriser } 1/c^2 \text{ et le sortir de la racine)} \\ \Rightarrow T_B &= \frac{c}{\sqrt{c^2 - v_{xAB}^2}} T_A \left( \frac{c + v_{xAB}}{c} \right) && \text{(Inverser la fraction } 1/c \text{)} \\ \Rightarrow T_B &= \frac{c + v_{xAB}}{\sqrt{c^2 - v_{xAB}^2}} T_A && \text{(Simplifier } c \text{)} \\ \Rightarrow T_B &= \frac{c + v_{xAB}}{\sqrt{(c + v_{xAB})(c - v_{xAB})}} T_A && \text{(Reformuler le dénominateur)} \\ \Rightarrow T_B &= \frac{c + v_{xAB}}{\sqrt{(c - v_{xAB})} \sqrt{(c + v_{xAB})}} T_A && \text{(Séparer le produit dans la racine)} \\ \Rightarrow T_B &= \frac{\sqrt{c + v_{xAB}}}{\sqrt{c - v_{xAB}}} T_A && \text{(Simplifier } \sqrt{c + v_{xAB}} \text{)} \\ \Rightarrow f_B &= \frac{\sqrt{c - v_{xAB}}}{\sqrt{c + v_{xAB}}} f_A && \text{(Inverser les relations et remplacer } f = 1/T \text{)} \\ \Rightarrow \boxed{f_B = \frac{\sqrt{c \mp v}}{\sqrt{c \pm v}} f_A} &&& \blacksquare \text{ (Remplacer } v = |v_{xAB}| \text{)} \end{aligned}$$

**Situation 1 : Le décalage vers le rouge cosmologique.** Dans une galaxie typique, les nébuleuses émettent une fraction significative de leur lumière à la longueur d'onde de la raie H $\alpha$ , 656,3 nm (un photon de cette longueur d'onde est émis lorsqu'un électron passe du 3<sup>e</sup> au 2<sup>e</sup> niveau d'énergie dans un atome d'hydrogène). En raison de l'expansion de l'Univers, une galaxie lointaine s'éloigne de nous à 0,3 c. On désire déterminer la longueur d'onde de la lumière H $\alpha$  que l'on reçoit en provenance de cette galaxie.

Évaluons la fréquence du photon associée à une longueur d'onde de 656,3 nm émise au repos :

$$\begin{aligned} \lambda = vT &\Rightarrow \lambda = (c) \left( \frac{1}{f} \right) && \text{(Remplacer } v = c \text{ et } T = \frac{1}{f} \text{)} \\ &\Rightarrow f = \frac{c}{\lambda} && \text{(Isoler } f \text{)} \\ &\Rightarrow f = \frac{(3 \times 10^8)}{(656,3 \times 10^{-9})} && \text{(Remplacer valeurs numériques)} \\ &\Rightarrow \boxed{f = 4,57 \times 10^{14} \text{ Hz}} && \text{(Évaluer } f \text{)} \end{aligned}$$

À partir de l'expression de l'effet Doppler de la lumière, évaluons la fréquence de la lumière mesurée sur la Terre sachant que l'émetteur s'éloigne avec une vitesse relative égale à 0,3 c :

$$\begin{aligned} f_B = \frac{\sqrt{c \pm v}}{\sqrt{c \mp v}} f_A &\Rightarrow f_B = \frac{\sqrt{c - v}}{\sqrt{c + v}} f_A && \text{(Éloignement, diminution de } f \text{)} \\ &\Rightarrow f_B = \frac{\sqrt{c - (0,3c)}}{\sqrt{c + (0,3c)}} f_A && \text{(Remplacer } v \text{)} \\ &\Rightarrow f_B = \frac{\sqrt{0,7}}{\sqrt{1,3}} f_A && \text{(Calcul et simplification de } c \text{)} \\ &\Rightarrow f_B = \frac{\sqrt{0,7}}{\sqrt{1,3}} (4,57 \times 10^{14}) && \text{(Remplacer } f_A \text{)} \\ &\Rightarrow \boxed{f_B = 3,35 \times 10^{14} \text{ Hz}} && \text{(Évaluer } f_B \text{)} \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant évaluer la longueur d'onde mesurée sur la Terre :

$$\begin{aligned} \lambda = \frac{c}{f} &\Rightarrow \lambda = \frac{(3 \times 10^8)}{(3,35 \times 10^{14})} && \text{(Remplacer valeurs numériques)} \\ &\Rightarrow \boxed{\lambda = 895,5 \text{ nm}} \end{aligned}$$

**Situation 2 : Un feu rouge brûlé.** Au volant de sa voiture, Malcolm brûle un feu rouge et se fait arrêter par un policier. Il raconte au policier qu'en raison du décalage Doppler vers le bleu, il a cru que la lumière rouge était verte! On désire déterminer si le policier devrait croire son histoire : on peut supposer que la longueur d'onde du rouge correspond à 670 nm et que celle du vert correspond à 550 nm.

Évaluons la fréquence associée à la lumière rouge et à la lumière verte :

$$\lambda = vT \quad \Rightarrow \quad \lambda = (c) \left( \frac{1}{f} \right) \quad (\text{Remplacer } v = c \text{ et } T = \frac{1}{f})$$

$$\Rightarrow \quad f = \frac{c}{\lambda} \quad (\text{Isoler } f)$$

$$\text{Lumière rouge :} \quad f_{\text{rouge}} = \frac{(3 \times 10^8)}{(670 \times 10^{-9})} \Rightarrow \quad \boxed{f_{\text{rouge}} = 4,478 \times 10^{14} \text{ Hz}}$$

$$\text{Lumière verte :} \quad f_{\text{vert}} = \frac{(3 \times 10^8)}{(550 \times 10^{-9})} \Rightarrow \quad \boxed{f_{\text{vert}} = 5,455 \times 10^{14} \text{ Hz}}$$

À partir de l'expression de l'effet Doppler de la lumière, évaluons la vitesse relative  $v$  entre le feu de signalisation qui émet la couleur rouge et Malcolm qui observe la couleur verte. Puisque Malcolm est accusé d'avoir brûlé le feu rouge, il se déplaçait vers le feu de signalisation :

$$f_B = \frac{\sqrt{c \pm v}}{\sqrt{c \mp v}} f_A \quad \Rightarrow \quad f_B = \frac{\sqrt{c + v}}{\sqrt{c - v}} f_A \quad (\text{Approchement, augmentation de } f)$$

$$\Rightarrow \quad f_{\text{vert}} = \frac{\sqrt{c + v}}{\sqrt{c - v}} f_{\text{rouge}} \quad (\text{Remplacer } f_A \text{ et } f_B)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f_{\text{vert}}}{f_{\text{rouge}}} = \frac{\sqrt{c + v}}{\sqrt{c - v}} \quad (\text{Isoler terme de fréquence})$$

$$\Rightarrow \quad \left( \frac{f_{\text{vert}}}{f_{\text{rouge}}} \right)^2 = \frac{c + v}{c - v} \quad (\text{Mettre au carré})$$

$$\Rightarrow \quad (c - v)f_{\text{vert}}^2 = (c + v)f_{\text{rouge}}^2 \quad (\text{Retirer les dénominateurs})$$

Nous pouvons effectuer la distributivité du terme  $c - v$  et  $c + v$  et isoler la vitesse relative  $v$  :

$$(c - v)f_{\text{vert}}^2 = (c + v)f_{\text{rouge}}^2$$

$$\Rightarrow cf_{\text{vert}}^2 - vf_{\text{vert}}^2 = cf_{\text{rouge}}^2 + vf_{\text{rouge}}^2 \quad (\text{Distributivité})$$

$$\Rightarrow cf_{\text{vert}}^2 - cf_{\text{rouge}}^2 = vf_{\text{vert}}^2 + vf_{\text{rouge}}^2 \quad (\text{Mettre terme en } v \text{ ensemble})$$

$$\Rightarrow c(f_{\text{vert}}^2 - f_{\text{rouge}}^2) = v(f_{\text{rouge}}^2 + f_{\text{vert}}^2) \quad (\text{Factoriser } c \text{ et } v)$$

$$\Rightarrow v = c \frac{(f_{\text{vert}}^2 - f_{\text{rouge}}^2)}{(f_{\text{rouge}}^2 + f_{\text{vert}}^2)} \quad (\text{Isoler } v)$$

$$\Rightarrow v = c \frac{((5,455 \times 10^{14})^2 - (4,478 \times 10^{14})^2)}{((4,478 \times 10^{14})^2 + (5,455 \times 10^{14})^2)} \quad (\text{Remplacer valeurs numériques})$$

$$\Rightarrow v = 0,195c \quad (\text{Évaluer la vitesse relative } v)$$

$$\Rightarrow \boxed{v = 5,84 \times 10^7 \text{ m/s}} \quad (\text{Remplacer } c = 3 \times 10^8 \text{ m/s})$$

Le policier ne doit pas croire à l'histoire de Malcolm, car cette vitesse est impossible à atteindre avec une voiture.







# Chapitre 4.9a – La quantité de mouvement relativiste

## La conservation de la quantité de mouvement

La quantité mouvement  $\vec{p}$  permet d'évaluer l'état de mouvement d'un objet ou d'un système. Selon Newton, lorsqu'il n'y a pas de force extérieure exercée sur un système ( $\vec{F}_{\text{ext}} = 0$ ), cette quantité doit être conservée (1<sup>re</sup> loi de Newton). C'est ce qui se produit lors d'une collision. Plusieurs forces normales sont en jeu, mais puisqu'elles se retrouvent en paire action-réaction, leurs influences ne modifient pas la quantité de mouvement du système (3<sup>e</sup> loi de Newton).



<https://abdurahmaankenny.wordpress.com/>

En mécanique classique, la quantité de mouvement  $\vec{p}$  se définit comme étant le produit de la masse de l'objet au repos  $m$  multipliée par la vitesse ordinaire de l'objet  $\vec{v}$  ( $\vec{p} = m\vec{v}$ ). Puisque la vitesse dépend du choix de référentiel, la quantité de mouvement aussi dépend du choix de référentiel. Cependant, le 1<sup>er</sup> postulat de la relativité impose que les lois physiques sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels. S'il existe un référentiel inertiel observant la conservation de la quantité de mouvement, alors tous les autres référentiels doivent observer également cette conservation, mais avec des valeurs numériques différentes.

## La quantité de mouvement relativiste

En relativité, nous devons modifier l'expression de la quantité de mouvement classique  $p = m\vec{v}$  puisqu'elle n'est valide que dans le référentiel de l'objet en mouvement. Dans ce référentiel, cette quantité de mouvement est nulle puisque l'objet est immobile dans son référentiel. Ainsi, pour préserver la conservation de la quantité de mouvement dans tous les référentiels, il faut reformuler la quantité de mouvement.

Ainsi, l'expression relativiste de la quantité de mouvement d'une masse au repos  $m$  qui est observée se déplaçant à une vitesse  $\vec{v}$  sera égale à l'expression suivante :

$$\vec{p} = \gamma m\vec{v}$$

(expression vectorielle)

$$p_x = \gamma_x m v_x$$

(selon l'axe  $x$  uniquement)

où  $\vec{p}$  : Quantité de mouvement de l'objet (kg · m/s)

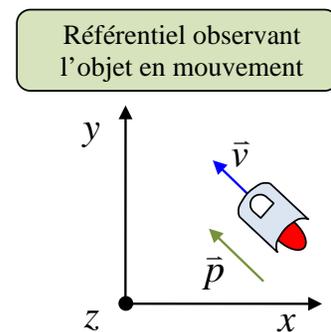
$m$  : Masse de l'objet mesuré au repos (kg)

$\vec{v}$  : Vitesse de l'objet (m/s)

$\gamma$  : Facteur de Lorentz associé à l'objet

$$(|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2})$$

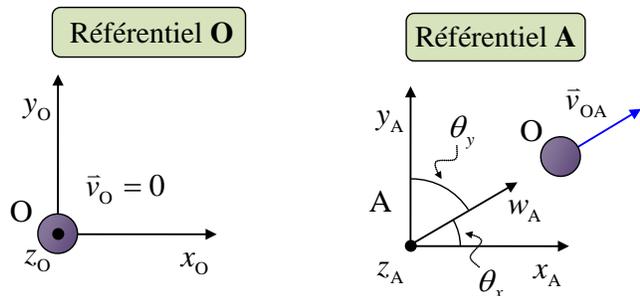
$$(\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}, \gamma_x = 1/\sqrt{1 - v_x^2/c^2})$$



Preuve :

Considérons une particule **O** immobile dans son propre référentiel possédant une masse égale à  $m$ . Étant immobile, sa quantité de mouvement dans son référentiel est nulle ce qui donne

$$\vec{p}_O = m \vec{v}_O = m \frac{d\vec{r}_O}{dt_O} = 0 \quad .$$



Considérons maintenant un référentiel **A** observant la particule **O** en mouvement à vitesse  $\vec{v}_{OA}$  selon un axe  $w$  tel que

$$|\vec{v}_{OA}| = v_{OA} = v_{wOA} = \sqrt{v_{xOA}^2 + v_{yOA}^2 + v_{zOA}^2}$$

et permettant de décomposer la vitesse selon l'axe  $x$ ,  $y$  et  $z$  tel que

$$v_{xOA} = v_{wOA} \cos(\theta_x), \quad v_{yOA} = v_{wOA} \cos(\theta_y), \quad v_{zOA} = v_{wOA} \cos(\theta_z) \quad .$$

Utilisons la transformation de Lorentz de **O** vers **A** selon l'axe  $w$

$$w_A = \gamma_{OA} (w_O + v_{wOA} t_O) \quad \text{avec} \quad \gamma_{OA} = 1 / \sqrt{1 - v_{OA}^2 / c^2}$$

afin de définir la position de la particule **O** dans le référentiel **A** en fonction du temps pour représenter la quantité de mouvement  $p_{wA}$  de la particule **O** dans le référentiel **A** à l'aide d'une dérivée par rapport au temps dans le référentiel **O** étant le temps propre (dérivée par rapport au temps propre) :

Puisque la particule est uniquement immobile dans le référentiel **O**, alors nous avons

$$\begin{aligned} w_A = \gamma_{OA} (w_O + v_{wOA} t_O) &\Rightarrow \frac{dw_A}{dt_O} = \frac{d}{dt_O} \gamma_{OA} (w_O + v_{wOA} t_O) \\ &\Rightarrow \frac{dw_A}{dt_O} = \gamma_{wOA} \left( \frac{dw_O}{dt_O} + v_{wOA} \right) \\ &\Rightarrow \frac{dw_A}{dt_O} = \gamma_{wOA} v_{wOA} \quad \left( v_{wO} = \frac{dw_O}{dt_O} = 0 \right) \\ &\Rightarrow m \frac{dw_A}{dt_O} = m \gamma_{wOA} v_{wOA} \quad \text{(Multiplier par l'invariant } m) \\ &\Rightarrow p_{wA} = \gamma_{wOA} m v_{wOA} \quad \text{(Définition : } p_{wA} = m dw_A / dt_O) \end{aligned}$$

Puisque l'axe  $w$  est décomposable selon l'axe  $x$ ,  $y$  et  $z$  par des règles de trigonométrie, nous pouvons affirmer vectoriellement que

$$\vec{p}_A = \gamma_{OA} m \vec{v}_{OA}$$

avec

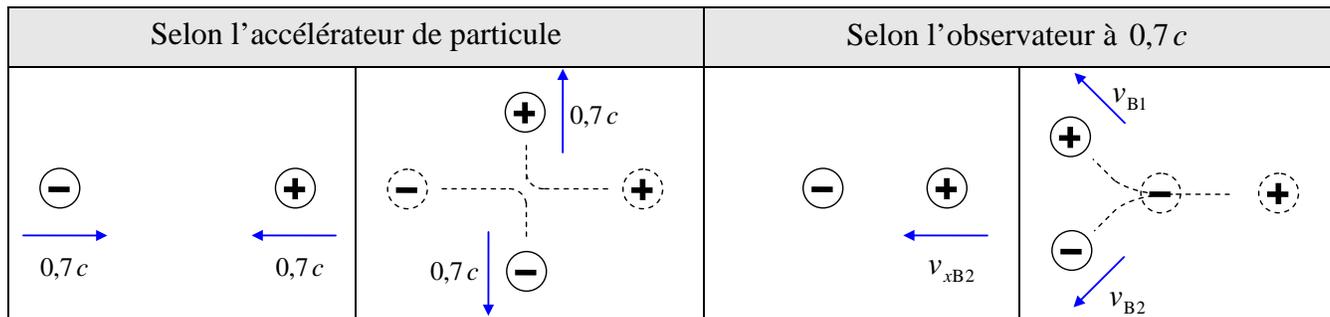
$$p_{xA} = \gamma_{OA} m v_{xOA}, \quad p_{yA} = \gamma_{OA} m v_{yOA} \quad \text{et} \quad p_{zA} = \gamma_{OA} m v_{zOA} \quad . \quad \blacksquare$$

**Situation A : La collision élastique relativiste d'un électron et d'un positron.** Dans un accélérateur de particule, un électron ( $m_e = 9,11 \times 10^{-31}$  kg) se déplace vers la droite avec une vitesse de  $0,7c$  et entre en collision élastique avec un positron ( $m_{\bar{e}} = 9,11 \times 10^{-31}$  kg) se déplaçant vers la gauche avec une vitesse de  $0,7c$ . Après la collision, l'électron se déplace vers le haut avec une vitesse de  $0,7c$  et le positron se déplace vers le bas avec une vitesse de  $0,7c$ . On désire vérifier si la quantité de mouvement relativiste  $p_x = \gamma m v_x$  est conservée (a) selon l'accélérateur de particule et (b) selon un observateur se déplaçant vers la droite à  $0,7c$  par rapport à l'accélérateur de particule.

Dans ce problème, nous avons deux référentiels et deux objets à étudier :

- A** : L'accélérateur de particule                      **1** : Électron  
**B** : Observateur à  $0,7c$                                       **2** : Positron

Voici deux représentations graphiques du mouvement de l'électron et du positron selon nos deux référentiels :



Selon l'accélérateur de particule, nous avons les mesures de vitesses suivantes :

Vitesses des particules (selon le référentiel de l'accélérateur A)			
Vitesse initiale		Vitesse finale	
l'électron	positron	l'électron	positron
$v_{x1A} = 0,7c$	$v_{x2A} = -0,7c$	$v_{x1A} = 0$	$v_{x2A} = 0$
$v_{y1A} = 0$	$v_{y2A} = 0$	$v_{y1A} = 0,7c$	$v_{y2A} = -0,7c$

Vitesse relative entre les référentiels	
Vitesse de l'observateur B par rapport à l'accélérateur A	$v_{xBA} = 0,7c$
Vitesse de l'accélérateur A par rapport à l'observateur B	$v_{xAB} = -0,7c$

Évaluons la quantité de mouvement classique selon l'axe  $x$  de l'électron **1** et du positron **2** avant collision et après la collision selon l'accélérateur **A** :

Avant la collision : (Référentiel **A**)

$$\text{Électron 1 : } p_{x1A} = \gamma_{1A} m_1 v_{x1A} \Rightarrow p_{x1A} = \gamma_{1A} (9,11 \times 10^{-31}) (0,7 c)$$

$$\Rightarrow \boxed{p_{x1A} = 1,913 \times 10^{-22} \gamma_{1A}}$$

$$\text{Positron 2 : } p_{x2A} = \gamma_{2A} m_2 v_{x2A} \Rightarrow p_{x2A} = \gamma_{2A} (9,11 \times 10^{-31}) (-0,7 c)$$

$$\Rightarrow \boxed{p_{x2A} = -1,913 \times 10^{-22} \gamma_{2A}}$$

Après la collision : (Référentiel **A**)

$$\text{Électron 1 : } p_{x1A} = \gamma_{2A} m_1 v_{x1A} \Rightarrow \boxed{p_{x1A} = 0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}} \quad (v_{x1A} = 0)$$

$$\text{Positron 2 : } p_{x2A} = \gamma_{2A} m_2 v_{x2A} \Rightarrow \boxed{p_{x2A} = 0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}} \quad (v_{x2A} = 0)$$

(a) Nous observons qu'il y a conservation de la quantité de mouvement selon l'accélérateur (**A**) :

$$\begin{aligned} \sum \vec{p}_f &= \sum \vec{p}_i &\Rightarrow p_{x1Af} + p_{x2Af} &= p_{x1Ai} + p_{x2Ai} \\ &&\Rightarrow (0) + (0) &= (1,913 \times 10^{-22} \gamma_{1A}) + (-1,913 \times 10^{-22} \gamma_{2A}) \\ &&\Rightarrow 0 &= 0 \quad \blacksquare \quad (\text{car } \gamma_{1A} = \gamma_{2A} \text{ puisque } v_{x1A} = v_{x2A}) \end{aligned}$$

Évaluons la vitesse selon l'axe  $x$  de l'électron **1** et du positron **2** selon l'observateur **B** à  $0,7c$ . Pour ce faire, nous devons utiliser les transformations de Lorentz des vitesses parallèles du référentiel de l'accélérateur **A** vers le référentiel de l'observateur **B** :

Avant la collision : (Référentiel **B**)

$$\text{Électron 1 : } v_{x1B} = \frac{v_{x1A} + v_{xAB}}{1 + \left(\frac{v_{x1A}}{c}\right)\left(\frac{v_{xAB}}{c}\right)} \Rightarrow v_{x1B} = \frac{(0,7c) + (-0,7c)}{1 + \left(\frac{0,7c}{c}\right)\left(\frac{-0,7c}{c}\right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{x1B} = 0}$$

$$\text{Positron 2 : } v_{x2B} = \frac{v_{x2A} + v_{xAB}}{1 + \left(\frac{v_{x2A}}{c}\right)\left(\frac{v_{xAB}}{c}\right)} \Rightarrow v_{x2B} = \frac{(-0,7c) + (-0,7c)}{1 + \left(\frac{-0,7c}{c}\right)\left(\frac{-0,7c}{c}\right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{x2B} = -0,9396c}$$

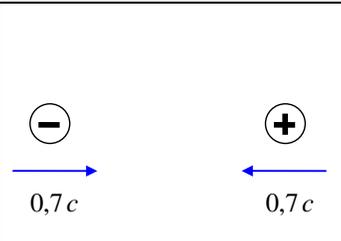
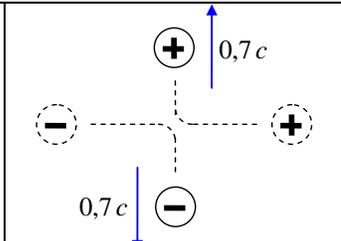
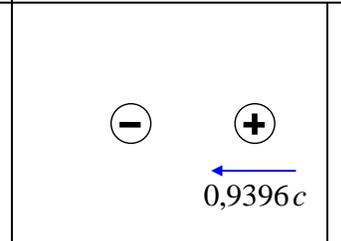
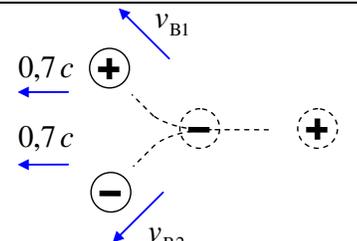
Après la collision : (Référentiel **B**)

$$\text{Électron 1 : } v_{x1B} = \frac{v_{x1A} + v_{xAB}}{1 + \left(\frac{v_{x1A}}{c}\right)\left(\frac{v_{xAB}}{c}\right)} \Rightarrow v_{x1B} = \frac{(0) + (-0,7c)}{1 + \left(\frac{0}{c}\right)\left(\frac{-0,7c}{c}\right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{x1B} = -0,7c}$$

$$\text{Positron 2 : } v_{x2B} = \frac{v_{x2A} + v_{xAB}}{1 + \left(\frac{v_{x2A}}{c}\right)\left(\frac{v_{xAB}}{c}\right)} \Rightarrow \boxed{v_{x2B} = -0,7c} \quad (\text{Idem : } v_{x2B} = v_{x1B})$$

Après avoir réalisée ces transformations de vitesse dans le référentiel **B** à  $0,7c$ , nous avons les informations suivantes :

Selon l'accélérateur <b>A</b> de particule		Selon l'observateur <b>B</b> à $0,7c$	
			

Pour évaluer la quantité de mouvement, nous aurons besoin également de transformer les vitesses selon l'axe  $y$ . Pour ce faire, nous aurons besoin de calculer le  $\gamma_{AB}$  de transformation de **A** vers **B** :

$$\gamma_{AB} = 1/\sqrt{1 - v_{xAB}^2/c^2} \Rightarrow \gamma_{AB} = \frac{1}{\sqrt{1 - (-0,7c)^2/c^2}} \Rightarrow \boxed{\gamma_{AB} = 1,40}$$

Évaluons la vitesse selon l'axe  $y$  de l'électron **1** et du positron **2** selon l'observateur **B** à  $0,7c$ . Utilisons la transformation de Lorentz des vitesses perpendiculaires du référentiel de l'accélérateur **A** vers le référentiel de l'observateur **B** :

Avant la collision : (Référentiel **B**)

$$\text{Électron 1 : } v_{y1B} = \frac{v_{y1A}}{\gamma_{AB} \left(1 + \frac{v_{xAB}}{c^2} v_{x1A}\right)} \Rightarrow \boxed{v_{y1B} = 0} \quad (v_{y1A} = 0)$$

$$\text{Positron 2 : } v_{y2B} = \frac{v_{y2A}}{\gamma_{AB} \left(1 + \frac{v_{xAB}}{c^2} v_{x2A}\right)} \Rightarrow \boxed{v_{y2B} = 0} \quad (v_{y2A} = 0)$$

Après la collision : (Référentiel B)

$$\text{Électron 1 : } v_{y1B} = \frac{v_{y1A}}{\gamma_{AB} \left( 1 + \frac{v_{xAB}}{c^2} v_{x1A} \right)} \Rightarrow v_{y1B} = \frac{(0,7c)}{(1,40) \left( 1 + \frac{(-0,7c)}{c^2} (0) \right)} \Rightarrow \boxed{v_{y1B} = 0,5c}$$

$$\text{Positron 2 : } v_{y2B} = \frac{v_{y2A}}{\gamma_{AB} \left( 1 + \frac{v_{xAB}}{c^2} v_{x2A} \right)} \Rightarrow v_{y2B} = \frac{(-0,7c)}{(1,40) \left( 1 + \frac{(-0,7c)}{c^2} (0) \right)} \Rightarrow \boxed{v_{y2B} = -0,5c}$$

Évaluons maintenant le module des vitesses  $v_B$  de chaque particule avant et après la collision dans le référentiel B :

Avant la collision : (Référentiel B)

$$\text{Électron 1 : } v_{1B} = \sqrt{v_{x1B}^2 + v_{y1B}^2} \Rightarrow \boxed{v_{1B} = 0} \quad (v_{x1B} = 0, v_{y1B} = 0)$$

$$\text{Positron 2 : } v_{2B} = \sqrt{v_{x2B}^2 + v_{y2B}^2} \Rightarrow \boxed{v_{2B} = 0,9396c} \quad (v_{x2B} = -0,9396c, v_{y2B} = 0)$$

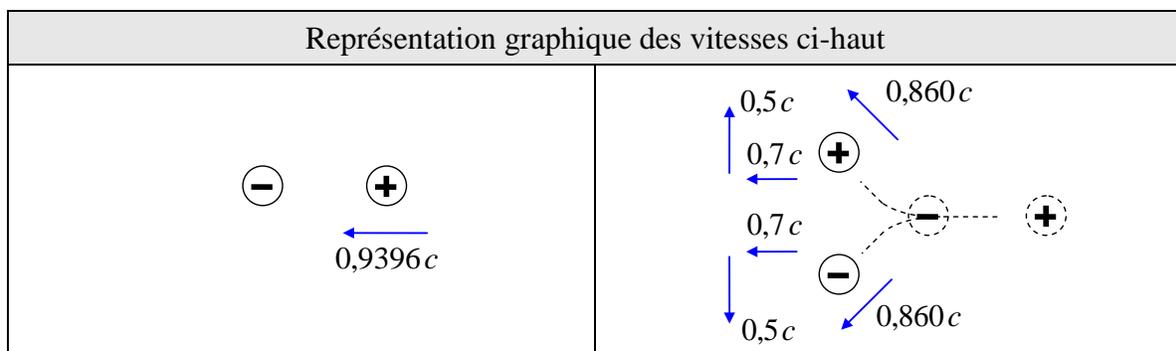
Après la collision : (Référentiel B)

$$\text{Électron 1 : } v_{1B} = \sqrt{v_{x1B}^2 + v_{y1B}^2} \Rightarrow v_{1B} = \sqrt{(-0,7c)^2 + (0,5c)^2} \Rightarrow \boxed{v_{1B} = 0,860c}$$

$$\text{Positron 2 : } v_{2B} = \sqrt{v_{x2B}^2 + v_{y2B}^2} \Rightarrow v_{2B} = \sqrt{(-0,7c)^2 + (-0,5c)^2} \Rightarrow \boxed{v_{2B} = 0,860c}$$

Voici un tableau synthèse des vitesses selon le référentiel de l'observateur à  $0,7c$  (B) :

Vitesses des particules (selon l'observateur B)			
Vitesse initiale		Vitesse finale	
l'électron	positron	l'électron	positron
$v_{x1B} = 0$ $v_{y1B} = 0$	$v_{x2B} = -0,9396c$ $v_{y2B} = 0$	$v_{x1B} = -0,7c$ $v_{y1B} = 0,5c$	$v_{x2B} = -0,7c$ $v_{y2A} = -0,5c$
$v_{1B} = 0$	$v_{2B} = 0,9396c$	$v_{1B} = 0,860c$	$v_{2B} = 0,860c$



Évaluons la quantité de mouvement relativiste  $p_x = \gamma m v_x$  selon l'axe  $x$  de chaque particule avant et après la collision selon le référentiel de l'observateur à  $0,7c$  (B) :

Avant la collision : (Référentiel B)

$$\begin{aligned} \text{Électron 1 : } p_{x1B} = \gamma_{1B} m_1 v_{x1B} &\Rightarrow p_{x1B} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{1B}^2 / c^2}} m_1 v_{x1B} & (\gamma_{1B} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{1B}^2 / c^2}}) \\ &\Rightarrow p_{x1B} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0)^2 / c^2}} (9,11 \times 10^{-31}) (0) \\ &\Rightarrow \boxed{p_{x1B} = 0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Positron : } p_{x2B} = \gamma_{2B} m_2 v_{x2B} &\Rightarrow p_{x2B} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{2B}^2 / c^2}} m_2 v_{x2B} & (\gamma_{2B} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{2B}^2 / c^2}}) \\ &\Rightarrow p_{x2B} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0,9396c)^2 / c^2}} (9,11 \times 10^{-31}) (-0,9396c) \\ &\Rightarrow \boxed{p_{x2B} = -7,503 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m/s}} \end{aligned}$$

Après la collision : (Référentiel B)

$$\begin{aligned} \text{Électron 1 : } p_{x1B} = \gamma_{1B} m_1 v_{x1B} &\Rightarrow p_{x1B} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{1B}^2 / c^2}} m_1 v_{x1B} & (\gamma_{1B} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{1B}^2 / c^2}}) \\ &\Rightarrow p_{x1B} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0,860c)^2 / c^2}} (9,11 \times 10^{-31}) (-0,7c) \\ &\Rightarrow \boxed{p_{x1B} = -3,749 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m/s}} \end{aligned}$$

$$\text{Positron 2 : } p_{x2B} = \gamma m_2 v_{x2B} \Rightarrow \boxed{p_{x2B} = -3,749 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m/s}} \quad (\text{Idem : } v_{x2B} = v_{x1B})$$

Nous observons qu'il y a conservation de la quantité de mouvement selon l'observateur B à  $0,7c$  :

$$\begin{aligned} \sum \vec{p}_f &= \sum \vec{p}_i &\Rightarrow p_{x1Bf} + p_{x2Bf} &= p_{x1Bi} + p_{x2Bi} \\ &&\Rightarrow (-3,749 \times 10^{-22}) + (-3,749 \times 10^{-22}) &= (0) + (-7,503 \times 10^{-22}) \\ &&\Rightarrow -7,50 \times 10^{-22} &= -7,50 \times 10^{-22} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

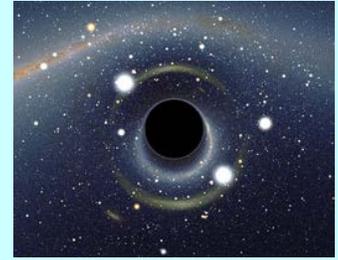
Ainsi, nous pouvons affirmer que la définition classique de la quantité de mouvement

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

ne peut pas être utilisée à haute vitesse<sup>1</sup>, car elle n'est plus conservée ce qui serait en contradiction avec le 1<sup>er</sup> postulat de la relativité.

<sup>1</sup> Dans l'exercice précédent, une définition classique de la quantité de mouvement ne serait pas conservée dans le référentielle B car le résultat serait :  $\sum \vec{p}_f = \sum \vec{p}_i \Rightarrow -3,826 \times 10^{-22} \neq -2,568 \times 10^{-22}$

**Situation B : La guerre des étoiles mortes, partie 1.** Dans une guerre futuriste où deux civilisations possèdent une technologie leur permettant de lancer des trous noirs (étoile morte très massive) à haute vitesse, deux trous noirs **A** et **B** se dirigent l'un vers l'autre. Selon la galaxie, le trou noir **A** ayant une masse  $m_A = 60 \times 10^{30}$  kg se déplace  $0,3 c$  et le trou noir **B** ayant une masse de  $m_B = 40 \times 10^{30}$  kg se déplace à  $0,5 c$ . Les deux trous noirs sont initialement espacés par une distance très grande (l'énergie gravitationnelle du système est nulle).



[http://fr.wikipedia.org/wiki/Trou\\_noir](http://fr.wikipedia.org/wiki/Trou_noir)  
Image simulée d'un trou noir stellaire.

On désire **(a)** évaluer la quantité de mouvement du système constitué des deux trous noirs **A** et **B** après la collision sachant qu'elle sera **parfaitement inélastique** et **(b)** peut-on évaluer la vitesse du système des deux trous noirs après la collision ? (Remarque : La masse solaire est de  $1,99 \times 10^{30}$  kg.)

Évaluons la quantité de mouvement du trou noir **A** considérant qu'il se déplace dans le sens positif de l'axe  $x$  :

$$p_{xAi} = \gamma_x m_A v_{xAi} \quad \Rightarrow \quad p_{xAi} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{xAi}^2 / c^2}} m_A v_{xAi} \quad (\text{Remplacer } \gamma = 1 / \sqrt{1 - v^2 / c^2})$$

$$\Rightarrow \quad p_{xAi} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0,3c)^2 / c^2}} m_A (0,3c) \quad (\text{Remplacer valeurs num.})$$

$$\Rightarrow \quad p_{xAi} = 0,3145 c m_A \quad (\text{Calcul})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{p_{xAi} = 5,661 \times 10^{39} \text{ kg} \cdot \text{m/s}} \quad (\text{Évaluer } p_{xAi})$$

Évaluons la quantité de mouvement du trou noir **B** considérant qu'il se déplace dans le sens négatif de l'axe  $x$  :

$$p_{xBi} = \gamma_x m_B v_{xBi} \quad \Rightarrow \quad p_{xBi} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{xBi}^2 / c^2}} m_B v_{xBi} \quad (\text{Remplacer } \gamma = 1 / \sqrt{1 - v^2 / c^2})$$

$$\Rightarrow \quad p_{xBi} = \frac{1}{\sqrt{1 - (-0,5c)^2 / c^2}} m_B (-0,5c) \quad (\text{Remplacer valeurs num.})$$

$$\Rightarrow \quad p_{xBi} = -0,5774 c m_B \quad (\text{Calcul})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{p_{xBi} = -6,929 \times 10^{39} \text{ kg} \cdot \text{m/s}} \quad (\text{Évaluer } p_{xBi})$$

Évaluons la quantité de mouvement du système composé des deux trous noirs après la collision en appliquant la conservation de la quantité de mouvement sachant que la force gravitationnelle est une force interne au système ne créant par d'impulsion externe  $J_{x\text{ext}}$  :

$$\begin{aligned}
 p_{xf} &= p_{xi} + J_{x\text{ext}} &\Rightarrow & p_{xAf} + p_{xBf} = p_{xAi} + p_{xBi} && (J_{x\text{ext}} = 0) \\
 & &\Rightarrow & p_{xA+Bf} = p_{xAi} + p_{xBi} && (\text{Collision parf. inélas.}) \\
 & &\Rightarrow & p_{xA+Bf} = (5,661 \times 10^{39}) + (-6,929 \times 10^{39}) && (\text{Remplacer val. num.}) \\
 & &\Rightarrow & \boxed{p_{xA+Bf} = -1,268 \times 10^{39} \text{ kg} \cdot \text{m/s}} && \text{(a) (Évaluer } p_{xA+Bf} \text{)}
 \end{aligned}$$

**(b)** Malheureusement, nous ne pouvons pas évaluer la vitesse du système des deux trous noirs avec l'équation

$$p_{xA+Bf} = \gamma_x m_{A+B} v_{xA+Bf} \quad \text{où} \quad \gamma_x = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{xA+Bf}^2 / c^2}}$$

en isolant  $v_{xA+Bf}$  dans l'équation, car nous ne savons pas quelle sera la masse du système après la collision. Ainsi,

$$m_{A+B} \neq m_A + m_B = 100 \times 10^{30} \text{ kg}$$

après une collision parfaitement inélastique.

Puisqu'un trou noir ne peut pas émettre de rayonnement<sup>2</sup> en première approximation car même la lumière ne peut s'en échapper, nous pouvons affirmer qu'une collision ne causera pas plus de perte d'énergie sous forme de radiation<sup>3</sup>. Cependant, nous ne savons pas comment l'énergie cinétique habituellement perdue lors d'une collision parfaitement inélastique sera transformée. La solution à cette énigme réside dans la fameuse relation masse-énergie

$$E = mc^2$$

d'Albert Einstein de 1905.

<sup>2</sup> Le rayonnement de Hawking (1975) permet à un trou noir de « s'évaporer » et ainsi diminuer son énergie.

<sup>3</sup> Dans les faits, puisqu'une collision entre deux trous noirs n'est pas instantanée, plusieurs processus complexes sont présents évacuant de l'énergie du système. Ainsi affirmer une collision sans perte est complètement faux, mais hautement difficile à quantifier. La présence d'ondes gravitationnelles démontrée expérimentalement en 2015 est l'un de ces processus.















# Chapitre 4.9b – La mécanique relativiste

## La 2<sup>e</sup> loi de Newton en relativité

En mécanique classique, l'accélération d'un objet est proportionnelle à la somme des forces appliquées sur l'objet et inversement proportionnelle à son inertie tel que

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad .$$

En mécanique relativiste, cette relation n'est plus valide, car la vitesse de l'objet influence l'efficacité de l'accélération par l'intermédiaire d'un facteur  $\gamma$ . La 2<sup>e</sup> loi de Newton en mécanique relativiste prendra alors la forme suivante :

$$\sum \vec{F} = \gamma m \vec{a} + \gamma^3 m \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \vec{v}$$

où  $\vec{F}$  : Force appliquée sur l'objet mesurée dans le référentiel (N)

$m$  : Masse de l'objet mesurée au repos (kg)

$\vec{a}$  : Accélération de l'objet dans le référentiel ( $\text{m/s}^2$ )

$\gamma$  : Le facteur gamma avec vitesse de l'objet

$$(\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2})$$

$\vec{v}$  : Vitesse de l'objet mesurée dans le référentiel (m/s)

$$(v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2})$$

$c$  : Vitesse de la lumière ( $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ )

### Preuve :

Pour démontrer la 2<sup>ième</sup> loi de Newton en relativité, nous aurons besoin de la règle de la dérivée en chaîne :

$$\frac{d}{dt}(XY) = Y \frac{d}{dt} X + X \frac{d}{dt} Y$$

Débutons notre preuve à l'aide de la définition de la 2<sup>ième</sup> loi de Newton :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = \frac{d(\gamma m \vec{v})}{dt} \quad (\text{Remplacer } \vec{p} = \gamma m \vec{v})$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F} = m \frac{d(\gamma \vec{v})}{dt} \quad (\text{Sortir la constante } m \text{ de la dérivée})$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F} = m \left( \vec{v} \frac{d\gamma}{dt} + \gamma \frac{d\vec{v}}{dt} \right) \quad (\text{Dérivée en chaîne : } \gamma = \gamma(t) \text{ et } \vec{v} = \vec{v}(t))$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F} = m \left( \vec{v} \frac{d\gamma}{dt} + \gamma \vec{a} \right) \quad (\text{Définition de l'accélération : } \vec{a} = d\vec{v}/dt)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{F} = \gamma m \vec{a} + m \vec{v} \frac{d\gamma}{dt}} \quad (\text{Distribuer } m)$$

Pour réaliser la dérivée du facteur  $\gamma$ , nous aurons besoin de la règle de dérivée d'un quotient : (nous utiliserons la version de droite)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{X}{Y} \right) = \frac{Y \frac{dX}{dt} - X \frac{dY}{dt}}{Y^2} \quad \text{ou bien} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{Y} \right) = -\frac{1}{Y^2} \frac{dY}{dt} \text{ lorsque } X = 1$$

Évaluons la dérivée du facteur  $\gamma$  par rapport au temps :

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) \quad (\text{Remplacer } \gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2})$$

$$\Rightarrow \frac{d\gamma}{dt} = -\frac{1}{(\sqrt{1-v^2/c^2})^2} \frac{d}{dt} (\sqrt{1-v^2/c^2}) \quad (\text{Règle de la dérivée d'un quotient})$$

$$\Rightarrow \frac{d\gamma}{dt} = \frac{-1}{1-v^2/c^2} \frac{d}{dt} (\sqrt{1-v^2/c^2}) \quad (\text{Simplifier la racine})$$

$$\Rightarrow \frac{d\gamma}{dt} = \frac{-1}{1-v^2/c^2} \left[ \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right] \frac{d}{dt} (1-v^2/c^2) \quad (\text{Appliquer } \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1})$$

$$\Rightarrow \frac{d\gamma}{dt} = \frac{-1}{2(1-v^2/c^2)^{3/2}} \frac{d}{dt} (1-v^2/c^2) \quad (\text{Mettre terme } 1-v^2/c^2 \text{ en commun})$$

$$\Rightarrow \frac{d\gamma}{dt} = \frac{-\gamma^3}{2} \frac{d}{dt} (1-v^2/c^2) \quad (\text{Remplacer } \gamma^3 = 1/(1-v^2/c^2)^{3/2})$$

$$\Rightarrow \frac{d\gamma}{dt} = \frac{-\gamma^3}{2} \left[ -\frac{2v}{c^2} \frac{d}{dt} (v) \right] \quad (\text{Appliquer } \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}, c \text{ est constant})$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\gamma^3 v}{c^2} \frac{dv}{dt}} \quad (\text{Simplification})$$

Évaluons maintenant la dérivée du module de la vitesse  $v$  par rapport au temps. Réécrivons le module de la vitesse à l'aide de la définition du produit scalaire :

$$v = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \quad (v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}})$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} (\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}) \quad (\text{Calculer } dv/dt)$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}} \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) \quad (\text{Appliquer } \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1})$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2v} \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) \quad (\text{Remplacer } v = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}})$$

Effectuons la dérivée en chaîne du produit scalaire  $\vec{v} \cdot \vec{v}$  :

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{2v} \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) \\ \Rightarrow \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{2v} \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \right) && \text{(Dérivée en chaîne : } \frac{d}{dt}(XY) = Y \frac{d}{dt} X + X \frac{d}{dt} Y \text{)} \\ \Rightarrow \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{2v} (\vec{a} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{a}) && \text{(Définition de l'accélération : } \vec{a} = d\vec{v}/dt \text{)} \\ \Rightarrow \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{2v} (\vec{v} \cdot \vec{a} + \vec{v} \cdot \vec{a}) && \text{(Commutativité du produit scalaire)} \\ \Rightarrow \boxed{\frac{dv}{dt} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{v}} &&& \text{(Simplification du facteur 2)} \end{aligned}$$

Introduisons ce résultat dans notre équation précédente et simplifions notre expression :

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} = \frac{\gamma^3 v}{c^2} \frac{dv}{dt} &\Rightarrow \frac{d\gamma}{dt} = \frac{\gamma^3 v}{c^2} \left( \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{v} \right) && \text{(Remplacer } dv/dt \text{)} \\ &\Rightarrow \boxed{\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\gamma^3 \vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2}} && \text{(Simplifier } v \text{)} \end{aligned}$$

Introduisons ce dernier résultat dans notre équation initiale et manipulons l'expression afin de retrouver la forme désirée :

$$\begin{aligned} \vec{F} = \gamma m \vec{a} + m \vec{v} \frac{d\gamma}{dt} &\Rightarrow \vec{F} = \gamma m \vec{a} + m \vec{v} \left( \frac{\gamma^3 \vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \right) && \text{(Remplacer } d\gamma/dt \text{)} \\ &\Rightarrow \vec{F} = \gamma m \vec{a} + \gamma^3 m \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \vec{v} \quad \blacksquare && \text{(Réécriture)} \end{aligned}$$

Remarque : L'orientation de l'accélération  $\vec{a}$  n'est plus parallèle à la force  $\vec{F}$ , car elle dépend du module et de l'orientation la vitesse  $\vec{v}$  de l'objet.

## La 2<sup>ème</sup> loi de Newton en relativité à une dimension : force parallèle

La définition précédente de la 2<sup>ème</sup> loi de Newton est la plus générale, car elle est exprimée vectoriellement. Lorsqu'un objet se déplace seulement selon l'axe  $x$  et qu'il subit la présence d'une force alignée uniquement selon l'axe  $x$  (force parallèle à la vitesse), alors la 2<sup>ème</sup> loi de Newton se simplifie à une équation à une dimension :

$$F_x = \gamma_x^3 m a_x$$

où  $F_x$  : Force appliquée sur l'objet mesurée dans le référentiel (N)

$m$  : Masse de l'objet mesurée au repos (kg)

$a_x$  : Accélération de l'objet selon l'axe  $x$  dans le référentiel ( $\text{m/s}^2$ )

$\gamma_x$  : Le facteur gamma avec vitesse de l'objet selon l'axe  $x$  ( $\gamma_x = 1/\sqrt{1 - v_x^2/c^2}$ )

$v_x$  : Vitesse de l'objet selon l'axe  $x$  mesurée dans le référentiel (m/s)

$c$  : Vitesse de la lumière ( $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ )

### Preuve :

À partir de la 2<sup>ème</sup> loi de Newton relativiste vectorielle, réduisons cette équation à l'application d'une force selon l'axe  $x$  sachant que l'objet se déplace uniquement selon l'axe  $x$ . Les termes suivants changeront d'écriture :

$$\vec{F} \rightarrow F_x \quad \gamma \rightarrow \gamma_x \quad \vec{v} \rightarrow v_x \quad \vec{a} \rightarrow a_x \quad \vec{v} \cdot \vec{a} \rightarrow v_x a_x$$

Alors :

$$\vec{F} = \gamma m \vec{a} + \gamma^3 m \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \vec{v} \quad (2^{\text{ème}} \text{ loi de Newton relativiste})$$

$$\Rightarrow F_x = \gamma_x m a_x + \gamma_x^3 m \frac{v_x a_x}{c^2} v_x \quad (\text{Remplacer les termes})$$

$$\Rightarrow F_x = \gamma_x m a_x + \gamma_x^3 m a_x \frac{v_x^2}{c^2} \quad (\text{Simplification et réécriture})$$

$$\Rightarrow F_x = \gamma_x^3 m a_x \left( \frac{1}{\gamma_x^2} + \frac{v_x^2}{c^2} \right) \quad (\text{Factoriser } \gamma_x^3 m a_x)$$

$$\Rightarrow F_x = \gamma_x^3 m a_x \left( \frac{c^2 - v_x^2}{c^2} + \frac{v_x^2}{c^2} \right) \quad (\text{Utiliser l'identité}^1 : \gamma_x^2 = \frac{c^2}{c^2 - v_x^2})$$

$$\Rightarrow F_x = \gamma_x^3 m a_x \quad \blacksquare \quad (\text{Simplification})$$

<sup>1</sup> Cette identité fut démontrée dans le chapitre 4.4.

## La 2<sup>ème</sup> loi de Newton en relativité à une dimension : force perpendiculaire

Lorsqu'un objet se déplace seulement selon l'axe  $x$  et qu'il subit la présence d'une force alignée uniquement selon l'axe  $y$  (force perpendiculaire à la vitesse), alors la 2<sup>ème</sup> loi de Newton se simplifie à une équation à une dimension :

$$F_y = \gamma_x m a_y$$

où  $F_y$  : Force appliquée sur l'objet selon l'axe  $y$  mesurée dans le référentiel (N)

$m$  : Masse de l'objet mesurée au repos (kg)

$a_y$  : Accélération de l'objet selon l'axe  $y$  ( $\text{m/s}^2$ )

$\gamma_x$  : Le facteur gamma avec vitesse de l'objet selon l'axe  $x$  ( $\gamma_x = 1/\sqrt{1 - v_x^2/c^2}$ )

$v_x$  : Vitesse de l'objet selon l'axe  $x$  mesurée dans le référentiel (m/s)

$c$  : Vitesse de la lumière ( $c = 3 \times 10^8$  m/s)

### Preuve :

Considérons un objet se déplaçant à vitesse  $v_x$  selon l'axe  $x$  et subissant une force  $F_y$  selon l'axe  $y$  perpendiculairement au sens de la vitesse. Évaluons la relation entre la force et l'accélération à partir de la 2<sup>ème</sup> loi de Newton relativiste :

$$\vec{F} \rightarrow F_y \vec{j} \quad \gamma \rightarrow \gamma_x \quad \vec{v} \rightarrow v_x \vec{i} \quad \vec{a} \rightarrow a_x \vec{i} + a_y \vec{j} \quad \vec{v} \cdot \vec{a} \rightarrow v_x a_x$$

Alors :

$$\vec{F} = \gamma m \vec{a} + \gamma^3 m \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \vec{v} \quad (2^{\text{ème}} \text{ loi de Newton relativiste})$$

$$\Rightarrow F_y \vec{j} = \gamma_x m (a_x \vec{i} + a_y \vec{j}) + \gamma_x^3 m \frac{v_x a_x}{c^2} v_x \vec{i} \quad (\text{Remplacer les termes})$$

$$\Rightarrow F_y \vec{j} = \left( \gamma_x m a_x + \gamma_x^3 m \frac{v_x a_x}{c^2} v_x \right) \vec{i} + \gamma_x m a_y \vec{j} \quad (\text{Isoler terme } \vec{i} \text{ et } \vec{j})$$

Puisque le côté gauche de l'équation est uniquement défini selon l'axe  $y$ , le côté droit de l'équation se doit d'avoir un terme nul selon l'axe  $x$ . Ainsi, nous pouvons affirmer que :

$$\gamma_x m a_x + \gamma_x^3 m \frac{v_x a_x}{c^2} v_x = 0$$

Ainsi, nous avons l'équation suivante qui peut être généralisée à toute forme de force perpendiculaire à la vitesse :

$$F_y \vec{j} = \gamma_x m a_y \vec{j} \quad (\text{Usage } \gamma_x m a_x + \gamma_x^3 m \frac{v_x a_x}{c^2} v_x = 0)$$

$$\Rightarrow F_y = \gamma_x m a_y \quad \blacksquare \quad (\text{Simplifier } \vec{j})$$

# L'énergie cinétique en relativité

À partir de la 2<sup>ième</sup> loi de Newton sous sa forme relativiste et de la définition du travail, nous pouvons évaluer l'augmentation de l'énergie cinétique d'un objet soumis à une force appliquée sur un déplacement :

$$K = (\gamma - 1)mc^2$$

où  $K$  : Énergie cinétique relativiste (J)

$m$  : Masse de l'objet au repos (kg)

$\gamma$  : Le facteur gamma avec vitesse de l'objet  $(\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2})$

$v$  : Vitesse de la particule (m/s)

$c$  : Vitesse de la lumière ( $c = 3 \times 10^8$  m/s)

## Preuve :

Débutons notre preuve avec la définition du travail et appliquons cette définition avec une force  $\vec{F}$  parallèle au déplacement infinitésimal  $d\vec{s}$  le long de l'axe  $x$ . Supposons que la vitesse est uniquement selon l'axe  $x$ . Ainsi notre expression générale de  $\gamma$  passera à  $\gamma_x$  :

$$\begin{aligned} W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} &\Rightarrow W = \int (F_x \vec{i}) \cdot (dx \vec{i}) && \text{(Remplacer } \vec{F} = F_x \vec{i}, d\vec{s} = dx \vec{i} \text{)} \\ &\Rightarrow W = \int F_x dx && \text{(Effectuer le produit scalaire)} \\ &\Rightarrow W = \int \gamma_x^3 m a_x dx && \text{(Remplacer } F_x = \gamma_x^3 m a_x \text{)} \\ &\Rightarrow W = \int \gamma_x^3 m \frac{dv_x}{dt} dx && \text{(Définition de l'accélération : } a_x = dv_x / dt \text{)} \\ &\Rightarrow W = \int \gamma_x^3 m dv_x \frac{dx}{dt} && \text{(Appliquer à } dx \text{ la dérivée du temps)} \\ &\Rightarrow W = \int \gamma_x^3 m dv_x v_x && \text{(Définition de la vitesse : } v_x = dx / dt \text{)} \\ &\Rightarrow \boxed{W = \int \frac{m v_x}{(1 - v_x^2 / c^2)^{3/2}} dv_x} && \text{(Remplacer } \gamma_x = 1/\sqrt{1 - v_x^2 / c^2} \text{)} \end{aligned}$$

Par définition, un objet qui possède une vitesse initiale nulle ne possède pas d'énergie cinétique. Appliquons notre travail  $W$  sur une particule initialement nulle et établissons une relation entre le travail et l'énergie cinétique finale :

$$\begin{aligned} W = \Delta K &\Rightarrow W = K_f - K_i && \text{(Remplacer } \Delta K = K - K_i \text{)} \\ &\Rightarrow W = K_f && \text{(Vitesse initiale nulle : } v = 0 \Rightarrow K_i = 0 \text{)} \\ &\Rightarrow \boxed{W = K} && \text{(} K = K_f \text{)} \end{aligned}$$

Voici l'intégrale à résoudre après avoir introduit l'expression du travail dans l'égalité  $W = K_f$ . Les bornes de l'intégrale sont définies entre 0 et  $v_x$  :

$$K = \int_{v_x=0}^{v_x} \frac{m v_x}{\left(1 - v_x^2 / c^2\right)^{3/2}} dv_x$$

(Borne intégrale :  $v_x = 0 \rightarrow v_x$ )

Pour résoudre l'intégrale, posons le changement de variable suivant :

$$u = 1 - v_x^2 / c^2 \quad \text{et} \quad du = -\frac{2v_x}{c^2} dv_x \quad \Rightarrow \quad -\frac{c^2 du}{2} = v_x dv_x$$

Évaluons la primitive de l'intégrale sans se soucier des bornes d'intégrations :

$$\begin{aligned} K &= \int \frac{m v_x}{\left(1 - v_x^2 / c^2\right)^{3/2}} dv_x \quad \Rightarrow \quad K = \int \frac{m(-c^2 du / 2)}{u^{3/2}} \quad (\text{Remplacer } v_x \rightarrow u) \\ &\Rightarrow \quad K = -\frac{mc^2}{2} \int \frac{du}{u^{3/2}} \quad (\text{Sortir les constantes de l'intégrale}) \\ &\Rightarrow \quad K = -\frac{mc^2}{2} \int u^{-3/2} du \quad (\text{Réécriture}) \\ &\Rightarrow \quad K = -\frac{mc^2}{2} \left[ \frac{u^{-1/2}}{-1/2} \right] \quad (\text{Appliquer } \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C) \\ &\Rightarrow \quad \boxed{K = mc^2 \left[ \frac{1}{u^{1/2}} \right]} \quad (\text{Simplification}) \end{aligned}$$

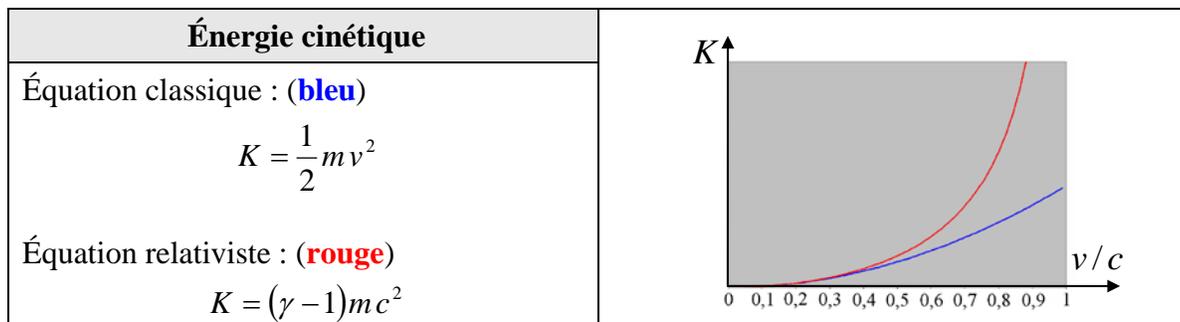
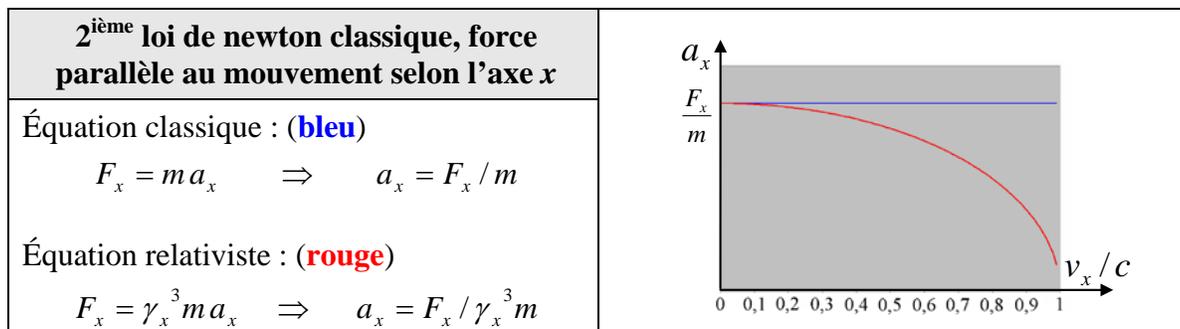
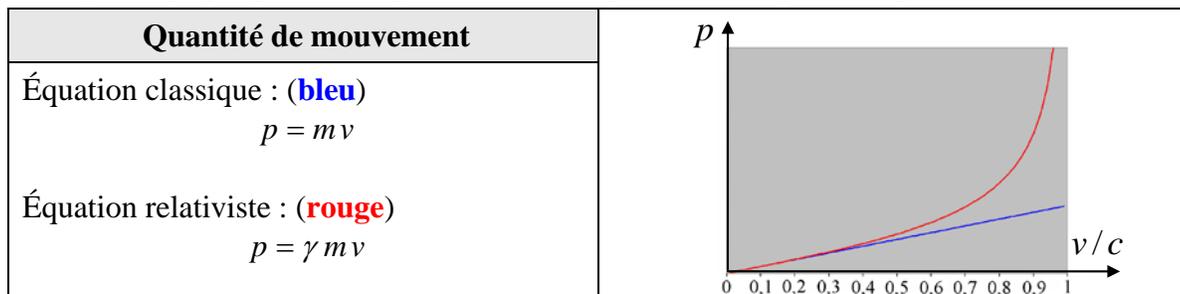
Effectuons notre changement de variable inverse ( $u \rightarrow v_x$ ) et évaluons les bornes de la solution de l'intégrale :

$$\begin{aligned} K &= \int_{v_x=0}^{v_x} \frac{m v_x}{\left(1 - v_x^2 / c^2\right)^{3/2}} dv_x \quad \Rightarrow \quad K = mc^2 \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - v_x^2 / c^2}} \right]_0^{v_x} \quad (\text{Résoudre l'intégrale et remplacer } u) \\ &\Rightarrow \quad K = mc^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v_x^2 / c^2}} - 1 \right) \quad (\text{Évaluer les bornes}) \\ &\Rightarrow \quad K = (\gamma_x - 1)mc^2 \quad \blacksquare \quad (\text{Remplacer } \gamma_x = 1 / \sqrt{1 - v_x^2 / c^2}) \end{aligned}$$

## Classique vs relativité

La mécanique classique (Newtonienne) représente une approximation à basse vitesse de la mécanique relativiste. Elle est valide seulement lorsque la vitesse de l'objet par rapport au référentiel de mesure est beaucoup inférieure à la vitesse de la lumière ( $v \ll c$ ).

Analysons graphiquement à quelle vitesse l'équation classique diverge de la solution relativiste :

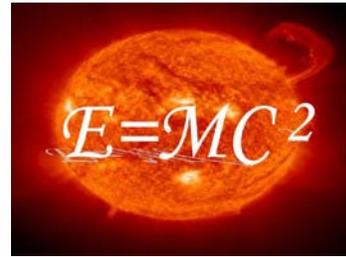


Vérifions que l'expression classique de l'énergie cinétique  $K$  peut s'obtenir à partir de l'expression relativiste et de l'approximation des petites vitesse : ( $v \ll c$ )

$$\begin{aligned}
 K = (\gamma - 1)mc^2 &\Rightarrow K = \gamma mc^2 - mc^2 && \text{(Distribuer } mc^2) \\
 &\Rightarrow K \approx \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)mc^2 - mc^2 && \left(\gamma \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2, v/c \ll 1\right) \\
 &\Rightarrow K \approx \frac{1}{2}mv^2 \quad \blacksquare && \text{(Simplification)}
 \end{aligned}$$

## L'hypothèse d'Albert Einstein

En analysant l'expression de l'énergie cinétique relativiste  $K = (\gamma - 1)mc^2$ , on réalise que cette expression peut être décomposée en deux termes : terme dépendant de la vitesse et terme indépendant de la vitesse. Albert Einstein émit l'hypothèse que l'expression indépendante de la vitesse menait à la découverte d'une nouvelle forme d'énergie jamais considérée auparavant : énergie de masse.



Bien qu'à première vue, cette énergie n'est que le résultat mathématique d'une constante d'intégration, elle fut observée lors d'expérience sur la force nucléaire plusieurs années plus tard.

Voici un calcul qui peut mener Albert Einstein au terme d'énergie de masse  $E_0$  :

$$\begin{aligned} K = (\gamma - 1)mc^2 &\quad \Rightarrow \quad K = \gamma mc^2 - mc^2 && \text{(Distribuer } mc^2 \text{)} \\ &\quad \Rightarrow \quad \gamma mc^2 = K + mc^2 && \text{(Isoler } \gamma mc^2 \text{)} \\ &\quad \Rightarrow \quad E = K + E_0 \quad \blacksquare && \text{(Remplacer } E = \gamma mc^2, E_0 = mc^2 \text{)} \end{aligned}$$

## L'énergie au repos

À partir de l'hypothèse d'Albert Einstein, on peut définir l'énergie de masse au repos  $E_0$  d'un corps grâce à l'expression suivante :

$$E_0 = mc^2$$

où  $E_0$  : Énergie de masse d'un objet au repos (J)

$m$  : Masse de l'objet au repos (kg)

$c$  : Vitesse de la lumière ( $c = 3 \times 10^8$  m/s)

## L'énergie totale relativiste

En relativité, nous pouvons définir l'énergie totale  $E$  associée à un corps en mouvement grâce à l'expression suivante. Cette énergie regroupe l'énergie cinétique  $K$  et énergie de masse  $E_0$  :

$$E = \gamma mc^2$$

où  $E$  : Énergie totale d'un objet en mouvement (J) ( $E = K + E_0$ )

$\gamma$  : Facteur gamma avec vitesse ordinaire de l'objet ( $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ )

$m$  : Masse de l'objet au repos (kg)

$c$  : Vitesse de la lumière ( $c = 3 \times 10^8$  m/s)

## L'énergie totale et la quantité de mouvement

À partir de l'énergie totale  $E$  associée à un corps, nous pouvons établir une relation entre cette énergie et la quantité de mouvement :

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

où  $E$  : L'énergie totale d'un objet (masse et cinétique) (J)

$p$  : Quantité de mouvement relativiste (kg · m/s)

$$(p = \gamma mv)$$

$m$  : Masse de l'objet au repos (kg)

$c$  : Vitesse de la lumière ( $c = 3 \times 10^8$  m/s)

### Preuve :

Développons l'expression de l'énergie totale  $E$  d'un objet se déplaçant selon l'axe  $x$  afin d'inclure la notion de quantité de mouvement :

$$E = \gamma mc^2 \quad \Rightarrow \quad E^2 = \gamma^2 m^2 c^4 \quad (\text{Mettre les équations aux carrés})$$

$$\Rightarrow \quad E^2 = m^2 c^4 \frac{1}{1 - v^2 / c^2} \quad (\text{Remplacer } \gamma = 1 / \sqrt{1 - v^2 / c^2} )$$

$$\Rightarrow \quad E^2 = m^2 c^4 \left( \frac{c^2}{c^2 - v^2} \right) \quad (\text{Multiplier par } c^2 / c^2 \text{ dans la parenthèse})$$

$$\Rightarrow \quad E^2 = m^2 c^4 \left( \frac{c^2 + v^2 - v^2}{c^2 - v^2} \right) \quad (\text{Ajouter zéro sous la forme } v^2 - v^2)$$

$$\Rightarrow \quad E^2 = m^2 c^4 \left( \frac{v^2}{c^2 - v^2} + \frac{c^2 - v^2}{c^2 - v^2} \right) \quad (\text{Réécriture})$$

$$\Rightarrow \quad E^2 = m^2 c^4 \left( \frac{v^2}{c^2 - v^2} + 1 \right) \quad (\text{Simplification})$$

$$\Rightarrow \quad E^2 = m^2 c^2 \left( \frac{c^2 v^2}{c^2 - v^2} + c^2 \right) \quad (\text{Distribuer } c^2)$$

$$\Rightarrow \quad E^2 = m^2 c^2 (\gamma^2 v^2 + c^2) \quad (\text{Remplacer } \gamma^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} )$$

$$\Rightarrow \quad E^2 = \gamma^2 m^2 v^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (\text{Distribuer } m^2 c^2)$$

$$\Rightarrow \quad E^2 = (\gamma mv)^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (\text{Réécriture})$$

$$\Rightarrow \quad E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad \blacksquare \quad (\text{Remplacer } p = \gamma mv)$$

**Situation A : La guerre des étoiles mortes, partie 2.** Reprenons la situation *La guerre des étoiles mortes, partie 1* et évaluons (a) la masse et (b) la vitesse du système formé par l'union des deux trous noirs **A** et **B** après la collision en supposant que la perte d'énergie gravitationnelle associée au rapprochement des deux trous noirs est négligeable comparativement à leur énergie cinétique et leur énergie de masse.

Voici un rappel des résultats obtenus dans la situation précédente :

	Corps	Masse $m$	Vitesse $v_x$	Quantité mouvement $p_x$
Avant	Trou A	$60 \times 10^{30}$ kg	$0,3c$	$5,661 \times 10^{39}$ kg · m/s
	Trou B	$40 \times 10^{30}$ kg	$-0,5c$	$-6,929 \times 10^{39}$ kg · m/s
Après	Système trou A et B	?	?	$-1,268 \times 10^{39}$ kg · m/s

Évaluons l'énergie totale des trous noirs **A** et **B** avant la collision :

$$E = \gamma mc^2 \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} mc^2$$

$$\bullet \quad E_A = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{xA}^2/c^2}} m_A c^2 \Rightarrow E_A = \frac{1}{\sqrt{1 - (0,3c)^2/c^2}} (60 \times 10^{30}) c^2 \Rightarrow \boxed{E_A = 5,661 \times 10^{48} \text{ J}}$$

$$\bullet \quad E_B = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{xB}^2/c^2}} m_B c^2 \Rightarrow E_B = \frac{1}{\sqrt{1 - (-0,5c)^2/c^2}} (40 \times 10^{30}) c^2 \Rightarrow \boxed{E_B = 4,157 \times 10^{48} \text{ J}}$$

Appliquons la conservation de l'énergie à l'union de nos deux trous noirs sans perte d'énergie même si la collision est parfaitement inélastique en négligeant les variations d'énergie gravitationnelle ( $\Delta U_g = 0$ ) :

$$\begin{aligned} E_f &= E_i + W & \Rightarrow & \quad E_{A+B} = E_A + E_B & (\Delta U_g = 0 \text{ et } W = 0) \\ & & \Rightarrow & \quad E_{A+B} = (5,661 \times 10^{48}) + (4,157 \times 10^{48}) & (\text{Remplacer}) \\ & & \Rightarrow & \quad \boxed{E_{A+B} = 9,818 \times 10^{48} \text{ J}} & (\text{Évaluer } E_{A+B}) \end{aligned}$$

Évaluons la masse de l'union de nos deux trous noirs :

$$\begin{aligned} E^2 &= p^2 c^2 + m^2 c^4 & \Rightarrow & \quad m = \sqrt{\frac{E^2 - p^2 c^2}{c^4}} & (\text{Isoler } m) \\ & & \Rightarrow & \quad m_{A+B} = \sqrt{\frac{(9,818 \times 10^{48})^2 - (-1,268 \times 10^{39})^2 c^2}{c^4}} & (\text{Remplacer}) \\ & & \Rightarrow & \quad \boxed{m_{A+B} = 109 \times 10^{30} \text{ kg}} & (\text{a}) \quad (\text{Évaluer } m_{A+B}) \end{aligned}$$

On réalise que la perte d'énergie cinétique résulte en **augmentation de la masse**.

Évaluons la vitesse de l'union des deux trous noirs en utilisant la quantité de mouvement et la masse trouvée :

$$p_x = \gamma_x m v_x \quad (\text{Quantité de mouvement relativiste})$$

$$\Rightarrow p_x = \frac{m v_x}{\sqrt{1 - v_x^2 / c^2}} \quad (\text{Remplacer } \gamma = 1 / \sqrt{1 - v^2 / c^2} )$$

$$\Rightarrow p_x^2 = \frac{m^2 v_x^2}{1 - v_x^2 / c^2} \quad (\text{Mettre au carré})$$

$$\Rightarrow p_x^2 (1 - v_x^2 / c^2) = m^2 v_x^2 \quad (\text{Retirer le dénominateur})$$

$$\Rightarrow p_x^2 - \frac{p_x^2 v_x^2}{c^2} = m^2 v_x^2 \quad (\text{Distribuer } p_x^2)$$

$$\Rightarrow p_x^2 = m^2 v_x^2 + \frac{p_x^2 v_x^2}{c^2} \quad (\text{Regrouper terme en } v_x^2)$$

$$\Rightarrow p_x^2 = v_x^2 \left( m^2 + \frac{p_x^2}{c^2} \right) \quad (\text{Factoriser } v_x^2)$$

$$\Rightarrow p_x^2 = v_x^2 \left( \frac{p_x^2 + m^2 c^2}{c^2} \right) \quad (\text{Dénominateur commun})$$

$$\Rightarrow v_x = \pm \sqrt{\frac{p_x^2 c^2}{p_x^2 + m^2 c^2}} \quad (\text{Isoler } v_x)$$

$$\Rightarrow v_{xA+B} = \pm \sqrt{\frac{(-1,268 \times 10^{39})^2 c^2}{(-1,268 \times 10^{39})^2 + (109 \times 10^{30})^2 c^2}} \quad (\text{Remplacer valeurs numériques})$$

$$\Rightarrow v_{xA+B} = -1,1624 \times 10^7 \text{ m/s} \quad (\text{Calcul})$$

$$\Rightarrow v_{xA+B} = -0,0387 c \quad (\mathbf{b}) \quad (\text{Évaluer } v_{xA+B})$$

Si l'on appliquait les lois de la mécanique classique ( $p_x = mv$ ) à cette collision parfaitement inélastique, le résultat sera égal à

$$v_{xA+B} = -0,02 c .$$

(avec calcul classique)









# Chapitre 4.X1 – La transformation relativiste de l'énergie et de la quantité de mouvement

## La transformation du facteur de Lorentz

Le facteur de Lorentz est présent dans la majorité des transformations en relativité restreinte. Ce facteur permet d'établir un lien entre deux référentiels mutuellement en mouvement relatif l'un par rapport à l'autre. Considérons un référentiel **O** correspondant à un objet en mouvement à vitesse  $\vec{v}_{OA}$  par rapport à un référentiel **A** ce qui permet d'obtenir le facteur de Lorentz  $\gamma_{OA}$ . Si le référentiel **A** est en mouvement à vitesse  $v_{xAB}$  selon l'axe  $x$  par rapport à un référentiel **B**, alors on peut transformer le facteur de Lorentz  $\gamma_{OA}$  vers le référentiel **B** sous l'expression  $\gamma_{OB}$  à l'aide de la transformation suivante :

$$\gamma_{OB} = \gamma_{OA} \gamma_{AB} \left( 1 + v_{xOA} v_{xAB} / c^2 \right)$$

avec  $\gamma_{OB} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{OB}^2 / c^2}}$ ,  $\gamma_{OA} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{OA}^2 / c^2}}$  et  $\gamma_{AB} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{xAB}^2 / c^2}}$

- et  $v_{OB}$  : Vitesse d'un objet **O** dans le référentiel **B**.  
 $v_{OA}$  : Vitesse d'un objet **O** dans le référentiel **A**.  
 $v_{xAB}$  : Vitesse relative du référentiel **A** par rapport au référentiel **B**.  
 $c$  : Vitesse de la lumière,  $c = 3 \times 10^8$  m/s.

### Preuve :

Effectuons la réécriture de la vitesse d'un objet **O** par rapport à un référentiel **B** à partir de la vitesse de cet objet **O** par rapport à un référentiel **A** sachant que le référentiel **A** est en mouvement à vitesse  $v_{xAB}$  par rapport au référentiel **B**. Pour ce faire, nous aurons besoin de la transformation des vitesses parallèles selon l'axe  $x$

$$v_{xB} = \frac{v_{xA} + v_{xAB}}{1 + \frac{v_{xA}}{c} \frac{v_{xAB}}{c}}$$

Ainsi que la transformation des vitesses perpendiculaire selon l'axe  $y$  et  $z$

$$v_{yB} = \frac{v_{yA}}{\gamma_{AB} \left( 1 + \frac{v_{xA}}{c} \frac{v_{xAB}}{c} \right)} \quad \text{et} \quad v_{zB} = \frac{v_{zA}}{\gamma_{AB} \left( 1 + \frac{v_{xA}}{c} \frac{v_{xAB}}{c} \right)}$$

Ainsi, nous avons l'expression suivante pour  $v_B^2$  :

$$v_B^2 = v_{xB}^2 + v_{yB}^2 + v_{zB}^2 \quad (\text{Décomposition } xyz \text{ de la vitesse selon B})$$

$$\Rightarrow v_B^2 = \left( \frac{v_{xA} + v_{xAB}}{1 + \frac{v_{xA} v_{xAB}}{c^2}} \right)^2 + v_{yB}^2 + v_{zB}^2 \quad (\text{Transformation vitesse parallèle selon } x)$$

$$\Rightarrow v_B^2 = \left( \frac{v_{xA} + v_{xAB}}{1 + \frac{v_{xA} v_{xAB}}{c^2}} \right)^2 + \left( \frac{v_{yA}}{\gamma_{AB} \left( 1 + \frac{v_{xA} v_{xAB}}{c^2} \right)} \right)^2 + \left( \frac{v_{zA}}{\gamma_{AB} \left( 1 + \frac{v_{xA} v_{xAB}}{c^2} \right)} \right)^2 \quad (\text{Trans. vitesse perpendi.})$$

$$\Rightarrow v_B^2 = \frac{v_{xA}^2}{\left( 1 + \frac{v_{xA} v_{xAB}}{c^2} \right)^2} + \frac{2v_{xA} v_{xAB}}{\left( 1 + \frac{v_{xA} v_{xAB}}{c^2} \right)^2} + \frac{v_{xAB}^2}{\left( 1 + \frac{v_{xA} v_{xAB}}{c^2} \right)^2} + \frac{v_{yA}^2}{\gamma_{AB}^2 \left( 1 + \frac{v_{xA} v_{xAB}}{c^2} \right)^2} + \frac{v_{zA}^2}{\gamma_{AB}^2 \left( 1 + \frac{v_{xA} v_{xAB}}{c^2} \right)^2} \quad (\text{Développer les carrés})$$

Effectuons le changement de variable

$$U = \left( 1 + \frac{v_{xA} v_{xAB}}{c^2} \right)^2$$

Pour simplifier notre expression de  $v_B^2$  et utilisons l'identité en relativité

$$\gamma_{AB}^2 = \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v_{xAB}^2 / c^2}} \right)^2 = \frac{1}{1 - v_{xAB}^2 / c^2} = \frac{c^2}{c^2 - v_{xAB}^2} .$$

Ainsi, nous obtenons l'expression suivante :

$$v_B^2 = \frac{v_{xA}^2}{U} + \frac{2v_{xA} v_{xAB}}{U} + \frac{v_{xAB}^2}{U} + \frac{v_{yA}^2}{\gamma_{AB}^2 U} + \frac{v_{zA}^2}{\gamma_{AB}^2 U} \quad (\text{Expression avec } U)$$

$$\Rightarrow v_B^2 = \frac{v_{xA}^2}{U} + \frac{2v_{xA} v_{xAB}}{U} + \frac{v_{xAB}^2}{U} + \frac{v_{yA}^2}{\left( \frac{c^2}{c^2 - v_{xAB}^2} \right) U} + \frac{v_{zA}^2}{\left( \frac{c^2}{c^2 - v_{xAB}^2} \right) U} \quad (\text{Identité } \gamma_{AB}^2)$$

$$\Rightarrow v_B^2 = \frac{v_{xA}^2}{U} + \frac{2v_{xA} v_{xAB}}{U} + \frac{v_{xAB}^2}{U} + \frac{v_{yA}^2 (c^2 - v_{xAB}^2)}{c^2 U} + \frac{v_{zA}^2 (c^2 - v_{xAB}^2)}{c^2 U} \quad (\text{Simplification dénomi.})$$

Effectuons la distribution des numérateurs et continuons la simplification :

$$v_B^2 = \frac{v_{xA}^2}{U} + \frac{2v_{xA}v_{xAB}}{U} + \frac{v_{xAB}^2}{U} + \frac{v_{yA}^2(c^2 - v_{xAB}^2)}{c^2U} + \frac{v_{zA}^2(c^2 - v_{xAB}^2)}{c^2U} \quad (\text{eq précéd.})$$

$$\Rightarrow v_B^2 = \frac{1}{c^2U} \left[ c^2v_{xA}^2 + 2c^2v_{xA}v_{xAB} + c^2v_{xAB}^2 + v_{yA}^2(c^2 - v_{xAB}^2) + v_{zA}^2(c^2 - v_{xAB}^2) \right] \quad (\text{Factoriser})$$

$$\Rightarrow v_B^2 = \frac{1}{c^2U} \left[ c^2v_{xA}^2 + 2c^2v_{xA}v_{xAB} + c^2v_{xAB}^2 + c^2v_{yA}^2 - v_{yA}^2v_{xAB}^2 + c^2v_{zA}^2 - v_{zA}^2v_{xAB}^2 \right] \quad (\text{Distribuer})$$

$$\Rightarrow v_B^2 = \frac{1}{c^2U} \left[ c^2(v_{xA}^2 + v_{yA}^2 + v_{zA}^2) + 2c^2v_{xA}v_{xAB} + c^2v_{xAB}^2 - v_{yA}^2v_{xAB}^2 - v_{zA}^2v_{xAB}^2 \right] \quad (\text{Factoriser } c^2)$$

$$\Rightarrow v_B^2 = \frac{1}{c^2U} \left[ c^2v_A^2 + 2c^2v_{xA}v_{xAB} + c^2v_{xAB}^2 - v_{yA}^2v_{xAB}^2 - v_{zA}^2v_{xAB}^2 \right] \quad (v_A^2 = v_{xA}^2 + v_{yA}^2 + v_{zA}^2)$$

$$\Rightarrow v_B^2 = \frac{1}{c^2U} \left[ c^2v_A^2 + 2c^2v_{xA}v_{xAB} + v_{xAB}^2(c^2 - v_{yA}^2 - v_{zA}^2) \right] \quad (\text{Factoriser } v_{xAB}^2)$$

Développons maintenant l'expression de  $U$  :

$$U = \left( 1 + \frac{v_{xA}}{c} \frac{v_{xAB}}{c} \right)^2 \Rightarrow U = \left( \frac{c^2 + v_{xA}v_{xAB}}{c^2} \right)^2 \Rightarrow U = \frac{(c^2 + v_{xA}v_{xAB})^2}{c^4}$$

Remplaçons le développement de  $U$  dans notre équation de  $v_B^2$  :

$$v_B^2 = \frac{1}{c^2U} \left[ c^2v_A^2 + 2c^2v_{xA}v_{xAB} + v_{xAB}^2(c^2 - v_{yA}^2 - v_{zA}^2) \right]$$

$$\Rightarrow v_B^2 = \frac{1}{c^2 \left( \frac{(c^2 + v_{xA}v_{xAB})^2}{c^4} \right)} \left[ c^2v_A^2 + 2c^2v_{xA}v_{xAB} + v_{xAB}^2(c^2 - v_{yA}^2 - v_{zA}^2) \right]$$

$$\Rightarrow v_B^2 = c^2 \frac{c^2v_A^2 + 2c^2v_{xA}v_{xAB} + v_{xAB}^2(c^2 - v_{yA}^2 - v_{zA}^2)}{(c^2 + v_{xA}v_{xAB})^2}$$

Remplaçons maintenant l'expression de  $v_B^2$  dans  $\gamma_B$  :

$$\gamma_B = \frac{1}{\sqrt{1 - v_B^2/c^2}}$$

$$\Rightarrow \gamma_B = \frac{1}{\sqrt{1 - c^2 \frac{c^2v_A^2 + 2c^2v_{xA}v_{xAB} + v_{xAB}^2(c^2 - v_{yA}^2 - v_{zA}^2)}{(c^2 + v_{xA}v_{xAB})^2} / c^2}} \quad (\text{Remplacer } v_B^2)$$

$$\Rightarrow \gamma_B = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{c^2 v_A^2 + 2c^2 v_{xA} v_{xAB} + v_{xAB}^2 (c^2 - v_{yA}^2 - v_{zA}^2)}{(c^2 + v_{xA} v_{xAB})^2}}} \quad (\text{Simplifier } c^2)$$

$$\Rightarrow \gamma_B = \frac{1}{\sqrt{\frac{(c^2 + v_{xA} v_{xAB})^2 - (c^2 v_A^2 + 2c^2 v_{xA} v_{xAB} + v_{xAB}^2 (c^2 - v_{yA}^2 - v_{zA}^2))}{(c^2 + v_{xA} v_{xAB})^2}}} \quad (\text{Dén. com.})$$

$$\Rightarrow \gamma_B = \frac{c^2 + v_{xA} v_{xAB}}{\sqrt{(c^2 + v_{xA} v_{xAB})^2 - (c^2 v_A^2 + 2c^2 v_{xA} v_{xAB} + v_{xAB}^2 (c^2 - v_{yA}^2 - v_{zA}^2))}} \quad (\text{Inverser frac. et effec. racine})$$

$$\Rightarrow \gamma_B = \frac{c^2 + v_{xA} v_{xAB}}{\sqrt{(c^2 + v_{xA} v_{xAB})^2 - c^2 v_A^2 - 2c^2 v_{xA} v_{xAB} + v_{xAB}^2 (-c^2 + v_{yA}^2 + v_{zA}^2)}} \quad (\text{Distribuer le négatif})$$

$$\Rightarrow \gamma_B = \frac{c^2 + v_{xA} v_{xAB}}{\sqrt{(c^4 + 2c^2 v_{xA} v_{xAB} + v_{xAB}^2 v_A^2) - c^2 v_A^2 - 2c^2 v_{xA} v_{xAB} + v_{xAB}^2 (-c^2 + v_{yA}^2 + v_{zA}^2)}} \quad (\text{Dével. le carré})$$

$$\Rightarrow \gamma_B = \frac{c^2 + v_{xA} v_{xAB}}{\sqrt{c^4 + v_{xA}^2 v_{xAB}^2 - c^2 v_A^2 + v_{xAB}^2 (-c^2 + v_{yA}^2 + v_{zA}^2)}} \quad (\text{Simplifier } 2c^2 v_{xA} v_{xAB})$$

$$\Rightarrow \gamma_B = \frac{c^2 + v_{xA} v_{xAB}}{\sqrt{c^4 - c^2 v_A^2 + v_{xAB}^2 (-c^2 + v_{xA}^2 + v_{yA}^2 + v_{zA}^2)}} \quad (\text{Factoriser } v_{xAB}^2)$$

$$\Rightarrow \gamma_B = \frac{c^2 + v_{xA} v_{xAB}}{\sqrt{c^4 - c^2 v_A^2 + v_{xAB}^2 (-c^2 + v_A^2)}} \quad (v_A^2 = v_{xA}^2 + v_{yA}^2 + v_{zA}^2)$$

$$\Rightarrow \gamma_B = \frac{c^2 + v_{xA} v_{xAB}}{\sqrt{c^4 - c^2 v_A^2 - c^2 v_{xAB}^2 + v_A^2 v_{xAB}^2}} \quad (\text{Distribuer } v_{xAB}^2)$$

$$\Rightarrow \gamma_B = \frac{c^2 + v_{xA} v_{xAB}}{\sqrt{(c^2 - v_{xAB}^2)(c^2 - v_A^2)}} \quad (\text{Compléter le carré})$$

$$\Rightarrow \gamma_B = \frac{c^2 + v_{xA} v_{xAB}}{\sqrt{(c^2 - v_{xAB}^2)} \sqrt{(c^2 - v_A^2)}} \quad (\text{Séparer racine})$$

$$\Rightarrow \gamma_B = \frac{c^2 + v_{xA} v_{xAB}}{\sqrt{c^2 \left(1 - \frac{v_{xAB}^2}{c^2}\right)} \sqrt{c^2 \left(1 - \frac{v_A^2}{c^2}\right)}} \quad (\text{Factoriser } c^2)$$

$$\Rightarrow \gamma_B = \frac{c^2 + v_{xA} v_{xAB}}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v_{xAB}^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}}} \quad (\text{Factoriser terme } c^2)$$

$$\Rightarrow \gamma_B = \frac{1 + v_{xA} v_{xAB} / c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_{xAB}^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}}} \quad (\text{Simplifier } c^2)$$

$$\Rightarrow \gamma_B = \gamma_A \gamma_{AB} \left( 1 + v_{xA} v_{xAB} / c^2 \right) \quad \blacksquare \quad \left( \gamma_A = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{xA}^2}{c^2}}} \text{ et } \gamma_{AB} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{xAB}^2}{c^2}}} \right)$$

## Transformation de Lorentz de l'énergie

En relativité restreinte, la transformation de l'énergie  $E_A$  d'une particule d'un référentiel **A** vers un référentiel **B** tel que le référentiel **A** est en mouvement à vitesse  $v_{xAB}$  par rapport au référentiel **B** nécessite également la quantité de mouvement  $p_{xA}$  selon le référentiel **A** :

$$E_B = \gamma_{AB} (E_A + v_{xAB} p_{xA})$$

où  $E_B$  : Énergie d'une particule selon un référentiel **B** (J).

$E_A$  : Énergie d'une particule selon un référentiel **A** (J).

$p_{xA}$  : Quantité de mouvement d'une particule selon un référentiel **A** (kg · m/s).

$v_{xAB}$  : Vitesse relative du référentiel **A** par rapport au référentiel **B**.

$\gamma_{AB}$  : Facteur de Lorentz pour transformer d'un référentiel **A** vers **B** ( $\gamma_{AB} = 1 / \sqrt{1 - v_{xAB}^2 / c^2}$ ).

### Preuve :

Soit une particule libre de masse  $m$  se déplaçant à vitesse  $\bar{v}_A$  selon un référentiel **A**. On peut déterminer son énergie par l'expression

$$E_A = \gamma_A mc^2 \quad \text{où} \quad \gamma_A = \frac{1}{\sqrt{1 - v_A^2 / c^2}} .$$

Dans un référentiel **B** observant cette même particule libre en mouvement à vitesse  $\bar{v}_B$  selon son référentiel, on peut déterminer son énergie par l'expression

$$E_B = \gamma_B mc^2 \quad \text{où} \quad \gamma_B = \frac{1}{\sqrt{1 - v_B^2 / c^2}} .$$

Sachant que le référentiel **A** est en mouvement à une vitesse relative  $v_{xAB}$  selon l'axe  $x$  par rapport au référentiel **B**, évaluons l'énergie  $E_B$  à partir de  $E_A$  en utilisant la transformation du facteur de Lorentz :

$$E_B = \gamma_B mc^2 \quad \Rightarrow \quad E_B = \left( \gamma_A \gamma_{AB} \left( 1 + v_{xA} v_{xAB} / c^2 \right) \right) mc^2 \quad (\text{Remplacer } \gamma_B = \gamma_A \gamma_{AB} \left( 1 + v_{xA} v_{xAB} / c^2 \right))$$

$$\Rightarrow \quad E_B = \gamma_{AB} \left( \gamma_A mc^2 + \gamma_A v_{xA} m v_{xAB} \right) \quad (\text{Distribution})$$

$$\Rightarrow \quad E_B = \gamma_{AB} (E_A + v_{xAB} p_{xA}) \quad \blacksquare \quad (E_A = \gamma_A mc^2 \text{ et } p_{xA} = \gamma_A m v_{xA})$$

## Transformation de Lorentz de la quantité de mouvement

En relativité restreinte, la transformation de la quantité de mouvement  $p_{xA}$  d'une particule d'un référentiel **A** vers un référentiel **B** tel que le référentiel **A** est en mouvement à vitesse  $v_{xAB}$  par rapport au référentiel **B** nécessite également l'énergie  $E_A$  de la particule selon le référentiel **A** :

$$p_{xB} = \gamma_{AB} \left( p_{xA} + \frac{v_{xAB} E_A}{c^2} \right)$$

où  $p_{xB}$  : Quantité de mouvement d'une particule selon un référentiel **B** (kg · m/s).

$p_{xA}$  : Quantité de mouvement d'une particule selon un référentiel **A** (kg · m/s).

$E_A$  : Énergie d'une particule selon un référentiel **A** (J).

$v_{xAB}$  : Vitesse relative du référentiel **A** par rapport au référentiel **B**.

$\gamma_{AB}$  : Facteur de Lorentz pour transformer d'un référentiel **A** vers **B** ( $\gamma_{AB} = 1/\sqrt{1 - v_{xAB}^2/c^2}$ ).

$c$  : Vitesse de la lumière,  $c = 3 \times 10^8$  m/s.

### Preuve :

Soit une particule libre de masse  $m$  se déplaçant à vitesse  $\vec{v}_A$  selon un référentiel **A**. On peut déterminer son énergie et sa quantité de mouvement par les expressions

$$E_A = \gamma_A m c^2, \quad p_{xA} = \gamma_A m v_{xA}, \quad p_{yA} = \gamma_A m v_{yA} \quad \text{et} \quad p_{zA} = \gamma_A m v_{zA} \quad \text{où} \quad \gamma_A = \frac{1}{\sqrt{1 - v_A^2/c^2}}.$$

Dans un référentiel **B** observant cette même particule libre en mouvement à vitesse  $\vec{v}_B$  selon son référentiel, on peut déterminer son énergie et sa quantité de mouvement par les expressions

$$E_B = \gamma_B m c^2, \quad p_{xB} = \gamma_B m v_{xB}, \quad p_{yB} = \gamma_B m v_{yB} \quad \text{et} \quad p_{zB} = \gamma_B m v_{zB} \quad \text{où} \quad \gamma_B = \frac{1}{\sqrt{1 - v_B^2/c^2}}.$$

Utilisons la transformation du facteur de Lorentz afin d'exprimer  $p_{xB}$  à partir des mesures selon le référentiel **A** :

$$\begin{aligned} p_{xB} &= \gamma_B m v_{xB} \\ \Rightarrow p_{xB} &= \left( \gamma_A \gamma_{AB} \left( 1 + v_{xA} v_{xAB} / c^2 \right) \right) m v_{xB} && \text{(Remplacer } \gamma_B = \gamma_A \gamma_{AB} (1 + v_{xA} v_{xAB} / c^2) \text{)} \\ \Rightarrow p_{xB} &= \gamma_A \gamma_{AB} \left( 1 + v_{xA} v_{xAB} / c^2 \right) m \left( \frac{v_{xA} + v_{xAB}}{1 + v_{xA} v_{xAB} / c^2} \right) && \text{(Remplacer } v_{xB} = \frac{v_{xA} + v_{xAB}}{1 + v_{xA} v_{xAB} / c^2} \text{)} \\ \Rightarrow p_{xB} &= \gamma_A \gamma_{AB} m (v_{xA} + v_{xAB}) && \text{(Simplifier terme } 1 + v_{xA} v_{xAB} / c^2 \text{)} \\ \Rightarrow p_{xB} &= \gamma_{AB} (\gamma_A m v_{xA} + \gamma_A m v_{xAB}) && \text{(Distribuer } \gamma_A \text{)} \\ \Rightarrow p_{xB} &= \gamma_{AB} \left( \gamma_A m v_{xA} + \frac{v_{xAB} \gamma_A m c^2}{c^2} \right) && \text{(Multiplier par } c^2 / c^2 \text{)} \\ \Rightarrow p_{xB} &= \gamma_{AB} \left( p_{xA} + \frac{v_{xAB} E_A}{c^2} \right) \quad \blacksquare && (E_A = \gamma_A m c^2 \text{ et } p_{xA} = \gamma_A m v_{xA}) \end{aligned}$$





# Chapitre 4.X2 – L'espace de Minkowski

## L'intervalle

En relativité, l'espace et le temps est indissociable. Pour tout événement, une mesure de  $x$  et  $t$  peut être réalisée par rapport à un référentiel, mais les valeurs de ces mesures dépendent du choix du référentiel.

Par contre, il est possible d'établir une relation spatiaux-temporelle portant le nom **d'intervalle** dénoté  $s^2$  mettant en lien la position  $x$  et le temps  $t$  d'un événement avec la vitesse de la lumière  $c$  et que le fruit de ce calcul soit un **invariant relativiste** (comme la vitesse de la lumière). Cela signifie que la mesure de l'intervalle  $s^2$  d'un événement aura la même valeur numérique peu importe le choix du référentiel en mouvement à vitesse constante selon l'axe  $x$ .



Hermann Minkowski  
(1864-1909)

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2$$

(à une dimension spatiale)

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

(à trois dimensions spatiales)

- où  $s^2$  : L'intervalle ( $m^2$ )  
 $x$  : Position de l'événement (m)  
 $t$  : Temps de l'événement (s)  
 $c$  : Vitesse de la lumière,  $c = 3 \times 10^8$  m/s

### Preuve :

Soit un référentiel **A** en mouvement à vitesse  $v_{xAB}$  par rapport à un référentiel **B** et un événement  $(x_A, t_A)$  mesuré par le référentiel **A** tel que la transformation de Lorentz suivante permet de transformer la mesure effectuée par **A** vers le référentiel **B** :

$$x_B = \gamma(x_A + v_{xAB} t_A) \quad \text{et} \quad t_B = \gamma\left(t_A + \frac{v_{xAB} x_A}{c^2}\right) \quad \text{où} \quad \gamma = \gamma_{AB} = \gamma_{BA}$$

Développons les expressions  $x_B^2$  et  $t_B^2$  en fonction de  $x_A$  et  $t_A$  :

- $x_B^2 = [\gamma(x_A + v_{xAB} t_A)]^2 \Rightarrow x_B^2 = \gamma^2(x_A + v_{xAB} t_A)^2$   
 $\Rightarrow \boxed{x_B^2 = \gamma^2(x_A^2 + 2x_A v_{xAB} t_A + v_{xAB}^2 t_A^2)}$
- $t_B^2 = \left[\gamma\left(t_A + \frac{v_{xAB} x_A}{c^2}\right)\right]^2 \Rightarrow t_B^2 = \gamma^2\left(t_A + \frac{v_{xAB} x_A}{c^2}\right)^2$   
 $\Rightarrow \boxed{t_B^2 = \gamma^2\left(t_A^2 + 2t_A \frac{v_{xAB} x_A}{c^2} + \frac{v_{xAB}^2 x_A^2}{c^4}\right)}$

Avant de débiter les calculs, rappelons l'identité

$$\gamma^2 = \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v_{xAB}^2 / c^2}} \right)^2 = \frac{1}{1 - v_{xAB}^2 / c^2} = \frac{c^2}{c^2 - v_{xAB}^2} .$$

Effectuons la construction de l'intervalle  $s^2$  à partir du référentiel **B** et vérifions qu'il y a égalité avec cette même expression à partir du référentiel **A**. Utilisons une définition dans la notation temps-position tel que

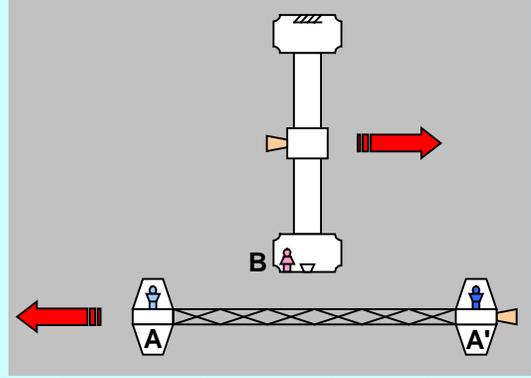
$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 .$$

Ainsi, démontrons que l'intervalle  $s_A^2 = s_B^2$  est un invariant sous une transformation de Lorentz :

$$\begin{aligned} s^2 &= c^2 t_B^2 - x_B^2 \\ \Rightarrow s^2 &= c^2 \gamma^2 \left( t_A^2 + 2t_A \frac{v_{xAB} x_A}{c^2} + \frac{v_{xAB}^2 x_A^2}{c^4} \right) - \gamma^2 \left( x_A^2 + 2x_A v_{xAB} t_A + v_{xAB}^2 t_A^2 \right) \\ \Rightarrow s^2 &= \gamma^2 \left[ c^2 \left( t_A^2 + 2t_A \frac{v_{xAB} x_A}{c^2} + \frac{v_{xAB}^2 x_A^2}{c^4} \right) - \left( x_A^2 + 2x_A v_{xAB} t_A + v_{xAB}^2 t_A^2 \right) \right] \\ \Rightarrow s^2 &= \frac{c^2}{c^2 - v_{xAB}^2} \left[ c^2 \left( t_A^2 + 2t_A \frac{v_{xAB} x_A}{c^2} + \frac{v_{xAB}^2 x_A^2}{c^4} \right) - \left( x_A^2 + 2x_A v_{xAB} t_A + v_{xAB}^2 t_A^2 \right) \right] \\ \Rightarrow s^2 &= \frac{1}{c^2 - v_{xAB}^2} \left[ \left( t_A^2 c^4 + 2t_A v_{xAB} x_A c^2 + v_{xAB}^2 x_A^2 \right) - \left( x_A^2 c^2 + 2x_A v_{xAB} t_A c^2 + v_{xAB}^2 t_A^2 c^2 \right) \right] \\ \Rightarrow s^2 &= \frac{1}{c^2 - v_{xAB}^2} \left[ t_A^2 c^4 + 2t_A v_{xAB} x_A c^2 + v_{xAB}^2 x_A^2 - x_A^2 c^2 - 2x_A v_{xAB} t_A c^2 - v_{xAB}^2 t_A^2 c^2 \right] \\ \Rightarrow s^2 &= \frac{1}{c^2 - v_{xAB}^2} \left[ t_A^2 c^4 + v_{xAB}^2 x_A^2 - x_A^2 c^2 - v_{xAB}^2 t_A^2 c^2 \right] \\ \Rightarrow s^2 &= \frac{1}{c^2 - v_{xAB}^2} \left[ t_A^2 c^4 - v_{xAB}^2 t_A^2 c^2 - x_A^2 c^2 + v_{xAB}^2 x_A^2 \right] \\ \Rightarrow s^2 &= \frac{1}{c^2 - v_{xAB}^2} \left[ c^2 t_A^2 (c^2 - v_{xAB}^2) - x_A^2 (c^2 - v_{xAB}^2) \right] \\ \Rightarrow s^2 &= c^2 t_A^2 - x_A^2 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

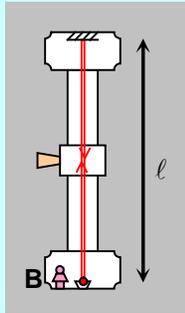
**Situation A : Le passage du Bellatrix devant l'Altair.**

Dans le *Bellatrix* (longueur au repos de 6 km), Béatrice (B) réalise une expérience qui consiste à émettre une lumière vers le haut de son vaisseau pour qu'elle réfléchisse sur un miroir située à l'autre extrémité du vaisseau afin que cette lumière puisse revenir vers elle. Pendant ce temps, un vaisseau spectateur de l'expérience portant le nom d'*Altair* (longueur au repos de 9 km) se déplace perpendiculairement à l'axe du *Bellatrix*.

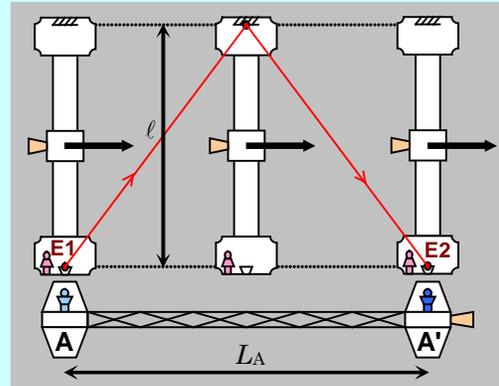


Mouvement dans l'espace du *Bellatrix* et de l'*Altair*.

La vitesse de l'*Altair* est ajustée afin que le pilote Albert (A) de constater l'émission de la lumière par Béatrice et au pilote Archibald (A') de constater la réception de la lumière par Béatrice (voir schéma ci-contre). On désire évaluer la vitesse de l'*Altair* par rapport au *Bellatrix* pour que les observations d'Albert et Archibald soit possible.



Cinématique de la lumière selon le *Bellatrix*.



Cinématique de la lumière selon l'*Altair*.

Évaluons le temps requis de l'expérience dans le référentiel du *Bellatrix* :

$$\begin{aligned} \Delta x &= v\Delta t & \Rightarrow & 2\ell = c\Delta t_B \\ & & \Rightarrow & 2(6 \times 10^3) = (3 \times 10^8)\Delta t_B \\ & & \Rightarrow & \boxed{\Delta t_B = 40 \times 10^{-6} \text{ s}} \end{aligned}$$

Évaluons l'intervalle (au carré) de l'expérience dans le référentiel du *Bellatrix* :

$$\begin{aligned} s^2 &= c^2 t^2 - x^2 & \Rightarrow & \Delta s^2 = c^2 \Delta t_B^2 - \Delta x_B^2 \\ & & \Rightarrow & \Delta s^2 = (3 \times 10^8)^2 (40 \times 10^{-6})^2 - (0)^2 \\ & & \Rightarrow & \boxed{\Delta s^2 = 144 \times 10^6 \text{ m}^2} \end{aligned}$$

À partir de l'invariance de l'intervalle, évaluons le temps requis dans le référentiel de l'*Altair* :

$$\begin{aligned} s^2 &= c^2 t^2 - x^2 & \Rightarrow & \Delta s^2 = c^2 \Delta t_A^2 - \Delta x_A^2 \\ & & \Rightarrow & (144 \times 10^6) = (3 \times 10^8)^2 \Delta t_A^2 - (9 \times 10^3)^2 \\ & & \Rightarrow & \boxed{\Delta t_A = 50 \times 10^{-6} \text{ s}} \end{aligned}$$

Évaluons la vitesse du *Bellatrix* par rapport à l'*Altair* (qui a le même module que la vitesse recherchée) :

$$\begin{aligned}
 v &= \frac{\Delta x}{\Delta t} & \Rightarrow & \quad v_{BA} = \frac{\Delta x_A}{\Delta t_A} \\
 & & \Rightarrow & \quad v_{BA} = \frac{(9 \times 10^3)}{(50 \times 10^{-6})} \\
 & & \Rightarrow & \quad v_{BA} = 1,8 \times 10^8 \text{ m/s} \\
 & & \Rightarrow & \quad \boxed{v_{BA} = 0,6c}
 \end{aligned}$$

## L'invariance de la masse

L'expression de l'énergie relativiste d'une particule libre

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

démontre un lien direct entre l'énergie, la quantité de mouvement et la masse d'une particule libre selon un référentiel donnée. De plus, à l'aide des transformations de Lorentz, on peut démontrer que la masse  $m$  de la particule est un invariant relativiste. Cependant, il devait en être ainsi, car la définition relativiste de la quantité de mouvement

$$p = \gamma m v$$

sous entendait que la masse se devait d'être un invariant. Pour des raisons pratiques<sup>1</sup>, on exprime l'invariance de la masse sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 m^2 c^2 &= E^2 / c^2 - p_x^2 & m^2 c^2 &= E^2 / c^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 \\
 &(\text{à une dimension spatiale}) & &(\text{à trois dimensions spatiales})
 \end{aligned}$$

- où
- $m$  : Masse de la particule (kg)
  - $E$  : L'énergie de la particule (J)
  - $p_x$  : Quantité de mouvement de la particule (kg · m/s)
  - $c$  : Vitesse de la lumière,  $c = 3 \times 10^8$  m/s

Remarque :  $m^2 c^2$  correspond à  $\frac{(mc^2)^2}{c^2}$  ce qui revient à des unités de  $\frac{J^2}{c^2}$  (joule<sup>2</sup> / c<sup>2</sup>).

### Preuve :

Soit un référentiel **A** en mouvement à vitesse  $v_{xAB}$  par rapport à un référentiel **B** et un événement  $(p_{xA}, E_A)$  permettant de mesurer la quantité de mouvement  $p_x$  et l'énergie  $E$  d'une particule libre de masse  $m$  par rapport à un référentiel **A**, la transformation de Lorentz suivante permet de transformer la mesure effectuée par **A** vers le référentiel **B** :

$$p_{xB} = \gamma_{AB} \left( p_{xA} + v_{xAB} \frac{E_A}{c^2} \right) \quad \text{et} \quad E_B = \gamma_{AB} (E_A + v_{xAB} p_{xA})$$

<sup>1</sup> Nous allons éventuellement justifier cette expression pour des raisons de symétrie.

Développons les expressions  $p_{xB}^2$  et  $E_B^2$  en fonction de  $p_{xA}$  et  $E_A$  :

- $[p_{xB}]^2 = \left[ \gamma_{AB} \left( p_{xA} + v_{xAB} \frac{E_A}{c^2} \right) \right]^2 \Rightarrow p_{xB}^2 = \gamma_{AB}^2 \left( p_{xA} + v_{xAB} \frac{E_A}{c^2} \right)^2$   
 $\Rightarrow \boxed{p_{xB}^2 = \gamma_{AB}^2 \left( p_{xA}^2 + 2p_{xA} v_{xAB} \frac{E_A}{c^2} + v_{xAB}^2 \frac{E_A^2}{c^4} \right)}$
- $[E_B]^2 = [\gamma_{AB} (E_A + v_{xAB} p_{xA})]^2 \Rightarrow E_B^2 = \gamma_{AB}^2 (E_A + v_{xAB} p_{xA})^2$   
 $\Rightarrow \boxed{E_B^2 = \gamma_{AB}^2 (E_A^2 + 2E_A v_{xAB} p_{xA} + v_{xAB}^2 p_{xA}^2)}$

Avant de débiter les calculs, rappelons l'identité

$$\gamma^2 = \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v_{xAB}^2 / c^2}} \right)^2 = \frac{1}{1 - v_{xAB}^2 / c^2} = \frac{c^2}{c^2 - v_{xAB}^2} .$$

Utilisons l'expression de l'énergie d'une particule libre

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

sous la forme

$$m^2 c^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2$$

afin de vérifier que  $m^2 c^2$  est un invariant dans le référentiel **A** et **B** : (avec  $p_B^2 = p_{xB}^2$ )

$$\begin{aligned} m^2 c^2 &= \frac{E_B^2}{c^2} - p_{xB}^2 \\ \Rightarrow m^2 c^2 &= \frac{\gamma_{AB}^2 (E_A^2 + 2E_A v_{xAB} p_{xA} + v_{xAB}^2 p_{xA}^2)}{c^2} - \gamma_{AB}^2 \left( p_{xA}^2 + 2p_{xA} v_{xAB} \frac{E_A}{c^2} + v_{xAB}^2 \frac{E_A^2}{c^4} \right) \\ \Rightarrow m^2 c^2 &= \gamma_{AB}^2 \left( \left( \frac{E_A^2 + 2E_A v_{xAB} p_{xA} + v_{xAB}^2 p_{xA}^2}{c^2} \right) - \left( p_{xA}^2 + 2p_{xA} v_{xAB} \frac{E_A}{c^2} + v_{xAB}^2 \frac{E_A^2}{c^4} \right) \right) \\ \Rightarrow m^2 c^2 &= \frac{\gamma_{AB}^2}{c^2} \left( (E_A^2 + 2E_A v_{xAB} p_{xA} + v_{xAB}^2 p_{xA}^2) - \left( c^2 p_{xA}^2 + 2p_{xA} v_{xAB} E_A + v_{xAB}^2 \frac{E_A^2}{c^2} \right) \right) \\ \Rightarrow m^2 c^2 &= \frac{\left( \frac{c^2}{c^2 - v_{xAB}^2} \right)}{c^2} \left( (E_A^2 + 2E_A v_{xAB} p_{xA} + v_{xAB}^2 p_{xA}^2) - \left( c^2 p_{xA}^2 + 2p_{xA} v_{xAB} E_A + v_{xAB}^2 \frac{E_A^2}{c^2} \right) \right) \\ \Rightarrow m^2 c^2 &= \frac{1}{c^2 - v_{xAB}^2} \left( (E_A^2 + 2E_A v_{xAB} p_{xA} + v_{xAB}^2 p_{xA}^2) - \left( c^2 p_{xA}^2 + 2p_{xA} v_{xAB} E_A + v_{xAB}^2 \frac{E_A^2}{c^2} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow m^2 c^2 &= \frac{1}{c^2 - v_{xAB}^2} \left( E_A^2 + 2E_A v_{xAB} p_{xA} + v_{xAB}^2 p_{xA}^2 - c^2 p_{xA}^2 - 2p_{xA} v_{xAB} E_A - v_{xAB}^2 \frac{E_A^2}{c^2} \right) \\
\Rightarrow m^2 c^2 &= \frac{1}{c^2 - v_{xAB}^2} \left( E_A^2 + v_{xAB}^2 p_{xA}^2 - c^2 p_{xA}^2 - v_{xAB}^2 \frac{E_A^2}{c^2} \right) \\
\Rightarrow m^2 c^2 &= \frac{1}{c^2 - v_{xAB}^2} \left( E_A^2 - v_{xAB}^2 \frac{E_A^2}{c^2} - c^2 p_{xA}^2 + v_{xAB}^2 p_{xA}^2 \right) \\
\Rightarrow m^2 c^2 &= \frac{E_A^2}{c^2} - p_{xA}^2 \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

## Le produit scalaire

Le produit scalaire est une opération permettant de transformer deux objets mathématique en scalaire. Pour des vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  à trois composantes, le produit scalaire est évalué de la façon suivante :

Interprétation géométrique	Composante xyz
$\vec{A} \cdot \vec{B} = \ \vec{A}\  \ \vec{B}\  \cos(\theta_{AB})$ <p>où <math>\theta_{AB}</math> est l'angle géométrique entre les vecteurs <math>\vec{A}</math> et <math>\vec{B}</math>.</p>	$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$
Produit matriciel	Produit tensoriel
$\vec{A} \cdot \vec{B} = A^T B$ $= \begin{pmatrix} A_x & A_y & A_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$ <p>où <math>A^T = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}^T = (A_x \quad A_y \quad A_z)</math>.</p>	$\vec{A} \cdot \vec{B} = A^\mu B_\mu$ $= A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2$ $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_\mu B^\mu$ $= A_0 B^0 + A_1 B^1 + A_2 B^2$ <p>où <math>A_\mu</math> est le tenseur covariant associé au tenseur contravariant <math>A^\mu</math>.</p>

Dans les quatre représentations équivalentes des vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$ , le résultat du produit scalaire dans un espace euclidien correspond à

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad .$$

# Le calcul du produit scalaire en espace euclidien

Dans l'espace euclidien à trois dimensions, le produit scalaire fait intervenir la **métrique identité**<sup>2</sup>  $I$  ayant les correspondances suivantes :

Matricielle	Tensorielle
$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$I^{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = \nu \\ 0 & \text{si } \mu \neq \nu \\ \mu, \nu \in \{0, 1, 2\} \end{cases}$ <p>(remarque : <math>I^{\mu\nu} = I_{\mu\nu}</math>)</p>

Cette métrique permet de calculer le produit scalaire entre un vecteur  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  de la façon suivante :

Notation matricielle	Notation tensorielle (en espace euclidien, le tenseur contravariant $A^\mu$ est identique au tenseur covariant $A_\mu$ )
$\vec{A} \cdot \vec{B} = A^T I B$ $= \begin{pmatrix} A_x & A_y & A_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$ $= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$	$\vec{A} \cdot \vec{B} = I_{\mu\nu} A^\mu B^\nu$ $= (I_{\mu\nu} A^\mu) B^\nu$ $= A_\nu B^\nu$ $= A_0 B^0 + A_1 B^1 + A_2 B^2$ $= A^0 B^0 + A^1 B^1 + A^2 B^2$ <p>où <math>A_\nu = I_{\mu\nu} A^\mu</math>            et <math>A_0 = I_{00} A^0 + I_{10} A^1 + I_{20} A^2 = A^0</math> ,  <math>A_1 = I_{01} A^0 + I_{11} A^1 + I_{21} A^2 = A^1</math> ,  <math>A_2 = I_{02} A^0 + I_{12} A^1 + I_{22} A^2 = A^2</math> .</p>

Lorsqu'on applique le produit scalaire en espace euclidien pour évaluer le module d'un vecteur  $\vec{A}$ , nous obtenons le résultat suivant peu importe la représentation mathématique utilisée :

$$\begin{aligned} \|\vec{A}\| &= \vec{A} \cdot \vec{A} \\ &= A_x A_x + A_y A_y + A_z A_z \\ &= A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \end{aligned}$$

<sup>2</sup> La métrique identité en notation tensorielle sera noté e  $I^{\mu\nu}$  puisqu'elle est d'ordre 2 (deux indices).

Voici le détail du calcul dans la représentation matricielle et tensorielle :

Notation matricielle	Notation tensorielle (en espace euclidien, le tenseur contravariant $A^\mu$ et le tenseur covariant $A_\mu$ sont identique)
$\begin{aligned} \ \vec{A}\ ^2 &= A^T I A \\ &= \begin{pmatrix} A_x & A_y & A_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \\ &= A_x A_x + A_y A_y + A_z A_z \\ &= A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \ \vec{A}\ ^2 &= I_{\mu\nu} A^\mu A^\nu \\ &= A_\nu A^\nu \\ &= A_0 A^0 + A_1 A^1 + A_2 A^2 \\ &= A^0 A^0 + A^1 A^1 + A^2 A^2 \\ &= (A^0)^2 + (A^1)^2 + (A^2)^2 \\ &= A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \end{aligned}$ <p>où <math>A^\mu = A_\mu</math> et <math>A^0 = A_x</math>, <math>A^1 = A_y</math>, <math>A^2 = A_z</math>.</p>

## Le module du vecteur position et quantité de mouvement dans espace euclidien

Dans l'espace euclidien en trois dimensions, le vecteur position  $\vec{r}$  correspond à

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

et le vecteur quantité de mouvement  $\vec{p}$  correspond à

$$\vec{p} = p_x\vec{i} + p_y\vec{j} + p_z\vec{k} .$$

Ainsi, le module de ces deux vecteurs sera alors

$$\|\vec{r}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{et} \quad \|\vec{p}\|^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 .$$

## Le quadrivecteur

Un quadrivecteur  $\vec{A}$  (*four-vector* en anglais) correspond un vecteur à 4 dimensions qui représente l'espace-temps. Habituellement, on associe aux 4 dimensions le temps  $t$ , l'espace  $x$ , l'espace  $y$  et l'espace  $z$ . Ce quadrivecteur peut être exprimé sous plusieurs :

Composante $xyzt$	Matrice colonne	Notation tensorielle (quadrivecteur contravariant à indice $\mu$ supérieur)
$\vec{A} = (A_t, A_x, A_y, A_z)$	$A = \begin{pmatrix} A_t \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$	$A^\mu$ où $A^0 = A_t, A^1 = A_x,$ $A^2 = A_y, A^3 = A_z$

En physique, on représente un événement relativiste à l'aide d'un quadrivecteur avec des composantes de même dimension. Puisque la vitesse de la lumière est la vitesse limite des particules, alors on peut construire des quadrivecteurs position espace-temps et des quadrivecteurs énergie-impulsion de la façon suivante :

Quadrivecteur espace-temps (unité d'espace-temps en m)		
Composante $xyzt$	Matrice colonne	Notation tensorielle
$\vec{r} = (ct, x, y, z)$	$\vec{r} = \begin{pmatrix} ct \\ r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}$	$r^\mu$ où $r^0 = ct, r^1 = x,$ $r^2 = y, r^3 = z$

Quadrivecteur énergie-impulsion (unité d'énergie-impulsion en $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ )		
Composante $xyzt$	Matrice colonne	Notation tensorielle
$\vec{p} = (E/c, p_x, p_y, p_z)$	$\vec{p} = \begin{pmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$	$p^\mu$ où $p^0 = E/c, p^1 = p_x,$ $p^2 = p_y, p^3 = p_z$

# Le calcul du produit scalaire dans l'espace de Minkowski

Dans l'espace de Minkowski à quatre dimensions, le produit scalaire fait intervenir la **métrique identité**<sup>3</sup>  $\eta$  ayant les correspondances suivantes :

Matricielle	Tensorielle
$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\eta^{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = \nu = 0 \\ -1 & \text{si } \mu = \nu \neq 0 \\ 0 & \text{si } \mu \neq \nu \\ \mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\} \end{cases}$ <p>(remarque : <math>\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}</math>)</p>

Cette métrique permet de calculer le produit scalaire entre un quadrivecteur  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  de la façon suivante :

Notation matricielle	Notation tensorielle (en espace euclidien, le tenseur contravariant $A^\mu$ est identique au tenseur covariant $A_\mu$ )
$\vec{A} \cdot \vec{B} = A^T \eta B$ $= \begin{pmatrix} A_t & A_x & A_y & A_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_t \\ B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} A_t & A_x & A_y & A_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_t \\ -B_x \\ -B_y \\ -B_z \end{pmatrix}$ $= A_t B_t - A_x B_x - A_y B_y - A_z B_z$	$\vec{A} \cdot \vec{B} = \eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu$ $= (\eta_{\mu\nu} A^\mu) B^\nu$ $= A_\nu B^\nu$ $= A_0 B^0 + A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3$ $= A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3$ <p>où <math>A_\nu = \eta_{\mu\nu} A^\mu</math>            et <math>A_0 = \eta_{00} A^0 + \eta_{10} A^1 + \eta_{20} A^2 + \eta_{30} A^3 = A^0</math> ,  <math>A_1 = \eta_{01} A^0 + \eta_{11} A^1 + \eta_{21} A^2 + \eta_{31} A^3 = -A^1</math> ,  <math>A_2 = \eta_{02} A^0 + \eta_{12} A^1 + \eta_{22} A^2 + \eta_{32} A^3 = -A^2</math> ,  <math>A_3 = \eta_{03} A^0 + \eta_{13} A^1 + \eta_{23} A^2 + \eta_{33} A^3 = -A^3</math> .</p>

Lorsqu'on applique le produit scalaire en espace de Minkowski pour évaluer le module d'un quadrivecteur  $\vec{A}$ , nous obtenons le résultat suivant peu importe la représentation mathématique :

$$\begin{aligned} \|\vec{A}\| &= \vec{A} \cdot \vec{A} \\ &= A_t A_t - A_x A_x - A_y A_y - A_z A_z \\ &= A_t^2 - A_x^2 - A_y^2 - A_z^2 \end{aligned}$$

<sup>3</sup> La métrique identité en notation tensorielle sera noté e  $I^{\mu\nu}$  puisqu'elle est d'ordre 2 (deux indices).

# Le module du quadrivecteur espace-temps et énergie-impulsion dans l'espace de Minkowski

L'espace de Minkowski permet de décrire un quadrivecteur espace-temps

$$\vec{r} = (ct, x, y, z)$$

et un quadrivecteur énergie-impulsion

$$\vec{p} = (E/c, p_x, p_y, p_z)$$

tel que le module de ces quadrivecteur

$$\|\vec{r}\|^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad \text{et} \quad \|\vec{p}\|^2 = E^2/c^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2$$

sont des invariants sous une transformation de Lorentz, car l'intervalle

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

et l'invariance de la masse

$$m^2 c^2 = E^2/c^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2$$

correspondent justement au module du quadrivecteur espace-temps  $\|\vec{r}\|^2$  et au module du quadrivecteur énergie impulsion  $\|\vec{p}\|^2$ . Cela signifie que sous une transformation de Lorentz, les valeurs associées au temps et à l'espace d'un vecteur  $\vec{r}$  va changer, mais le module  $\|\vec{r}\|^2$  restera inchangé peu importe le choix du référentiel.

## La réécriture des transformations de Lorentz

Avec le paramètre

$$\beta_{xAB} = v_{xAB} / c,$$

représentant le rapport entre la vitesse relative  $v_{xAB}$  d'un référentiel **A** selon un référentiel **B** selon l'axe  $x$  et la vitesse de la lumière  $c$ , nous pouvons effectuer la réécriture des transformations de Lorentz pour les mesures d'espace-temps  $x$  et  $t$  ainsi que pour les mesures d'énergie-impulsion  $E$  et  $p_x$ .

Version traditionnelle	Version $\beta_{xAB}$
$x_B = \gamma_{AB}(x_A + v_{xAB}t_A)$	$x_B = \gamma_{AB}(x_A + \beta_{xAB} ct_A)$
$t_B = \gamma_{AB}\left(t_A + \frac{v_{xAB}x_A}{c^2}\right)$	$ct_B = \gamma_{AB}(ct_A + \beta_{xAB} x_A)$
$E_B = \gamma_{AB}(E_A + v_{xAB}p_{xA})$	$E_B / c = \gamma_{AB}(E_A / c + \beta_{xAB} p_{xA})$
$p_{xB} = \gamma_{AB}\left(p_{xA} + \frac{v_{xAB}E_A}{c^2}\right)$	$p_{xB} = \gamma_{AB}(p_{xA} + \beta_{xAB} E_A / c)$

## La représentation des transformations de Lorentz sous forme matricielle et tensorielle

En raison de la structure mathématique de l'espace de Minkowski, nous pouvons effectuer une transformation de Lorentz d'un quadrivecteur espace-temps  $\vec{r} = (ct, x, y, z)$  et d'un quadrivecteur énergie-impulsion  $\vec{p} = (E/c, p_x, p_y, p_z)$  à l'aide d'un seul et même objet  $L_{xAB}$ . Selon le choix de sa représentation mathématique (matrice ou tenseur),  $L_{xAB}$  effectue la transformation de Lorentz sous l'opération mathématique de la multiplication à tout quadrivecteur devant être transformé vers un autre référentiel.

$L_{xAB}$ sous forme matricielle	$L_{xAB}$ sous forme tensorielle
$L_{xAB} = \begin{pmatrix} \gamma_{AB} & \beta_{xAB}\gamma_{AB} & 0 & 0 \\ \beta_{xAB}\gamma_{AB} & \gamma_{AB} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$L_{xAB\mu}{}^\nu = \begin{cases} \gamma_{AB} & \text{si } \mu = \nu = \{0, 1\} \\ 1 & \text{si } \mu = \nu = \{2, 3\} \\ \beta_{xAB} \gamma_{AB} & \text{si } \mu = 0 \text{ et } \nu = 1 \\ \beta_{xAB} \gamma_{AB} & \text{si } \mu = 1 \text{ et } \nu = 0 \\ \mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\} \end{cases}$ <p>(remarque : <math>L_{xAB\mu}{}^\nu = L_{xAB}{}^\mu{}_\nu</math>)</p>

où  $L_{xAB}$  est la matrice de la transformation de Lorentz permettant de transformer un vecteur d'un référentiel A vers un référentiel B tel que le référentiel A est en mouvement à vitesse  $v_{xAB}$  par rapport au référentiel B avec

$$\beta_{xAB} = \frac{v_{xAB}}{c} \quad \text{et} \quad \gamma_{AB} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_{xAB}^2}}$$

Le calcul de la transformation de Lorentz prendra alors la forme suivante :

Quadrivecteur transformé	Transformation de Lorentz sous forme matricielle	Transformation de Lorentz sous forme tensorielle
$\vec{r} = (ct, x, y, z)$	$r_B = L_{xAB} r_A$	$r_B{}^\mu = L_{xAB}{}^\mu{}_\nu r_A{}^\nu$ $r_B{}^\nu = L_{xAB\mu}{}^\nu r_A{}^\mu$ $(r_B{}^\mu = r_B{}^\nu)$
$\vec{p} = (E/c, p_x, p_y, p_z)$	$p_B = L_{xAB} p_A$	$p_B{}^\mu = L_{xAB}{}^\mu{}_\nu p_A{}^\nu$ $p_B{}^\nu = L_{xAB\mu}{}^\nu p_A{}^\mu$ $(p_B{}^\mu = p_B{}^\nu)$

Preuve : (sous forme matricielle)

Soit le quadrivecteur espace-temps  $\vec{r}_A = (ct_A, x_A, y_A, z_A)$  mesuré selon un référentiel **A**, appliquons une transformation de Lorentz vers le référentiel **B** tel que le référentiel **A** est en mouvement à vitesse  $v_{xAB}$  par rapport au référentiel **B** pour obtenir le quadrivecteur espace-temps  $\vec{r}_B$  dans le référentiel **B** et vérifions que cela respecte la transformation de Lorentz de l'espace et du temps :

$$\begin{aligned}
 r_B = L_{xAB} r_A &\Rightarrow \begin{pmatrix} ct_B \\ x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{AB} & \beta_{xAB} \gamma_{AB} & 0 & 0 \\ \beta_{xAB} \gamma_{AB} & \gamma_{AB} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct_A \\ x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} && \text{(Remplacer valeurs)} \\
 &\Rightarrow \begin{pmatrix} ct_B \\ x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct_A \gamma_{AB} + \beta_{xAB} \gamma_{AB} x_A \\ \beta_{xAB} \gamma_{AB} ct_A + \gamma_{AB} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} && \text{(Effectuer produit matriciel)} \\
 &\Rightarrow \begin{pmatrix} ct_B \\ x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{AB} (ct_A + \beta_{xAB} x_A) \\ \gamma_{AB} (\beta_{xAB} ct_A + x_A) \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} && \text{(Factoriser } \gamma_{AB} \text{)} \\
 &\Rightarrow \begin{pmatrix} ct_B \\ x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{AB} (ct_A + \beta_{xAB} x_A) \\ \gamma_{AB} (x_A + \beta_{xAB} ct_A) \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} && \blacksquare \text{ (Réécriture)}
 \end{aligned}$$

On peut également convertir ce résultat pour obtenir la forme traditionnelle des transformations de Lorentz :

$$\begin{aligned}
 r_B = L_{xAB} r_A &\Rightarrow \begin{pmatrix} ct_B \\ x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{AB} \left( ct_A + \frac{v_{xAB} x_A}{c} \right) \\ \gamma_{AB} \left( x_A + \frac{v_{xAB} ct_A}{c} \right) \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} && \text{(Remplacer } \beta_{xAB} = \frac{v_{xAB}}{c} \text{)} \\
 &\Rightarrow \begin{pmatrix} ct_B \\ x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{AB} \left( t_A + \frac{v_{xAB} x_A}{c^2} \right) \\ \gamma_{AB} (x_A + v_{xAB} t_A) \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} && \text{(Simplifier } c \text{)}
 \end{aligned}$$

On peut également démontrer que cela fonctionne également pour le quadrivecteur énergie-impulsion. Cependant, cette étape est laissée à la discrétion du lecteur.







# Chapitre 5.1 – Les photons et l'effet photoélectrique

## L'intensité d'une onde électromagnétique

En 1884, le physicien britannique John Henry Poynting a démontré à partir des équations de Maxwell que l'intensité d'un champ électromagnétique dans le vide est définie par l'équation suivante :

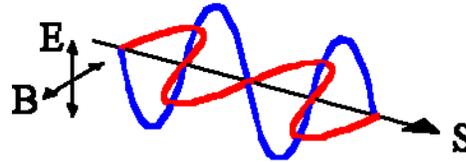
$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$



J.H. Poynting  
(1852-1914)

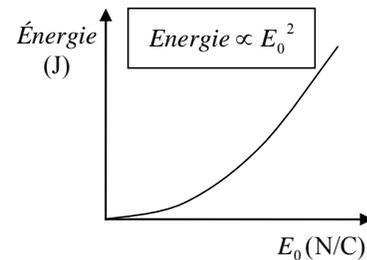
- où  $\vec{S}$  : L'intensité du champ électromagnétique dans le vide (vecteur de Poynting) ( $\text{W/m}^2$ )  
 $\vec{E}$  : Champ électrique évalué à l'endroit du vecteur de Poynting ( $\text{N/C}$ )  
 $\vec{B}$  : Champ magnétique évalué à l'endroit du vecteur de Poynting ( $\text{T}$ )  
 $\mu_0$  : Constante magnétique du vide (*Perméabilité du vide*),  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N s}^2/\text{C}^2$

Sur le schéma ci-contre est représenté le vecteur de Poynting  $\vec{S}$  issu d'un produit vectoriel entre le champ électrique  $\vec{E}$  et le champ magnétique  $\vec{B}$  associés à une onde électromagnétique.



## L'intensité classique de la lumière monochromatique

En **physique classique**, on interprète la **lumière monochromatique** comme étant une onde électromagnétique pouvant transporter une **énergie** proportionnelle au **carré de l'amplitude maximale** du **champ électrique** sinusoïdale  $E_0$  propageant l'onde électromagnétique. Ce résultat est basé sur la valeur moyenne du vecteur de Poynting d'une onde électromagnétique.



Dans le cas d'une onde électromagnétique plane sinusoïdale de la forme  $E = E_0 \sin(\omega t + \phi)$  voyageant dans le vide, la valeur moyenne du vecteur de Poynting est donnée par :

$$\bar{S} = \frac{\epsilon_0 c}{2} E_0^2$$

- où  $\bar{S}$  : Intensité moyenne de l'onde électromagnétique ( $\text{W/m}^2$ )  
 $E_0$  : Module du champ électrique maximal de l'onde électromagnétique ( $\text{N/C}$ )  
 $c$  : Vitesse de la lumière ( $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ )  
 $\epsilon_0$  : Constante électrique ( $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$ )

# L'effet photoélectrique

En 1886, le physicien allemand Heinrich Rudolf Hertz réalisa expérimentalement qu'un **matériau métallique exposé à la lumière** pouvait **émittre des particules chargées négativement** (qui porteront le nom « d'électron »). Cette découverte fut baptisée au nom de **l'effet photoélectrique**. Malheureusement, Hertz ne fut pas en mesure d'expliquer théoriquement le phénomène, car certaines caractéristiques de cet effet ne fonctionnaient pas avec la théorie classique de l'électromagnétisme de l'époque.

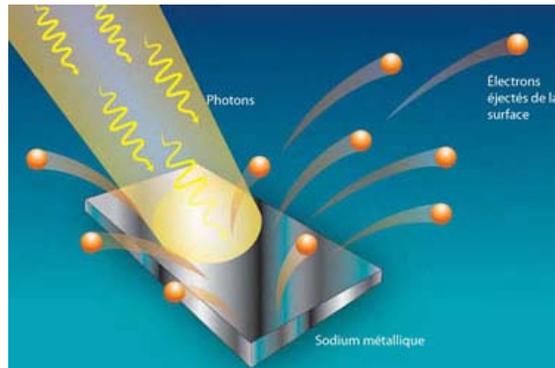


H. R. Hertz  
(1857-1894)

## Description électromagnétique du phénomène :

Un électron lié à une structure possède une énergie potentielle électrique  $U_e$  négative et la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle électrique est également négative ( $K + U_e < 0$ ).

Pour éjecter des électrons de la structure, il faut fournir beaucoup d'énergie aux électrons. Dans ce phénomène, l'énergie acquise par les électrons provient du champ électromagnétique de la lumière.



Éjection d'électrons d'une plaque métallique de sodium par effet photoélectrique sous la présence d'une source lumineuse.

Après absorption de la lumière, le gain d'énergie de l'électron se transforme en énergie cinétique et l'électron se déplace plus rapidement. Il peut ainsi s'éloigner de la structure en augmentant son énergie potentielle ce qui réduit son énergie cinétique. L'électron sera éjecté si son énergie totale (après le travail  $W$  de la lumière) est supérieure à zéro (éjection d'un électron si :  $K_i + U_{ei} + W > 0$ ).

## Application de la collision d'un photon

De nos jours, une variante à l'effet photoélectrique est utilisée dans plusieurs composantes électroniques (les électrons ne sont pas éjectés, mais subissent des variations d'énergie potentielles électriques pouvant générer des courants électriques).

### Cellule photoélectrique :

Capteur photosensible dont la résistance varie selon l'exposition à la lumière. Cette cellule est utilisée par exemple pour activer des systèmes d'éclairage automatisés.



Détecteur de luminosité

### Cellule photovoltaïque :

Composante électronique qui génère une tension électrique de l'ordre de 0,5 V lorsqu'elle est exposée à la lumière. Cette cellule est utilisée par exemple dans les panneaux solaires.



Panneau solaire

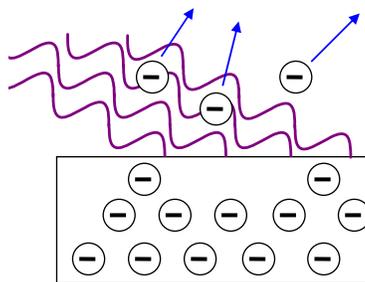
# Caractéristique de l'effet photoélectrique

Malgré l'expertise de l'époque en électromagnétisme, l'effet photoélectrique demeurait incompris théoriquement pour la raison suivante :

## 1) Longueur d'onde très courte :

Lorsque la longueur d'onde est très courte (fréquence élevée), le nombre d'électron éjecté est proportionnel à l'intensité de la lumière.

Exemple : éjection d'un très grand nombre d'électron sous l'exposition d'une lumière violette ( $\lambda = 400 \text{ nm}$ ) sur une plaque de sodium.

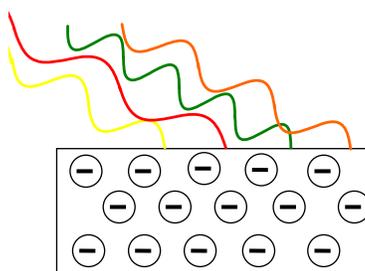


Lumière à longueur d'onde suffisamment petite permettant d'éjecter des électrons.

## 2) Longueur d'onde trop longue :

Lorsque la **longueur d'onde** est **trop grande** (basse fréquence), il n'y a **pas d'électron éjecté** de la structure **même si l'intensité lumineuse est très élevée**.

Exemple : Aucun électron éjecté pour une plaque de sodium exposé à la lumière rouge ( $\lambda = 700 \text{ nm}$ ), la lumière orange ( $\lambda = 650 \text{ nm}$ ), la lumière jaune ( $\lambda = 600 \text{ nm}$ ) et la lumière verte ( $\lambda = 550 \text{ nm}$ ).

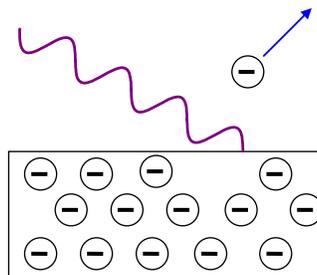


Lumière à trop grande longueur d'onde ne permettant pas d'éjecter un électron.

## 3) Longueur d'onde inférieure au seuil

Lorsque la **longueur d'onde** est **inférieure** à la **longueur d'onde de seuil** (fréquence supérieure à la fréquence de seuil), il y a des **électrons éjectés** de la structure même si l'intensité lumineuse est très faible.

Exemple : La longueur d'onde de seuil du sodium est égale à  $\lambda_0 = 460 \text{ nm}$ .



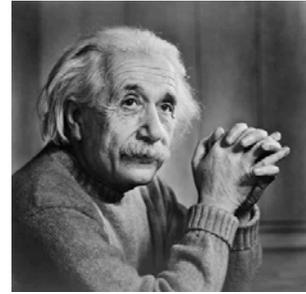
Même à faible intensité, une lumière à longueur d'onde inférieure à la longueur d'onde de seuil permet d'éjecter des électrons.

## La conclusion :

La **longueur d'onde**  $\lambda$  de la lumière est un **paramètre très important** dans l'**explication** théorique de l'**effet photoélectrique**. Puisque la théorie de l'électromagnétisme classique considère la longueur d'onde seulement dans le calcul de l'énergie moyenne, on réalise que cette théorie est insuffisante pour expliquer complètement le phénomène.

# La quantification de la lumière

Après l'exploit théorique réalisé par Max Planck en 1900 sur son interprétation du spectre du corps noir<sup>1</sup>, Albert Einstein **généralisa** en 1905 le concept de **perte d'énergie électromagnétique** par **quanta** **au transport d'énergie** de la **lumière** par **quanta**. Selon Albert Einstein, si un corps noir perdait de l'énergie lumineuse par quanta, alors la lumière devait uniquement transporter de l'énergie par quanta. On peut résumer le **quanta d'énergie** à une **quantité d'énergie finie** transportée par **une seule particule**.



Albert Einstein  
(1879-1955)

Cette hypothèse a permis à Albert Einstein d'introduire la notion de « photon » :

*Le photon est une onde-particule qui transporte l'énergie du champ électromagnétique par quanta d'énergie.*

## Le quanta d'énergie du photon

Grâce à l'hypothèse de la quantification de la lumière effectuée par Albert Einstein, la lumière est maintenant considérée comme étant un faisceau d'onde-particules nommés « photon » se déplaçant chacun à la vitesse de la lumière<sup>2</sup>  $c$  et transportant chacun une quantité d'énergie unique quantifiée  $E_\gamma$  qui est égale à la fréquence  $f$  du photon multiplié par le quanta d'énergie fondamentale  $h$  qui est la constante de Planck :

En fréquence :

$$E_\gamma = h f$$

En longueur d'onde :

$$E_\gamma = \frac{hc}{\lambda}$$

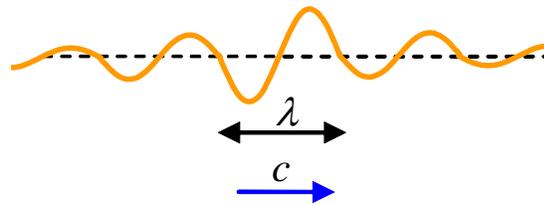
où  $E_\gamma$  : Énergie transportée par le photon (J)

$f$  : Fréquence du photon ( $s^{-1}$  ou Hz)

$\lambda$  : Longueur d'onde de la lumière (m)

$h$  : Constante de Planck ( $6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ )

$c$  : Vitesse de la lumière ( $3 \times 10^8 \text{ m/s}$ )



**N.B.** En physique, on utilise la lettre grecque  $\gamma$  (gamma) pour désigner le photon.

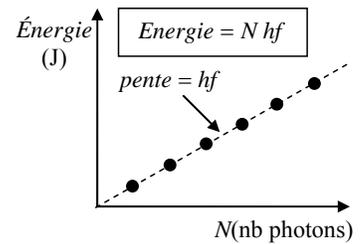
<sup>1</sup> Le spectre du corps noir expliqué par Max Planck sera présenté dans le chapitre 5.3

<sup>2</sup> Certaines théories tentent de prouver que la vitesse d'un photon n'est pas toujours égale à  $c$ . Cependant, la vitesse moyenne  $\bar{v}$  d'un groupe de photons (la lumière) est toujours égale à  $c$ .

## La quantification de l'énergie de lumière monochromatique

En **physique quantique**, on interprète la **lumière monochromatique** comme étant un groupe de  $N$  photons transportant chacun une **énergie quantifiée** égale à  $hf$ . Une lumière monochromatique peut uniquement transporter une énergie qui est un **multiple entier**  $N$  de photons ayant un quanta d'énergie  $hf$  :

$$E_f = N hf$$



où  $E_f$  : Énergie totale d'une source de lumière monochromatique (J)

$N$  : Nombre de photons constituant la source de lumière monochromatique

$f$  : Fréquence de la lumière monochromatique ou des photons ( $s^{-1}$  ou Hz)

$h$  : Constante de Planck ( $6,63 \times 10^{-34}$  J · s)

**Situation 1 : Le nombre de photons émis par un laser.** Un laser hélium-néon émet un faisceau de lumière de 0,1 watt dont la longueur d'onde est égale à 633 nm. On désire déterminer le nombre de photons émis par le laser à chaque minute.

Évaluons l'énergie d'un photon :

$$E_\gamma = \frac{hc}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad E_\gamma = \frac{(6,63 \times 10^{-34})(3 \times 10^8)}{(633 \times 10^{-9})} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_\gamma = 3,142 \times 10^{-19} \text{ J}}$$

Évaluons l'énergie lumineuse dégagée par le laser durant une minute :

$$E_f = Pt \quad \Rightarrow \quad E_f = (0,1)(60) \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_f = 6 \text{ J}}$$

Évaluons le nombre de photon émis par le laser durant une minute :

$$E_f = NE_\gamma \quad \Rightarrow \quad (6) = N(3,142 \times 10^{-19}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{N = 1,910 \times 10^{19} \text{ photons}}$$

## La quantification d'énergie d'une source de la lumière quelconque

Pour évaluer l'énergie totale d'une source de lumière quelconque, il faut décomposer la lumière en plusieurs sources monochromatique et faire l'addition de ces énergies :

$$E = \sum_f E_f = \sum_f N_f hf$$

où  $E$  : Énergie totale de la lumière provenant de la contribution de toutes les fréquences (J)

$E_f$  : Énergie d'une lumière monochromatique de fréquence  $f$  (J)

$N_f$  : Nombre de photons de fréquence  $f$

$f$  : Fréquence d'une source de lumière monochromatique ( $s^{-1}$  ou Hz)

$h$  : Constante de Planck ( $6,63 \times 10^{-34}$  J · s)

## Explication quantique de l'effet photoélectrique

En appliquant l'hypothèse de l'existence du photon, Albert Einstein fut en mesure d'expliquer la **nature quantique de l'effet photoélectrique** et il fut récompensé du prix Nobel de physique en 1921 pour ses travaux :

- ❖ Lorsqu'une structure est exposée à la lumière, elle est exposée à un torrent de photons. Ceux-ci entrent en **collision** avec les **électrons** et peuvent être **absorbés**. S'il y a absorption, **l'énergie cinétique** de l'électron sera **augmentée** d'un facteur  $hf$  (énergie du photon).
- ❖ Pour que l'électron puisse **être éjecté**, il doit avoir **suffisamment d'énergie** pour quitter la structure ce qui l'invite à **changer d'état** de **liaison** avec la structure. Cette énergie porte le nom de « **travail d'extraction** »  $\phi$ .
- ❖ L'électron ne peut pas accumuler temporairement de l'énergie avec plusieurs photons moins énergétiques pour atteindre le travail d'extraction, car les l'énergie cinétique se dissipent très rapidement dans la structure s'il n'y a pas de changement d'état.
- ❖ Pour être **éjecté**, le **photon doit permettre** dès la collision à l'électron de **changer d'état**. Pour les électrons près de la surface du matériau, il n'y a **pas d'état de transition** entre l'électron lié et l'électron libéré.

## Le travail d'extraction

Afin d'éjecter un électron d'une structure, un photon doit être absorbé par un électron et lui fournir une énergie  $hf$  supérieure au travail d'extraction  $\phi$  :

$$E_\gamma = hf > \phi$$

où  $E_\gamma$  : Énergie transportée par un photon (J)

$f$  : La fréquence du photon ( $s^{-1}$  ou Hz)

$\phi$  : Le travail d'extraction (J ou eV)

$h$  : Constante de Planck ( $6,63 \times 10^{-34}$  J · s)

Matériau	Travail d'extraction
Sodium	2,7 eV
Argent	4,3 eV
Silicium	4,8 eV
Carbone	5,0 eV
Or	5,1 eV

Preuve :

Démontrons par conservation de l'énergie que l'énergie du photon doit être supérieure au travail d'extraction pour éjecter un électron par effet photoélectrique :

$$K_f + U_f = K_i + U_i + W_a \quad (\text{Conservation de l'énergie})$$

$$\Rightarrow K_f + U_f = K_i + U_i + (E_\gamma) \quad (\text{Travail du photon, } W = E_\gamma)$$

Remplaçons le terme d'énergie potentielle électrique finale par zéro et relierons l'énergie potentielle électrique initiale avec l'énergie cinétique initiale afin d'introduire le concept de travail d'extraction :

$$\begin{aligned}
 K_f + U_f &= K_i + U_i + E_\gamma && \text{(Équation précédente)} \\
 \Rightarrow K_f + (0) &= K_i + U_i + E_\gamma && (U_f = \sum_{i=1}^N \frac{kqQ_i}{r_i} = 0, \text{ car } r_i = \infty \text{ lorsque électron éjecté)} \\
 \Rightarrow E_\gamma &= K_f - (K_i + U_i) && \text{(Isoler } E_\gamma) \\
 \Rightarrow E_\gamma &= K_f + |K_i + U_i| && (|K_i + U_i| = -(K_i + U_i) \text{ car } K_i + U_i < 0, \text{ électron lié)} \\
 \Rightarrow E_\gamma &= K_f + \phi && \text{(Remplacer travail d'extraction, } \phi = |K_i + U_i|)
 \end{aligned}$$

Puisque  $K_f > 0$ , il faut nécessairement que  $E_\gamma = hf > \phi$ . ■

**Situation 2 : L'énergie cinétique maximale des photoélectrons.** On éclaire une plaque de cuivre ( $\phi = 4,7$  eV) avec de la lumière ultraviolette à 200 nm et on désire déterminer le module de la vitesse maximale des photoélectrons. (La masse de l'électron est  $m = 9,11 \times 10^{-31}$  kg)

Évaluons le travail d'extraction pour une plaque de cuivre en J :

$$\begin{aligned}
 \phi = 4,7 \text{ eV} &\Rightarrow \phi = 4,7 \text{ eV} * \frac{1,6 \times 10^{-19} \text{ C}}{e} && (1 e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}) \\
 &\Rightarrow \boxed{\phi = 7,52 \times 10^{-19} \text{ J}} && (1 \text{ CV} = 1 \text{ J})
 \end{aligned}$$

Évaluons l'énergie cinétique maximale de l'électron éjecté :

$$\begin{aligned}
 E_\gamma = K_f + \phi &\Rightarrow \left( \frac{hc}{\lambda} \right) = K_f + \phi && \text{(Énergie du photon)} \\
 &\Rightarrow \frac{(6,63 \times 10^{-34}) (3 \times 10^8)}{(200 \times 10^{-9})} = K_f + (7,52 \times 10^{-19}) && \text{(Remplacer valeurs num.)} \\
 &\Rightarrow \boxed{K_f = 2,425 \times 10^{-19} \text{ J}}
 \end{aligned}$$

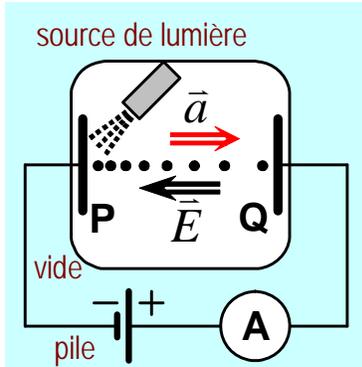
Évaluons la vitesse maximale de l'électron éjecté à partir de son énergie cinétique :

$$\begin{aligned}
 K = \frac{1}{2}mv^2 &\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2K}{m}} && \text{(Isoler } v) \\
 &\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2(2,425 \times 10^{-19})}{(9,11 \times 10^{-31})}} && \text{(Remplacer valeurs num.)} \\
 &\Rightarrow \boxed{v = 7,296 \times 10^5 \text{ m/s}} && \text{(Évaluer } v)
 \end{aligned}$$

## Montage pour étudier l'effet photoélectrique

1) Voici un **montage** pour évaluer la **fréquence de seuil**  $f_0$  d'une plaque métallique associée à l'effet photoélectrique. La fréquence de seuil se définit comme étant la **plus petite fréquence** permettant à un **photon d'éjecter un électron** par effet photoélectrique :

Plaque métallique (P) éclairée par une source de lumière soumise à une différence de potentielle causée par une pile. L'électromotance de la pile est arbitraire. Le champ électrique est orienté de Q vers P ce qui fait accélérer les électrons vers la droite dès qu'ils sont éjectés.



Si  $f_{\text{photon}} < f_0$  :

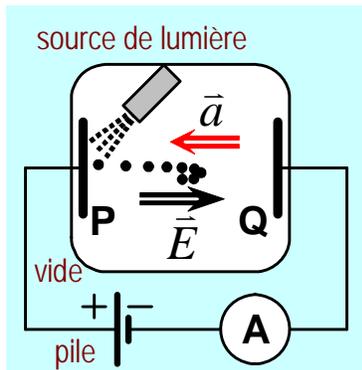
- Aucun électron éjecté.
- Ampèremètre indique 0 A.

Si  $f_{\text{photon}} \geq f_0$  :

- Électron éjecté.
- Ampèremètre indique un courant non nul.

2) Voici un **montage** pour évaluer l'**énergie cinétique** d'un **électron éjecté** par effet photoélectrique :

Plaque métallique (P) éclairée par une source de lumière soumise à une différence de potentielle causée par une pile. L'électromotance de la pile est  $\Delta V$ . Le champ électrique est orienté de P vers Q ce qui fait accélérer les électrons vers la gauche. Un électron qui passe de la plaque P à la plaque Q subit une différence de potentielle de  $-\Delta V$ . Cette variation de potentiel produit une augmentation de l'énergie potentielle de  $e\Delta V$ , car  $\Delta U = q\Delta V = (-e)(-\Delta V) = e\Delta V$ . L'électron doit perdre alors cette énergie cinétique pour respecter la conservation de l'énergie.



Si  $f_{\text{photon}} < f_0$  :

- Aucun électron éjecté.
- Ampèremètre indique 0 A.

Si  $f_{\text{photon}} \geq f_0$  et  $hf_{\text{photon}} < \phi + e\Delta V$  :

- Électron éjecté, mais ne se rend pas à la plaque Q.
- Ampèremètre indique 0 A.

Si  $f_{\text{photon}} \geq f_0$  et  $hf_{\text{photon}} > \phi + e\Delta V$  :

- Électron éjecté et se rend à la plaque Q.
- Ampèremètre indique un courant non nul.

# Chapitre 5.2 – La nature corpusculaire de la lumière

## La quantité de mouvement du photon

En 1905, Albert Einstein a réactualisé la notion corpusculaire de la lumière en introduisant la notion de photon comme étant la particule transportant l'énergie du champ électromagnétique. Puisque le photon est une particule, on peut lui attribuer une quantité de mouvement même si le photon ne possède pas de masse.



Représentation artistique d'un photon.

Avec l'équivalence masse-énergie, on peut maintenant définir la **quantité de mouvement**  $p$  comme étant la **quantité d'énergie**  $E$  transportée dans un **mouvement** ce qui peut être appliquée à un photon grâce à l'équation suivante :

$$p = \frac{E_\gamma}{c}$$

où  $p$  : Quantité de mouvement du photon ( $\text{kg} \cdot \text{m/s}$ )  
 $E_\gamma$  : Énergie électromagnétique transportée par le photon (J)  
 $c$  : Vitesse de la lumière ( $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ )

### Preuve :

À partir de l'expression relativiste de l'énergie totale d'une particule, évaluons la relation existant entre l'énergie transportée par un photon et sa quantité de mouvement sachant que le photon est une particule sans masse :

$$\begin{aligned} E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 &\Rightarrow E^2 = p^2 c^2 && \text{(Masse du photon nulle, } m = 0 \text{)} \\ &\Rightarrow E = \pm pc && \text{(Appliquer une racine carrée de chaque côté)} \\ &\Rightarrow \boxed{p = \frac{E}{c}} && \text{(Isoler } p \text{)} \end{aligned}$$

## La voile photonique

La découverte de la quantité de mouvement du photon a permis à plusieurs scientifiques d'imaginer une nouvelle façon de voyager dans l'espace : la voile photonique. Basée sur la navigation maritime<sup>1</sup>, les collisions entre les photons et une voile permettraient par conservation de quantité de mouvement de propulser un vaisseau spatial. Les étoiles seraient alors la source du vent solaire.



Voile photonique.

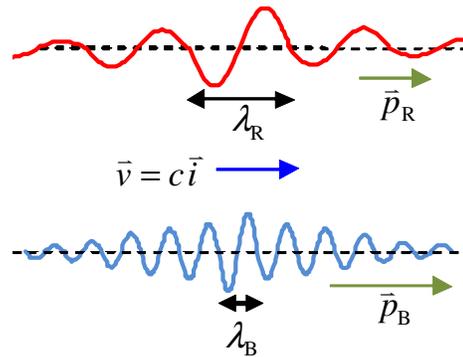
<sup>1</sup> Un bateau à voile est propulsé par les collisions des molécules d'air véhiculées par le vent.

## Longueur d'onde et quantité de mouvement

La longueur d'onde  $\lambda$  et la quantité de mouvement  $p$  d'un photon peuvent être reliées ensemble grâce à la constante de Planck  $h$  de la façon suivante :

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

où  $\lambda$  : Longueur d'onde du photon (m)  
 $p$  : Quantité de mouvement du photon ( $\text{kg} \cdot \text{m/s}$ )  
 $h$  : Constante de Planck ( $6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ )



### Preuve :

À partir de la quantité de mouvement d'un photon, introduisons la définition du quanta d'énergie du photon :

$$p = E/c \quad \Rightarrow \quad p = (hf)/c \quad (\text{Remplacer l'énergie du photon, } E = hf)$$

$$\Rightarrow \quad c/f = h/p \quad (\text{Isoler } c/f)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\lambda = h/p} \quad \blacksquare \quad (\text{Remplacer } \lambda = c/f)$$

## La diffusion

La diffusion (*scattering*) est la déviation que subit une radiation (lumière, ondes, particules) initialement rectiligne vers une ou plusieurs directions.

### Diffusion réflexive :

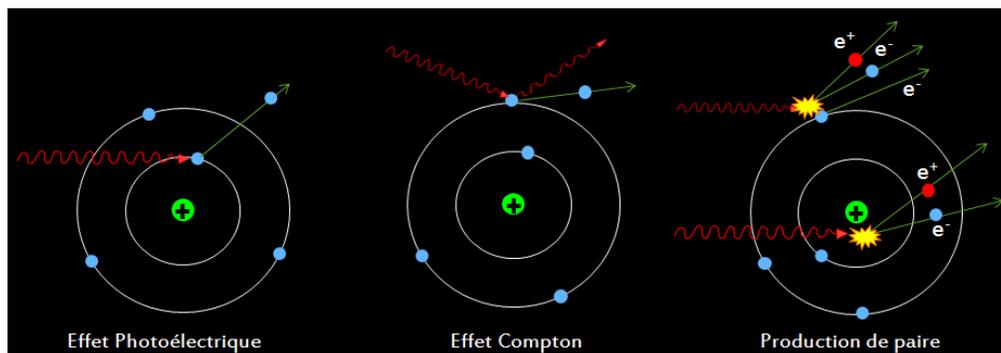
Diffusion qui respecte la loi de la réflexion **sans échange d'énergie**.

### Diffraction :

Diffusion dans plusieurs directions **sans échange d'énergie** dont la distribution angulaire dépend de la géométrie de la matière causant la diffusion.

### Interaction :

Diffusion causée par une interaction fondamentale (électromagnétique, nucléaire, faible) où il y a **échange d'énergie** entre la radiation et le milieu en interaction.



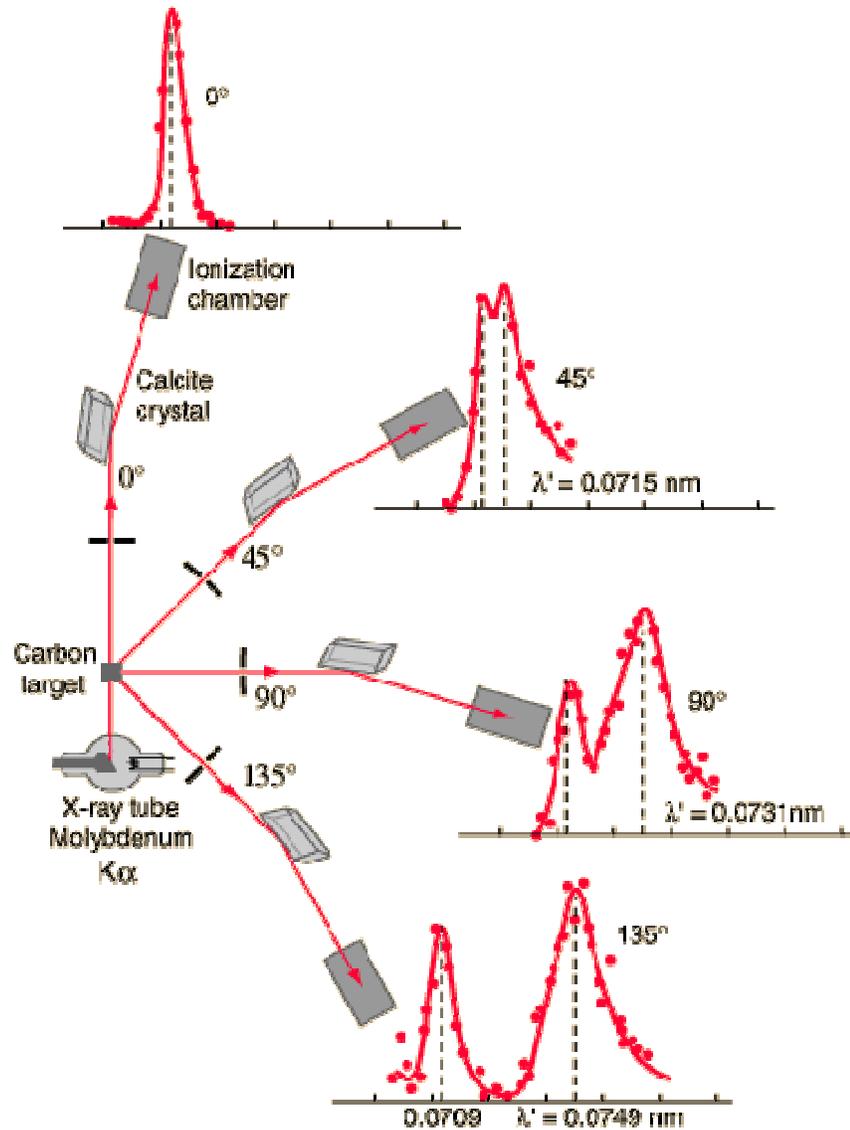
<http://www.cloudylabs.fr/wp/interactiongamma/>

## Les deux pics dans la diffusion de Compton

À partir de rayons X orientés sur un cristal de carbone, nous pouvons analyser la distribution spectrale des rayons diffusés.

### Observations :

- Le dispositif de l'expérience permet de mesurer dans plusieurs directions ( $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  et  $135^\circ$ ) où la lumière incidente au cristal sera déviée.
- Le premier pic correspond à la diffraction de la radiation d'origine. Il n'y a pas de changement de longueur d'onde de la lumière d'origine  $\lambda$ .
- Le deuxième pic correspond à l'interaction de la radiation d'origine avec des électrons faiblement liés des atomes portant le nom de « **diffusion Compton** ». Il y a changement de longueur d'onde de la lumière d'origine  $\lambda$  en longueur d'onde plus grande  $\lambda'$  (donc lumière moins énergétique).
- Plus le dispositif est orienté pour mesurer une forte déviation, plus le 2<sup>e</sup> pic sera à plus grande longueur d'onde.
- Bien que la distribution énergétique de la lumière déviée sous plusieurs longueurs d'onde dépende de l'angle de déviation, ce calcul dépassera l'analyse réalisée dans ce cours.
- La diffusion de Compton permettra d'expliquer uniquement la nature des deux pics. C'est avec d'autres types d'interactions lumière-matière que l'on pourrait expliquer la présence des autres longueurs d'ondes (exemple : Noyau-lumière).



# L'effet Compton

Le comportement corpusculaire du photon et l'hypothèse de la quantification de l'énergie du photon par la longueur d'onde furent vérifiés expérimentalement en 1923 par Arthur Holly Compton pour l'observation de la diffusion du photon sur un électron. Cette expérience appelée « **effet Compton** » met en lien le **transfert d'énergie** d'un **photon** lorsqu'il entre en **collision** avec un **électron libre** (ou très faiblement lié à un atome). La **perte d'énergie** se résulte en une **augmentation** de la **longueur d'onde** du photon (diminution de la fréquence). Compton fut récompensé par le prix Nobel de physique en 1927 pour cette découverte.

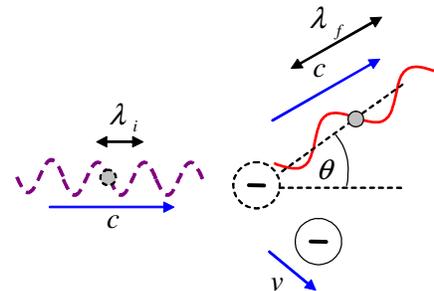


A.H. Compton  
(1892-1962)

L'expérience démontre qu'il y aura déviation de la trajectoire d'un photon d'un angle  $\theta$  en fonction de la variation de la longueur d'onde  $\lambda$  entre le photon avant et après la collision :

$$\lambda_f - \lambda_i = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos(\theta))$$

- où
- $\lambda_i$  : Longueur d'onde initiale du photon (m)
  - $\lambda_f$  : Longueur d'onde finale du photon (m)
  - $\theta$  : Angle de déviation du photon initial.
  - $h$  : Constante de Planck ( $6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ )
  - $m_e$  : Masse de l'électron ( $9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ )
  - $c$  : Vitesse de la lumière ( $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ )



Ce schéma est exagéré, car la variation de longueur d'onde  $\lambda_f - \lambda_i$  est très peu prononcée pour la lumière visible, car  $h/m_e c = 2,426 \times 10^{-12} \text{ m}$ . L'effet Compton devient plus remarquable chez les photons à haute fréquence comme le rayonnement X et gamma.

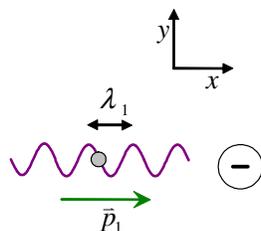
et  $\lambda_C$  : Longueur d'onde de Compton ( $\lambda_C = \frac{h}{m_e c} = 2,426 \times 10^{-12} \text{ m}$ )

**P.S.** Pour passer d'un photon de type rayon-X ( $\approx 1 \times 10^{-11} \text{ m}$ ) à un photon rouge ( $\approx 650 \times 10^{-9} \text{ m}$ ), il faut un minimum de **133 964** diffusions de Compton.

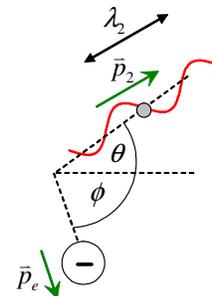
## Preuve :

Dans le référentiel d'un laboratoire, effectuons une interaction de type « collision » entre un photon et un électron immobile. Lors de cette interaction, il y a **conservation de la quantité de mouvement**  $\sum \vec{p}_f = \sum \vec{p}_i$  et **conservation de l'énergie**  $\sum E_f = \sum E_i$  où l'énergie de l'électron  $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$  doit être considérée sous sa **forme relativiste** :

Avant la collision :



Après la collision :



Appliquons la conservation de la quantité de mouvement selon l'axe  $x$  :

$$\sum p_{xf} = \sum p_{xi} \quad (\text{Conservation de } p_x)$$

$$\Rightarrow p_2 \cos(\theta) + p_e \cos(\phi) = p_1 \quad (\text{Décomposition selon l'axe } x)$$

$$\Rightarrow p_e \cos(\phi) = p_1 - p_2 \cos(\theta) \quad (\text{Isoler } p_e \cos(\phi))$$

$$\Rightarrow \boxed{p_e^2 \cos^2(\phi) = p_1^2 - 2p_1 p_2 \cos(\theta) + p_2^2 \cos^2(\theta)} \quad (1) \quad (\text{Mettre l'équation au carré})$$

Appliquons la conservation de la quantité de mouvement selon l'axe  $y$  :

$$\sum p_{yf} = \sum p_{yi}$$

$$\Rightarrow p_2 \sin(\theta) + p_e \sin(\phi) = 0 \quad (\text{Conservation de } p_y)$$

$$\Rightarrow p_e \sin(\phi) = -p_2 \sin(\theta) \quad (\text{Isoler } p_e \sin(\phi))$$

$$\Rightarrow \boxed{p_e^2 \sin^2(\phi) = p_2^2 \sin^2(\theta)} \quad (2) \quad (\text{Mettre l'équation au carré})$$

Effectuons l'addition de l'équation (1) et (2) et factorisons le terme  $p_e^2$  et  $p_2^2$ . Par la suite, appliquons l'identité trigonométrique  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$  :

$$\boxed{p_e^2 \cos^2(\phi)} + \boxed{p_e^2 \sin^2(\phi)} = \boxed{p_1^2 - 2p_1 p_2 \cos(\theta) + p_2^2 \cos^2(\theta)} + \boxed{p_2^2 \sin^2(\theta)} \quad ((1) + (2))$$

$$\Rightarrow p_e^2 (\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)) = p_1^2 - 2p_1 p_2 \cos(\theta) + p_2^2 (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) \quad (\text{Factoriser})$$

$$\Rightarrow \boxed{p_e^2 = p_1^2 - 2p_1 p_2 \cos(\theta) + p_2^2} \quad (3) \quad (\text{Identité})$$

Appliquons maintenant la conservation de l'énergie :

$$\sum E_f = \sum E_i$$

$$\Rightarrow E_{\gamma 2} + E_{ef} = E_{\gamma 1} + E_{ei} \quad (\text{Énergie du photon et de l'électron})$$

$$\Rightarrow p_2 c + E_{ef} = p_1 c + E_{ei} \quad (\text{Énergie du photon : } E_\gamma = pc)$$

$$\Rightarrow p_2 c + \sqrt{p_{ef}^2 c^2 + m_e^2 c^4} = p_1 c + \sqrt{p_{ei}^2 c^2 + m_e^2 c^4} \quad (\text{Énergie rel. : } E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4)$$

$$\Rightarrow p_2 c + \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4} = p_1 c + m_e c^2 \quad (p_{ei} = 0, p_{ef} = p_e)$$

$$\Rightarrow \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4} = p_1 c - p_2 c + m_e c^2 \quad (\text{Isoler la racine})$$

$$\Rightarrow \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4} = c(p_1 - p_2) + m_e c^2 \quad (\text{Factoriser } c)$$

$$\Rightarrow p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4 = (c(p_1 - p_2) + m_e c^2)^2 \quad (\text{Mettre au carré de chaque côté})$$

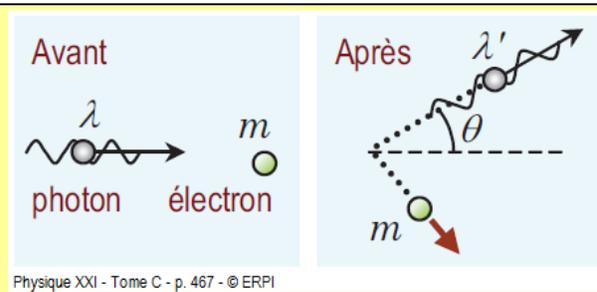
$$\Rightarrow p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4 = c^2 (p_1 - p_2)^2 + 2m_e c^3 (p_1 - p_2) + m_e^2 c^4 \quad (\text{Développer le terme au carré})$$

$$\Rightarrow \boxed{p_e^2 = (p_1 - p_2)^2 + 2m_e c (p_1 - p_2)} \quad (4) \quad (\text{Simplifier } m_e^2 c^4 \text{ et diviser par } c^2)$$

Effectuons la soustraction entre l'équation (3) et (4) afin d'obtenir la relation désirée :

$$\begin{aligned}
 [p_e^2] - [p_e^2] &= [p_1^2 - 2p_1p_2 \cos(\theta) + p_2^2] - [(p_1 - p_2)^2 + 2m_e c(p_1 - p_2)] && \text{(3) - (4)} \\
 \Rightarrow 0 &= p_1^2 - 2p_1p_2 \cos(\theta) + p_2^2 - (p_1 - p_2)^2 - 2m_e c(p_1 - p_2) && \text{(Simplifier)} \\
 \Rightarrow 0 &= p_1^2 - 2p_1p_2 \cos(\theta) + p_2^2 - (p_1^2 - 2p_1p_2 + p_2^2) - 2m_e c(p_1 - p_2) && \text{(Dév. le carré)} \\
 \Rightarrow 0 &= -2p_1p_2 \cos(\theta) + 2p_1p_2 - 2m_e c(p_1 - p_2) && \text{(Simplifier)} \\
 \Rightarrow 0 &= 2p_1p_2(1 - \cos(\theta)) - 2m_e c(p_1 - p_2) && \text{(Factoriser } 2p_1p_2) \\
 \Rightarrow 2m_e c(p_1 - p_2) &= 2p_1p_2(1 - \cos(\theta)) && \text{(Changer l'égalité)} \\
 \Rightarrow p_1 - p_2 &= \frac{p_1p_2}{m_e c} (1 - \cos(\theta)) && \text{(Diviser par } 2m_e c) \\
 \Rightarrow \frac{h}{\lambda_1} - \frac{h}{\lambda_2} &= \frac{(h/\lambda_1)(h/\lambda_2)}{m_e c} (1 - \cos(\theta)) && \text{(Remplacer } p = \frac{h}{\lambda}) \\
 \Rightarrow \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} &= \frac{h}{m_e c} \frac{1}{\lambda_1\lambda_2} (1 - \cos(\theta)) && \text{(Simplifier } h) \\
 \Rightarrow \lambda_2 - \lambda_1 &= \frac{h}{m_e c} (1 - \cos(\theta)) && \text{(Multiplier par } \lambda_1\lambda_2) \\
 \Rightarrow \lambda_f - \lambda_i &= \frac{h}{m_e c} (1 - \cos(\theta)) \quad \blacksquare && \text{(Remplacer } \lambda_f = \lambda_2 \text{ et } \lambda_i = \lambda_1)
 \end{aligned}$$

**Situation 1: L'effet Compton.** Un photon dont la longueur d'onde est de  $7,1 \times 10^{-11}$  m entre en collision avec un électron immobile et dévie de  $70^\circ$  par rapport à la trajectoire qu'il aurait suivie s'il n'avait pas été dévié. On désire déterminer (a) la longueur d'onde du photon après avoir été dévié, (b) le module de la vitesse acquise par l'électron et (c) son orientation.



Évaluons la longueur d'onde du photon diffusé par l'effet de Compton :

$$\begin{aligned}
 \lambda_f - \lambda_i &= \frac{h}{m_e c} (1 - \cos(\theta)) \Rightarrow \lambda_f - (7,1 \times 10^{-11}) = \frac{6,63 \times 10^{-34}}{(9,11 \times 10^{-31})(3 \times 10^8)} (1 - \cos(70^\circ)) \\
 &\Rightarrow \boxed{\lambda_f = 7,2596 \times 10^{-11} \text{ m}} \quad \text{(a)}
 \end{aligned}$$

Évaluons l'énergie du photon avant et après la diffusion afin d'évaluer sa perte en énergie. Cette variation sera égale à l'énergie cinétique de l'électron en considérant qu'il était immobile avant la diffusion :

$$\begin{aligned}
 K = -\Delta E_\gamma &\Rightarrow K = -(E_{\gamma f} - E_{\gamma i}) && (\Delta E = E_f - E_i) \\
 &\Rightarrow K = E_{\gamma i} - E_{\gamma f} && (\text{Distribuer négatif}) \\
 &\Rightarrow K = hf_i - hf_f && (E_\gamma = hf) \\
 &\Rightarrow K = h\left(\frac{c}{\lambda_i}\right) - h\left(\frac{c}{\lambda_f}\right) && (\lambda = c/f \text{ donc } f = c/\lambda) \\
 &\Rightarrow K = hc\left(\frac{1}{\lambda_i} - \frac{1}{\lambda_f}\right) && (\text{Factoriser } hc) \\
 &\Rightarrow K = (6,63 \times 10^{-34})(3 \times 10^8) \left(\frac{1}{(7,1 \times 10^{-11})} - \frac{1}{(7,2596 \times 10^{-11})}\right) && (\text{Remplacer}) \\
 &\Rightarrow \boxed{K = 6,1588 \times 10^{-17} \text{ J}} && (\text{Évaluer } K)
 \end{aligned}$$

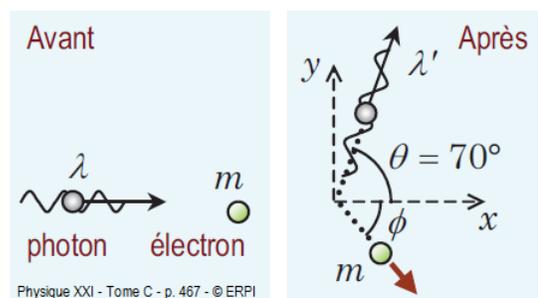
Supposons que notre électron est non-relativiste, nous pouvons évaluer sa vitesse à l'aide de l'expression classique de l'énergie cinétique :

$$\begin{aligned}
 K = \frac{1}{2}mv^2 &\Rightarrow (6,1588 \times 10^{-17}) = \frac{1}{2}(9,11 \times 10^{-31})v^2 && (\text{Remplacer}) \\
 &\Rightarrow v = 1,1628 \times 10^7 \text{ m/s} && (\text{Évaluer } v) \\
 &\Rightarrow \boxed{v = 0,03876c} \quad \text{(b)} && (v \text{ avec } c = 3 \times 10^8 \text{ m/s})
 \end{aligned}$$

Puisque la vitesse de l'électron est une petite fraction de la vitesse de la lumière, on peut confirmer que l'électron est non-relativiste.

Appliquons la conservation de la quantité de mouvement selon l'axe y afin d'évaluer l'orientation de la vitesse de l'électron après la diffusion du photon :

$$\begin{aligned}
 \sum p_{yf} &= \sum p_{yi} \\
 \Rightarrow p_{\gamma yf} + p_{e yf} &= p_{\gamma yi} + p_{e yi} \\
 \Rightarrow \left(\frac{h}{\lambda_f} \sin \theta\right) + (-m_e v \sin \phi) &= (0) + (0) && (p_e = mv_e, \text{ classique}) \\
 \Rightarrow \frac{(6,63 \times 10^{-34})}{(7,2596 \times 10^{-11})} \sin(70^\circ) - (9,11 \times 10^{-31})(1,1628 \times 10^7) \sin \phi &= (0) && (\text{Remplacer}) \\
 \Rightarrow \sin(\phi) = 0,8101 &\Rightarrow \boxed{\phi = 54,106^\circ} && (\text{Évaluer } \phi)
 \end{aligned}$$



## Expérience de Pound-Rebka

En 1960, Robert Pound et Glen Rebka réalisent une expérience pour mesurer le changement de fréquence d'une source de lumière à  $4,739 \times 10^{14}$  Hz (633 nm) en fonction d'un déplacement verticale dans un champ gravitationnel constant sur une distance de 22 m. Il mesure une différence de fréquence d'environ 720 Hz.

On peut interpréter l'expérience comme étant la chute d'un photon dans la gravité. Le « changement d'énergie gravitationnelle »  $U_g$  même sans masse est convertie en énergie électromagnétique  $hf$  puisque le photon ne peut pas changer son énergie cinétique  $K$  en raison de sa vitesse constante et qu'il n'a pas d'inertie (pas de masse). L'équivalence masse-énergie d'Albert Einstein est nécessaire pour donner un sens à l'énergie potentielle gravitationnelle du photon :

$$f' = \left( 1 + \frac{g}{c^2} y \right) f$$

( $y = 0$  à l'endroit où  $f'$  est mesurée)

où  $f'$  : Fréquence de la lumière mesurée à la coordonnée  $y = 0$  après le déplacement vertical (Hz).

$f$  : Fréquence de la lumière émise initialement à la coordonnée  $y$  (Hz).

$y$  : Hauteur initiale de la lumière (m). (vers le haut :  $y < 0$ , vers le bas :  $y > 0$ )

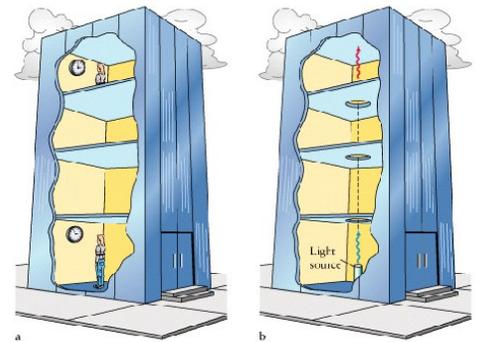
$g$  : Champ gravitationnel constant (N/kg).

$c$  : Vitesse de la lumière,  $c = 3 \times 10^8$  m/s.

### Preuve :

Évaluons la variation de l'énergie potentielle gravitationnelle  $\Delta U_g$  que l'on pourrait attribuer à un mouvement vertical  $\Delta y$  d'un photon dans un champ gravitationnel constant. Ce changement de hauteur pourra modifier la fréquence  $f$  du photon par conservation d'énergie. Nous utiliserons l'équivalence masse-énergie  $E = mc^2$  pour réaliser la preuve :

$$\begin{aligned} E_f &= E_i &\Rightarrow E_{\gamma f} + U_{gf} &= E_{\gamma i} + U_{gi} && (E = E_\gamma + U_g) \\ &&\Rightarrow (hf_f) + (m_f g y_f) &= (hf_i) + (m_i g y_i) && (E_\gamma = hf, U_g = mgy) \\ &&\Rightarrow hf_f = hf_i + m_i g(y) &&& (\text{Posons } y_f = 0, y_i = y) \\ &&\Rightarrow hf_f = hf_i + \left( \frac{E_{\gamma i}}{c^2} \right) g y &&& (E = mc^2 \Rightarrow m = \frac{E}{c^2}) \\ &&\Rightarrow hf_f = hf_i + \frac{(hf_i)}{c^2} g y &&& (\text{Remplacer } E_{\gamma i} = hf_i) \\ &&\Rightarrow f_f = \left( 1 + \frac{g}{c^2} y \right) f_i &&& \blacksquare \quad (\text{Simplifier } h, \text{ factoriser } f_i) \end{aligned}$$



<http://astro.physics.uiowa.edu/~rlm/mathcad/addendum%2010%20gravitational%20redshift%20and%20time%20dilation.htm>

Changement de la fréquence  $f$  de la lumière en fonction de sa position dans le champ gravitationnel terrestre. Un photon se déplaçant vers le haut diminue sa fréquence.

## Le décalage vers le rouge gravitationnel

Le décalage vers le rouge gravitationnel (*gravitational redshift*) est un effet de la relativité générale sur l'évolution de la longueur d'onde de la lumière lorsque celle-ci voyage dans un espace où la gravité n'est pas constante.

La lumière quittant une forte gravité doit augmenter son énergie potentielle gravitationnelle  $U_g$  ce qui réduit son énergie électromagnétique  $hf$  par conservation de l'énergie résultant en une diminution de sa fréquence :

$$f_r = \left(1 - \frac{2GM}{Rc^2}\right) f_b$$

- où
- $f_r$  : Fréquence de la lumière mesurée à une distance infinie de l'objet massif (Hz).
  - $f_b$  : Fréquence de la lumière émise à une distance  $R$  de l'objet massif (Hz).
  - $R$  : Distance entre le site d'émission de la lumière et le centre de l'objet massif (m)
  - $M$  : Masse de l'objet générant le champ gravitationnel (kg).
  - $G$  : Constante de la gravitation universelle,  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ .
  - $c$  : Vitesse de la lumière,  $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ .

Preuve :

En construction ...

Remarque :

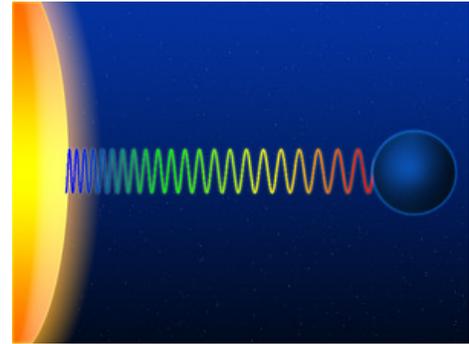
Certaines versions de cette équation prennent la forme de

$$f_r = \left(1 - \frac{GM}{Rc^2}\right) f_b$$

qui peut être démontrée comme dans la démonstration précédente en utilisant l'expression

$$U_g = -\frac{GmM}{r}$$

pour l'énergie gravitationnelle. Cependant, cette démonstration néglige certains éléments de la relativité générale.



[http://fr.wikipedia.org/wiki/D%C3%A9calage\\_d%27Einstein](http://fr.wikipedia.org/wiki/D%C3%A9calage_d%27Einstein)

Émission de lumière bleue et décalage vers le rouge de celle-ci en raison d'un déplacement dans un champ gravitationnel non constant.















# Chapitre 5.3 – Le spectre du corps noir

## La radiation

À partir des équations de l'électromagnétisme, il est possible de démontrer que toutes **particules chargées en accélération** émettent des **ondes électromagnétiques**. Cette radiation électromagnétique est une conséquence de la relativité restreinte, car une particule ne déforme pas instantanément le champ électrique qu'elle produit autour lorsqu'elle change de position.



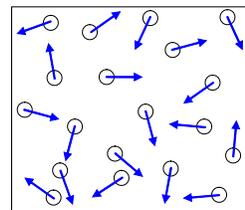
Une radio-télescope.

Puisque la lumière est une onde électromagnétique, il faut conclure d'une **particule chargée en accélération** génère de la **lumière**.

Application : Communication radio (oscillation d'un courant dans une antenne métallique)

## La température et la radiation thermique

La **température** est une **mesure statistique de l'agitation moyenne** d'un **groupe de particules**. Plus la température est élevée, plus les particules sont en mouvement dans un volume donné. L'orientation de chaque particule est considérée comme purement aléatoire et toutes les particules interagissent entre elles par des collisions et des forces électriques.



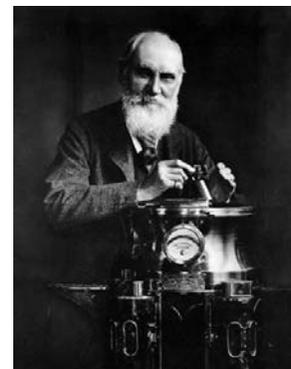
Lorsqu'un corps est chaud, les électrons et les protons qui le composent accélèrent continuellement sous des changements de direction. L'**accélération** de ces **particules chargées** a pour conséquence de produire de la radiation électromagnétique qui porte le nom de **radiation thermique**.



## L'échelle des Kelvin

Dans l'étude de la radiation, il est préférable d'utiliser une autre référence que le point de congélation de l'eau (0 C) pour définir la température zéro.

À partir de la graduation des Celsius, William Thomson<sup>1</sup> a redéfini un nouveau point zéro basé sur la plus petite température observable dans notre univers. Le **zéro Kelvin** (– 273,16 C) fut associée à la température d'un groupe de particules où **l'agitation thermique est absente** (particules immobiles par rapport à un référentiel inertiel). Ainsi, il n'y aurait pas de radiation thermique pour une substance à zéro Kelvin, car l'accélération des particules seraient nulle.



Lord Kelvin  
(1824-1907)

<sup>1</sup> William Thomson, 1<sup>er</sup> Baron Kelvin fut honoré du titre de Lord pour l'ensemble de ses travaux.  
Référence : Marc Séguin, Physique XXI Tome C  
Note de cours rédigée par : Simon Vézina

Voici la relation mathématique qui relie l'échelle des Celsius avec l'échelle des Kelvins :

$$T(\text{K}) = T(\text{C}) + 273$$

où  $T(\text{K})$  : Température en degré Kelvin (K)

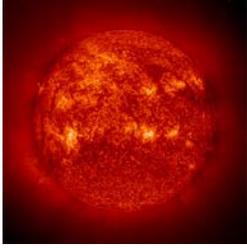
$T(\text{C})$  : Température en degré Celsius (C)

## Le corps noir

Un **corps noir** est un **objet idéalisé** qui émet **uniquement** des **radiations électromagnétiques** sous forme **thermique**. Ainsi, le corps noir n'émet aucune radiation par réflexion. Un corps noir va absorber toute forme de radiation dirigée vers lui et élèvera sa température par gain d'énergie. Il perdra graduellement son énergie par radiation thermique. On peut conclure qu'un corps noir est **100% absorbeur** (d'où le nom corps « noir ») et 0% réflecteur.

L'expérience démontre qu'il y a un **lien** entre les **sortes de longueur d'onde émises par radiation thermique** d'un corps noir (spectre du corps noir) et la **température** du corps noir. Plus le corps noir est **chaud**, plus il émet de **lumière** dans le **visible**.

Voici quelques objets qui peuvent être approximés comme étant un corps noir :

Extrêmement chaud	Chaud	Froid
		
Étoile (photo prise dans le spectre de l'infrarouge)	Élément d'une cuisinière (quelques longueurs d'onde de l'infrarouge sont visibles)	Cube de glace lorsqu'on néglige la réflexion (radiation non visible car objet trop froid)

# Le spectre du corps noir

En 1879, Joseph Stefan a démontré expérimentalement que l'intensité totale ( $\text{W}/\text{m}^2$ ) de radiation  $I$  d'un corps noir est proportionnelle à la 4<sup>ième</sup> puissance de la température  $T$  du corps noir. La température du corps noir doit être mesurée en Kelvin :

$$I \propto T^4$$



Joseph Stefan  
(1835-1893)

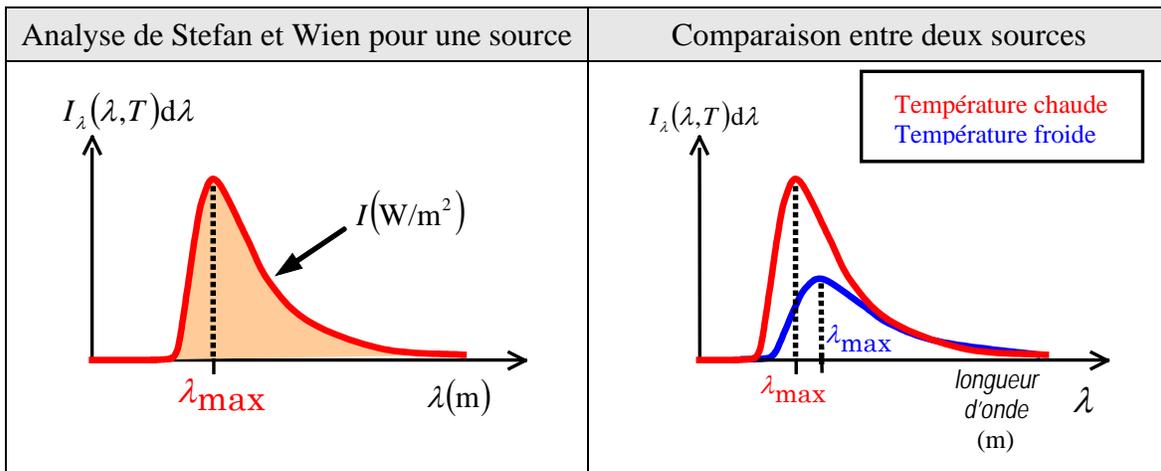
En 1893, Wilhelm Wien a démontré expérimentalement que la longueur d'onde  $\lambda_{\text{max}}$  la plus présente dans le spectre de radiation d'un corps noir est inversement proportionnelle à la température du corps noir. La température du corps noir doit être mesurée en Kelvin :

$$\lambda_{\text{max}} \propto T^{-1}$$



Wilhelm Wien  
(1864-1928)

Pour une température  $T$  donnée, la distribution volumique des intensités lumineuses **expérimentales** en fonction de la longueur d'onde  $\lambda$  de la lumière est de la forme suivante :



$I_\lambda(\lambda, T)$  : **Intensité monochromatique** d'un corps noir pour une seule longueur d'onde  $\lambda$  donnée en  $\text{W}/\text{m}^3$ . Habituellement, on exprime l'expression  $I_\lambda(\lambda, T)d\lambda$  correspondant à l'intensité pour une mince bande de longueur d'onde en  $\text{W}/\text{m}^2$ . Ainsi, pour obtenir l'intensité sur une bande de longueur d'onde, il ne suffit que d'intégrer  $d\lambda$  sur l'intervalle désiré.

$I$  : **Intensité lumineuse totale** du corps noir en  $\text{W}/\text{m}^2$ . Cette valeur s'obtient à l'aide de l'aire sous la courbe de la fonction  $I_\lambda(\lambda, T)$  (analyse expérimentale effectuée par Stefan).

$\lambda_{\text{max}}$  : **Longueur d'onde d'intensité monochromatique maximale** dans le spectre de radiation d'un corps noir (analyse expérimentale effectuée par Wien).

# La catastrophe ultraviolette

Afin d'expliquer théoriquement les observations effectuées par Stefan et Wien, les physiciens Lord Rayleigh et James Hopwood Jeans ont travaillé au début des années 1900 sur un modèle théorique visant à comprendre la distribution du spectre du corps noir. Malheureusement, les arguments physiques de l'époque ne permettaient pas de comprendre pourquoi il y avait une chute d'intensité chez les ultraviolets. Cet échec théorique fut fortement médiatisé dans la communauté physicienne et fut baptisé « *la catastrophe ultraviolette* ».

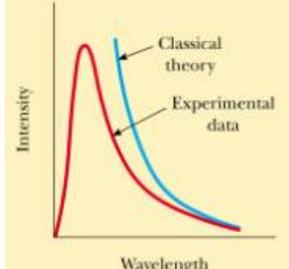


Lord Rayleigh  
(1842-1919)



J. H. Jeans  
(1877-1946)

Voici la distribution de l'intensité volumique  $I_\lambda(\lambda, T)$  du spectre du corps noir calculé théoriquement par le modèle de Rayleigh-Jeans.

Équation de l'intensité volumique $I_\lambda(\lambda, T)$ théorique de Rayleigh-Jeans	Comparaison graphique entre la courbe expérimentale et la courbe théorique de Rayleigh-Jeans (théorie classique)
$I_\lambda(\lambda, T) = \frac{2\pi kT}{\lambda^4}$	

- Bonne distribution de l'intensité volumique à grande longueur d'onde (petite fréquence)
- Mauvaise distribution de l'intensité volumique à petite longueur d'onde (grande fréquence).

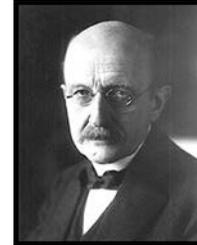
Cette théorie était basée sur des **d'ondes stationnaires** de **nature électromagnétique** pouvant **osciller à l'intérieur** d'un **corps noir** en **équilibre thermodynamique**. Le principe d'équipartition imposait que toutes les ondes stationnaires oscillaient avec une **énergie<sup>2</sup> moyenne commune**  $kT$ . Puisque le corps noir était en équilibre thermodynamique, la température  $T$  maintenue constante pouvait alimenter en énergie tous les modes d'oscillation possible et ainsi augmenter le champ électrique de toutes les ondes stationnaires jusqu'à une valeur limite proportionnelle à  $kT$ . **L'équilibre** était **atteint** lorsque **l'énergie libérée de façon continue par le rayonnement électromagnétique** du corps noir était **égal** au **gain d'énergie** fournit par la **température constante**.

Puisqu'il y a une infinité d'onde stationnaire admissible, un corps noir pouvait alors contenir une quantité d'énergie infinie (chaque mode contient une énergie  $kT$  et il y a un nombre infini) ce qui n'était pas raisonnable et non valide.

<sup>2</sup> Chaque onde stationnaire porte une énergie cinétique de  $kT/2$  et une énergie potentielle de  $kT/2$ .

# Loi de Planck

Afin de résoudre les problèmes théoriques rencontrés par Rayleigh-Jeans, Max Planck proposa en 1900 à l'aide des travaux effectués par Wien de limiter l'énergie pouvant être évacuée par chaque mode de vibration (onde stationnaire) à  $hc/\lambda$  ( $hf$  en fréquence). Cette énergie dépendait de la longueur d'onde  $\lambda$  associée au mode de vibration. Il ajouta également les contraintes suivantes :



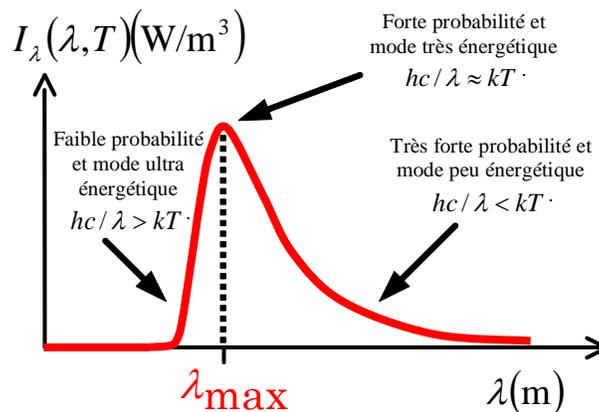
Max Planck  
(1858-1947)

- 1) Pour exciter un mode de vibration avec une forte probabilité, il faut que l'énergie thermique soit plus élevée que l'énergie d'excitation du mode de vibration ( $kT > hc/\lambda$ ).
- 2) Pour exciter un mode de vibration où  $kT < hc/\lambda$ , l'énergie disponible pour ce mode est inférieure à l'énergie qui sera évacué par ce mode. Ainsi, il est très peu probable d'observer un rayonnement à cette fréquence.
- 3) Un mode de vibration doit évacuer son énergie uniquement pas multiple de  $hf$  même si l'énergie disponible peut être arbitraire.

La perte d'énergie porta le nom de « **quanta** », car chaque mode de vibration désexcité produisait une radiation d'énergie unique égale à  $hc/\lambda$ . La conclusion de Planck fut d'accepter qu'un **corps noir** se devait de **perdre de l'énergie par radiation** uniquement **par quanta** (interprété à l'origine comme un pur artifice mathématique).

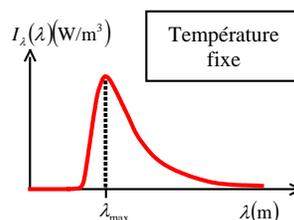
Voici comment on peut interpréter la distribution des pertes d'énergies en fonction des longueurs d'onde  $\lambda$  de chaque mode de vibration :

Longueur d'onde mode ( $\lambda$ )	$\lambda$ est petit	$\lambda \approx \lambda_{\max}$	$\lambda$ est grand
Fréquence du mode ( $f$ )	Très élevée	Élevée	Petite
Énergie du mode ( $hc/\lambda$ )	Très élevée	Élevée	Faible
Probabilité excitation/désexcitation	Faible	Élevée	Très élevée
Proportion perte d'énergie	Faible	Élevé	Faible



Voici la distribution de l'intensité volumique  $I_\lambda(\lambda, T)$  qui fut proposée par Planck<sup>3</sup> et qui correspondait à la distribution expérimentale :

$$I_\lambda(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 \left( e^{hc/\lambda kT} - 1 \right)}$$



où  $I_\lambda(\lambda, T)$ : Intensité volumique de la lumière pour une longueur d'onde  $\lambda$  ( $\text{W/m}^3$ )

$\lambda$  : Longueur d'onde de la lumière (m)

$T$  : Température du corps noir (K)

$h$  : Constante de Planck ( $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ )

$c$  : Vitesse de la lumière ( $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ )

$k$  : Constante de Boltzmann ( $k = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ )

## Loi de Wien

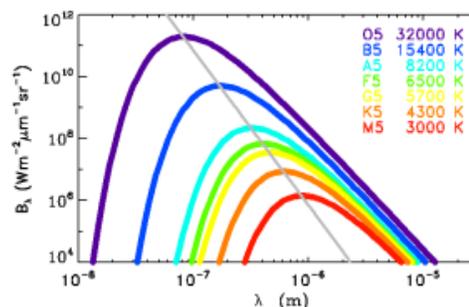
À partir de l'intensité volumique  $I_\lambda(\lambda)$  de Planck, nous pouvons évaluer théoriquement une expression permettant d'évaluer la longueur d'onde  $\lambda_{\text{max}}$  la plus intense dans le spectre de radiation d'un corps noir. Cette expression dépend uniquement de la température  $T$  du corps noir :

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{w}{T}$$

où  $\lambda_{\text{max}}$  : Longueur d'onde où l'intensité lumineuse est maximale ( $\text{W/m}^3$ )

$T$  : Température du corps noir (K)

$w$  : Constante de Wien ( $w = 0,0029 \text{ m} \cdot \text{K}$ )



❖ La loi de Wien nous permet d'évaluer une température à la surface du Soleil de  $T = 5800 \text{ K}$ , car le spectre de radiation possède une intensité maximale à  $\lambda = 500 \text{ nm}$  (lumière verte).



❖ Les ampoules incandescentes sont constituées d'un mince filament de tungstène pouvant atteindre une température de  $3000 \text{ K}$ . À cette température, la longueur d'onde d'intensité maximale est dans le visible et on peut utiliser ce corps chaud pour nous éclairer par radiation thermique.



❖ L'éclairage au néon **n'exploite** pas la radiation thermique mais plutôt le changement d'orbitale des atomes. Chaque saut d'orbitale vers un niveau plus bas produit un photon.



<sup>3</sup> La démonstration de cette distribution nécessite des arguments de mécanique statistique qui sortent du cadre de ce cours.

Preuve :

Afin de démontrer la loi de Wien à partir de l'intensité volumique  $I_\lambda(\lambda, T)$  de Planck, maximisons  $I_\lambda(\lambda, T)$  pour une longueur d'onde  $\lambda$ . Ceci s'obtient en égalisant la dérivée de  $I_\lambda(\lambda, T)$  par rapport à  $\lambda$  à zéro :

$$\begin{aligned} \frac{dI_\lambda(\lambda, T)}{d\lambda} &= 0 && \text{(Maximiser } I_\lambda(\lambda, T)) \\ \Rightarrow \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 (e^{hc/\lambda kT} - 1)} \right) &= 0 && \text{(Remplacer } I_\lambda(\lambda)) \\ \Rightarrow 2\pi hc^2 \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{1}{\lambda^5 (e^{hc/\lambda kT} - 1)} \right) &= 0 && \text{(Sortir les constantes)} \\ \Rightarrow \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{1}{\lambda^5 (e^{hc/\lambda kT} - 1)} \right) &= 0 && \text{(Diviser par } 2\pi hc^2) \\ \Rightarrow -\frac{d}{d\lambda} (\lambda^5 (e^{hc/\lambda kT} - 1)) \frac{1}{(\lambda^5 (e^{hc/\lambda kT} - 1))^2} &= 0 && \text{(Appliquer } \frac{d(1/Y)}{dx} = -\frac{dY}{dx} \frac{1}{Y^2}) \\ \Rightarrow \frac{d}{d\lambda} (\lambda^5 (e^{hc/\lambda kT} - 1)) &= 0 && \text{(Multiplier par } (\lambda^5 (e^{hc/\lambda kT} - 1))^2) \\ \Rightarrow (e^{hc/\lambda kT} - 1) \frac{d(\lambda^5)}{d\lambda} + \lambda^5 \frac{d(e^{hc/\lambda kT} - 1)}{d\lambda} &= 0 && \text{(Appliquer } \frac{d(YZ)}{dx} = Z \frac{dY}{dx} + Y \frac{dZ}{dx}) \\ \Rightarrow (e^{hc/\lambda kT} - 1)(5\lambda^4) + \lambda^5 e^{hc/\lambda kT} \frac{d(hc/\lambda kT)}{d\lambda} &= 0 && \text{(Appliquer } \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}, \frac{de^y}{dx} = e^y \frac{dY}{dx}) \\ \Rightarrow 5(e^{hc/\lambda kT} - 1) + \lambda e^{hc/\lambda kT} (hc/kT) \frac{d(1/\lambda)}{d\lambda} &= 0 && \text{(Sortir constante et diviser par } \lambda^4) \\ \Rightarrow 5(e^{hc/\lambda kT} - 1) + \lambda e^{hc/\lambda kT} (hc/kT) \left( -\frac{1}{\lambda^2} \right) &= 0 && \text{(Appliquer } \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}) \\ \Rightarrow 5(e^{hc/\lambda kT} - 1) - \frac{hc}{\lambda kT} e^{hc/\lambda kT} &= 0 && \text{(Simplifier } \lambda) \end{aligned}$$

Effectuons le changement de variable suivant :  $x = \frac{hc}{\lambda kT}$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} 5(e^{hc/\lambda kT} - 1) - \frac{hc}{\lambda kT} e^{hc/\lambda kT} &= 0 && \Rightarrow 5(e^x - 1) - xe^x = 0 && \text{(Remplacer } x) \\ &&& \Rightarrow 5 = \frac{xe^x}{e^x - 1} && \text{(Isoler terme avec } x) \\ &&& \Rightarrow \boxed{x_{\max} = 4,9651142317\dots} && \text{(Équation transcendante)} \end{aligned}$$

Isolons maintenant la longueur d'onde maximale dans l'expression de notre changement de variable  $x$  :

$$\begin{aligned}
 x_{\max} = \frac{hc}{\lambda_{\max} kT} &\Rightarrow \lambda_{\max} = \frac{1}{x_{\max}} \frac{hc}{kT} && \text{(Isoler } \lambda_{\max} \text{)} \\
 &\Rightarrow \lambda_{\max} = \frac{1}{(4,9651)} \frac{(6,63 \times 10^{-34})(3 \times 10^8)}{(1,38 \times 10^{-23})T} && \text{(Remplacer valeurs num.)} \\
 &\Rightarrow \lambda_{\max} = \frac{2,903 \times 10^{-3}}{T} && \text{(Calcul)} \\
 &\Rightarrow \lambda_{\max} = \frac{w}{T} \quad \blacksquare && \text{(Remplacer } w = 0,0029 \text{ m} \cdot \text{K)}
 \end{aligned}$$

## Loi de Stefan-Boltzmann

À partir de la distribution des intensités volumiques  $I_{\lambda}(\lambda, T)$  de radiation thermique de Planck, Ludwig Boltzmann fut en mesure de démontrer théoriquement les résultats obtenus expérimentalement par Joseph Stefan. La loi de Stefan-Boltzmann permet d'évaluer l'intensité totale de radiation  $I$  d'un corps noir qui dépend uniquement de la température  $T$  du corps noir :

$$I = \sigma T^4$$

- où  $I$  : Intensité de la radiation thermique du corps noir ( $\text{W/m}^2$ )  
 $T$  : Température du corps noir (K)  
 $\sigma$  : Constante de Stefan-Boltzmann ( $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$ )



Ludwig Boltzmann  
(1844-1906)

### Preuve :

Pour évaluer l'intensité totale de radiation d'un corps noir, il faut intégrer la distribution des intensités volumiques  $I_{\lambda}(\lambda, T)$  sur toutes les longueurs d'onde comprises entre 0 et l'infini :

$$\begin{aligned}
 I = \int_{\lambda=0}^{\infty} I_{\lambda}(\lambda, T) d\lambda &\Rightarrow I = \int_{\lambda=0}^{\infty} \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 (e^{hc/\lambda kT} - 1)} d\lambda && \text{(Remplacer la loi de Planck } I(\lambda) \text{)} \\
 &\Rightarrow I = 2\pi hc^2 \int_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^5 (e^{hc/\lambda kT} - 1)} d\lambda && \text{(Sortir les constantes)}
 \end{aligned}$$

Effectuons le changement de variable suivant :

$$x = \frac{hc}{\lambda kT} \quad \text{alors} \quad \lambda = \frac{hc}{xkT} \quad \text{et} \quad d\lambda = -\frac{hc}{kT} \frac{1}{x^2} dx$$

Les bornes de l'intégrale passeront alors aux valeurs suivantes :  $(x = \frac{hc}{\lambda kT})$

$$\lambda = 0 \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad x = \infty \rightarrow 0$$

Notre intégrale passera alors à la forme suivante :

$$I = 2\pi hc^2 \int_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^5 (e^{hc/\lambda kT} - 1)} d\lambda \quad (\text{Équation précédente})$$

$$\Rightarrow I = 2\pi hc^2 \int_{x=\infty}^0 \frac{1}{\left(\frac{hc}{xkT}\right)^5 (e^x - 1)} \left(-\frac{hc}{kT} \frac{1}{x^2} dx\right) \quad (\text{Remplacer } \lambda \text{ et } d\lambda)$$

$$\Rightarrow I = -\frac{2\pi h^2 c^3}{kT} \int_{x=\infty}^0 \frac{1}{\left(\frac{hc}{xkT}\right)^5 x^2 (e^x - 1)} dx \quad (\text{Sortir les constantes devant } dx)$$

$$\Rightarrow I = -\frac{2\pi h^2 c^3}{kT} \int_{x=\infty}^0 \frac{x^5 k^5 T^5}{h^5 c^5 x^2 (e^x - 1)} dx \quad (\text{Développer l'exposant 5 et réécriture})$$

$$\Rightarrow I = -\frac{2\pi k^4}{c^2 h^3} T^4 \int_{x=\infty}^0 \frac{x^3}{e^x - 1} dx \quad (\text{Sortir les constantes puis simplifier } x)$$

$$\Rightarrow I = \frac{2\pi k^4}{c^2 h^3} T^4 \int_{x=0}^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx \quad (\text{Inverser les bornes de l'intégrale})$$

$$\Rightarrow I = \frac{2\pi k^4}{c^2 h^3} T^4 \left(\frac{\pi^4}{15}\right) \quad (\text{Résoudre l'intégrale à l'aide d'une table})$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3} T^4} \quad (\text{Simplification})$$

Pour évaluer numériquement ce résultat, nous devons utiliser une plus grande précision sur nos constantes, car celles-ci sont affectées par des gros exposants :

$$c = 2,998 \times 10^8 \text{ m/s} \quad k = 1,3807 \times 10^{-23} \text{ J/K} \quad h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

$$I = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3} T^4 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{2\pi^5 (1,3807 \times 10^{-23})^4}{15 (2,998 \times 10^8)^2 (6,626 \times 10^{-34})^3} T^4 \quad (\text{Remplacer } h, c \text{ et } k)$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{2\pi^5 (1,3807)^4}{15 (2,998)^2 (6,626)^3} \frac{(10^{-92})}{(10^{16})(10^{-102})} T^4 \quad (\text{Séparer les puissances de 10})$$

$$\Rightarrow \quad I = 5,671 \times 10^{-8} T^4 \quad (\text{Simplification})$$

$$\Rightarrow \quad I = \sigma T^4 \quad \blacksquare \quad (\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4))$$

**Situation 1 : La luminosité du Soleil.** Le Soleil a un rayon  $R = 6,96 \times 10^8$  m et une température de surface  $T = 5800$  K . On désire déterminer la puissance lumineuse (luminosité) qu'il émet.

Évaluons l'intensité lumineuse du Soleil à l'aide de la loi de Stefan-Boltzmann, car une étoile peut être approximée comme étant un corps noir :

$$\begin{aligned} I = \sigma T^4 &\Rightarrow I = (5,67 \times 10^{-8})(5800)^4 \\ &\Rightarrow \boxed{I = 6,416 \times 10^7 \text{ W/m}^2} \end{aligned}$$

Évaluons la surface du Soleil (approximée comme étant sphérique) qui est à une température de 5800 K :

$$\begin{aligned} A = 4\pi R^2 &\Rightarrow A = 4\pi(6,96 \times 10^8)^2 \\ &\Rightarrow \boxed{A = 6,087 \times 10^{18} \text{ m}^2} \end{aligned}$$

Évaluons la puissance totale de radiation thermique :

$$\begin{aligned} I = \frac{P}{A} &\Rightarrow P = I A && \text{(Isoler } P) \\ &\Rightarrow P = (6,416 \times 10^7)(6,087 \times 10^{18}) \\ &\Rightarrow \boxed{P = 3,905 \times 10^{26} \text{ W}} \end{aligned}$$

## L'absorption d'un corps noir dans une enceinte

Lorsqu'un corps noir est alimenté par des **radiations extérieures**, celui-ci les **absorbe** et **augmente** sa **température**. Il est possible de démontrer qu'un corps noir qui est situé dans une enceinte (pièce fermée) absorbera une intensité radiative proportionnelle à la 4<sup>ième</sup> puissance de la température  $T_0$  de l'enceinte :

$$I_0 = \sigma T_0^4$$

où  $I_0$  : Intensité radiative d'absorption du corps noir dans une enceinte ( $\text{W/m}^2$ )

$T_0$  : Température de l'enceinte (K)

$\sigma$  : Constante de Stefan-Boltzmann ( $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$ )

Afin d'évaluer s'il y a augmentation ou diminution de la température du corps noir, il faut comparer les gains d'énergie avec les pertes d'énergie par radiation :

- $I_{\text{nette}} = I - I_0 > 0 \Rightarrow$  diminution de la température (radiation nette vers l'extérieur)
- $I_{\text{nette}} = I - I_0 < 0 \Rightarrow$  augmentation de la température (radiation nette vers l'intérieur)
- 

Preuve :

en construction ...

**Situation 2 : Albert frissonne.** Un matin d'hiver, les murs, le plafond et le plancher de la salle de bain d'Albert sont à 18°C. Juste avant la douche, la peau d'Albert est à 32°C. On suppose que la surface de la peau d'Albert mesure 2 m<sup>2</sup> et on désire déterminer la puissance nette émise par Albert.

Supposons qu'Albert est un corps noir. Évaluons l'intensité d'émission et d'absorption thermique d'Albert à l'aide de la loi de Stefan-Boltzmann :

$$\begin{aligned} I = \sigma T^4 &\Rightarrow I = (5,67 \times 10^{-8})(32 + 273)^4 \\ &\Rightarrow \boxed{I = 490,7 \text{ W/m}^2} \quad (\text{Émission}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_0 = \sigma T_0^4 &\Rightarrow I_0 = (5,67 \times 10^{-8})(18 + 273)^4 \\ &\Rightarrow \boxed{I_0 = 406,6 \text{ W/m}^2} \quad (\text{Absorption}) \end{aligned}$$

Évaluons l'intensité radiation nette d'Albert :

$$\begin{aligned} I_{\text{nette}} = I - I_0 &\Rightarrow I_{\text{nette}} = (490,7) - (406,6) \\ &\Rightarrow \boxed{I_{\text{nette}} = 84,1 \text{ W/m}^2} \end{aligned}$$

Évaluons la puissance de radiation nette d'Albert :

$$\begin{aligned} I = \frac{P}{A} &\Rightarrow P = I A \quad (\text{Isoler } P) \\ &\Rightarrow P = (84,1)(2) \\ &\Rightarrow \boxed{P = 168,4 \text{ W}} \end{aligned}$$











# Chapitre 5.4 – L’onde de probabilité et le principe d’incertitude

## L’interférence du photon

Les travaux de Compton porte à croire que le photon possède d’avantage un comportement corpusculaire qu’ondulatoire. Il ne faut pas oublier que l’expérience de Young à démontrer un comportement ondulatoire pour la lumière correspondant à un très grand flot de photons.

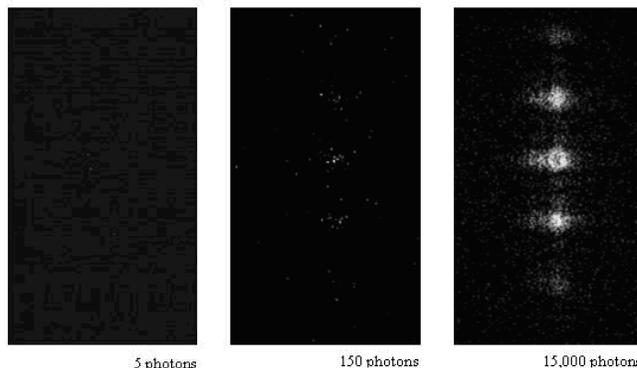
La question suivante semble tout à fait légitime :

*Est-ce que le comportement ondulatoire de la lumière est uniquement observable lorsqu’il y a plusieurs photons pour interférer ensemble ?*

Pour analyser le comportement ondulatoire d’un seul photon, nous pouvons construire une source de lumière permettant de « lancer un photon à la fois » sur un écran. Sans obstacle, ceux-ci termineront tous leur trajectoire sensiblement au même endroit.

Par contre, si l’on force ces photons à traverser un système de deux fentes rectiligne comme dans l’expérience de Young avec un laser, ceux-ci seront détectés à plusieurs endroits différents (voir image ci-contre).

Au début, le site de détection de chacun des photons semblent être aléatoire, mais après plusieurs détections, nous reconstruisons la figure d’interférence de Young combinée (diffraction et interférence) équivalente à avoir « lancé tous les photons en même temps ».



Accumulation « un photon à la fois », après interférence sur deux fentes circulaires tel que  $a < \lambda$  et  $d \ll \lambda$ .

### Conclusion de l’expérience :

- Il y a **interférence** du **photon** avec **lui-même**. L’onde associée à un photon traverse les deux fentes ce qui permet aux deux fentes de se comporter comme deux sources cohérentes. Il y a donc diffraction suivie d’une interférence causé par la différence de marche  $\delta$  des deux fentes.
- Le photon est capté sur l’écran à un endroit dicté par une **probabilité de présence**. La fonction de probabilité dépend de la longueur d’onde  $\lambda$  du photon, de la distance  $d$  entre les deux fentes et de la largeur  $a$  des fentes.
- Il y a une probabilité de présence élevée au maximum centrale et aux maximums du patron d’interférence de Young.
- Il y a une probabilité de présence faible près des minimums du patron d’interférence de Young.

Patron d’interférence à plusieurs photons	Patron d’interférence à un photon
Le patron décrit comment <b>l’intensité énergétique</b> des photons est distribuée sur un écran.	Le patron décrit la <b>probabilité</b> qu’à un <b>photon d’être capté</b> à un endroit particulier sur l’écran.

# La longueur d'onde de de Broglie

En 1924, le français Louis Victor de Broglie émet l'hypothèse que toutes particules transportant une quantité de mouvement  $p$  pouvaient être caractérisée par une longueur d'onde  $\lambda$  ce qui provoque une **dualité onde-particule** pour des **particules** ayant une masse **autre** que le **photon**. Puisque le photon se comporte comme une onde tout en transportant une quantité de mouvement, l'hypothèse de généraliser les phénomènes ondulatoires à toutes les particules semblait plausible.



Louis de Broglie  
(1892-1987)

La longueur d'onde de de Broglie fut confirmée trois ans plus tard après avoir observé la **diffraction** des **électrons** dans un **réseau cristallin**<sup>1</sup>. Louis de Broglie remportera le prix Nobel de physique en 1929 pour sa découverte et C. Thomson et G. Davisson obtiendront le prix Nobel de physique en 1937 pour les expériences confirmant la théorie.

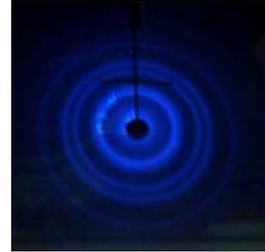
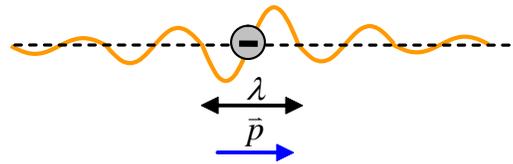


Figure d'interférence après diffraction des électrons.

La longueur d'onde  $\lambda$  de de Broglie d'une particule correspond à la constante de Planck  $h$  divisée par la quantité de mouvement  $p$  transporté par la particule :

$$\lambda = \frac{h}{p}$$



où  $\lambda$  : Longueur d'onde caractéristique d'une particule (m)

$h$  : Constante de Planck ( $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ )

$p$  : Quantité de mouvement de la particule ( $\text{kg} \cdot \text{m/s}$ )

(Classique :  $p = m\vec{v}$ )

(Relativiste :  $p = \gamma m\vec{v}$ )

<sup>1</sup> Diffraction d'un faisceau d'électron sur un réseau cristallin affichée sur un écran de phosphore (poudre utilisée dans les télévisions cathodique).

**Situation X : La longueur d'onde de de Broglie.** On désire déterminer la longueur d'onde de Broglie **(a)** d'un électron ( $m_e = 9,11 \times 10^{-31}$  kg) se déplaçant à 1500 m/s; **(b)** d'une particule de fumée ( $m = 1 \times 10^{-12}$  kg) se déplaçant à 1 mm/s.

Évaluons la quantité de mouvement de l'électron à l'aide de l'expression classique  $\vec{p} = m\vec{v}$  :

$$p_x = mv_x \quad \Rightarrow \quad p_x = (9,11 \times 10^{-31})(1500)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{p_x = 1,367 \times 10^{-27} \text{ kg} \cdot \text{m/s}}$$

Évaluons la longueur d'onde de de Broglie de l'électron :

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{(6,63 \times 10^{-34})}{(1,367 \times 10^{-27})}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = 4,85 \times 10^{-7} \text{ m}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\lambda = 485 \text{ nm}} \quad \text{(a)} \quad \text{(comportement ondulatoire observable)}$$

**N.B.** Cette longueur d'onde équivaut à la longueur d'onde d'un photon de lumière bleue. L'électron subira alors les mêmes phénomènes d'interférence que la lumière de cette longueur d'onde. Cependant, l'électron n'est pas un photon, car celui-ci transporte une masse et une charge électrique non nulle.

Évaluons la quantité de mouvement de la particule de fumée :

$$p_x = mv_x \quad \Rightarrow \quad p_x = (1 \times 10^{-12})(1 \times 10^{-3})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{p_x = 1 \times 10^{-15} \text{ kg} \cdot \text{m/s}}$$

Évaluons la longueur d'onde de de Broglie de l'électron :

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{(6,63 \times 10^{-34})}{(1 \times 10^{-15})}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\lambda = 6,63 \times 10^{-19} \text{ m}} \quad \text{(b)} \quad \text{(aucun comportement ondulatoire observable)}$$

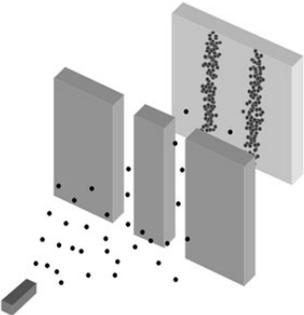
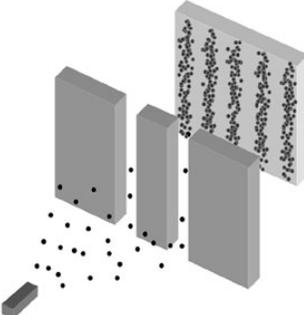
Conclusion :

Les comportements ondulatoires sont seulement observables chez les objets de petites masses comme les particules et les atomes, car ceux-ci peuvent transporter une petite quantité de mouvement  $p$  en raison de leur petite masse. Un objet macroscopique même immobile possède des mouvements de vibration de très faible vitesse, mais leur grande masse impose une trop grande valeur à la quantité de mouvement  $p$  ce qui en résulte à une très petite longueur d'onde de de Broglie. La mécanique ondulatoire prend tout son sens lorsque la longueur d'onde de de Broglie est comparable à la taille de l'objet.

## L'expérience de Young avec plusieurs électrons

Selon l'hypothèse de de Broglie, toutes les particules peuvent être caractérisées par une longueur d'onde. Ainsi, un faisceau d'électron doit subir un phénomène d'interférence comme l'a démontré l'expérience de Young<sup>2</sup>. Dans cette expérience, il y avait interférence si l'ouverture des fentes  $a$  était de taille comparable à la longueur d'onde  $\lambda$ .

Voici le résultat de l'expérience de Young avec un faisceau d'électron où les **points noirs** sur l'écran représentent des **endroits** où un **électron** a été **capté** :

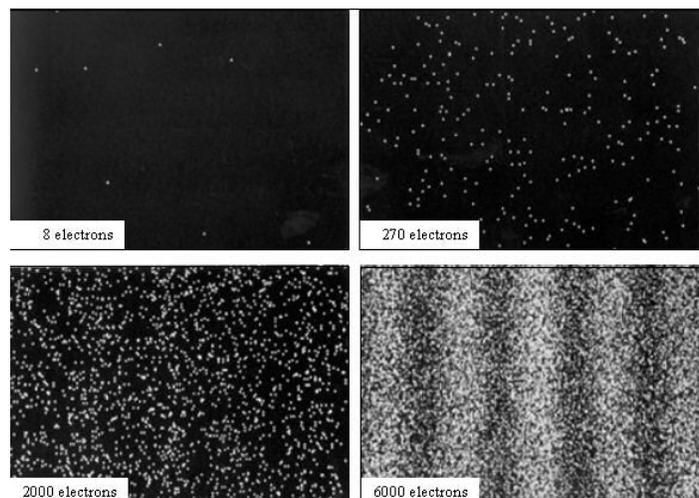
Propriété ondulatoire non présente	Propriété ondulatoire présente
<p style="text-align: center;"><math>a \gg \lambda</math></p>  <p>Les <b>électrons</b> se comportent <b>individuellement</b> comme des <b>objets ponctuels</b> (sans diffraction) ayant la possibilité de passer par la fente de gauche ou celle de droite.</p>	<p style="text-align: center;"><math>a &gt; \lambda</math></p>  <p>Les <b>électrons</b> se comportent <b>ensemble</b> comme une <b>onde diffractée en deux sources cohérentes</b> effectuant de <b>l'interférence</b> ce qui produit un <b>patron d'interférence de Young</b>.</p>

Remarque : Bien que cette expérience démontre qu'un faisceau d'électron se comporte comme une onde, elle ne démontre pas qu'un électron individuel se comporte comme une onde.

## L'expérience de Young avec un électron à la fois

Afin de prouver qu'un seul électron possède une propriété ondulatoire, nous devons effectuer l'expérience de Young en lançant un électron à la fois. Voici ce qui fut observé :

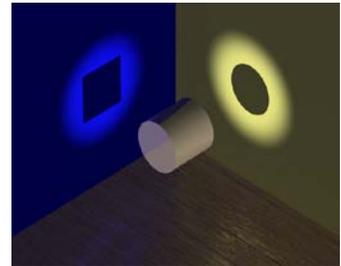
- ❖ Formation du patron d'interférence de Young après accumulation des électrons un à un.
- ❖ Il y a **diffraction** et **interférence** de **l'électron** avec **lui-même**, car son onde traverse les deux fentes tout en demeurant cohérente ce qui produit l'interférence (comme dans le cas du photon).



<sup>2</sup> L'expérience de Young de la lumière fut étudiée au chapitre 3.2  
 Référence : Marc Séguin, Physique XXI Tome C  
 Note de cours rédigée par : Simon Vézina

# La mécanique quantique et l'onde de probabilité

La **mécanique quantique** est la branche de la physique qui étudie les interactions fondamentales de la matière à l'échelle atomique et subatomique en attribuant une dualité onde-particule aux éléments en interaction. Ainsi, la mécanique quantique utilise un **formalisme ondulatoire** pour **déplacer** les éléments en interaction à l'aide de propagations ondulatoires respectant les règles de **diffraction** et **d'interférence** et un **formalisme corpusculaire** lorsqu'une **mesure** est effectuée respectant les lois de la **conservation de l'énergie** et de la **quantité de mouvement**.



Si l'on avait seulement un plan de projection à observer, est-ce qu'un cylindre serait un carré ou un cercle ?

En 1926, le physicien d'origine allemande Max Born attribue à la nature ondulatoire de la mécanique quantique une interprétation probabiliste. **L'onde de probabilité** associée au **mouvement** d'une **particule** portant le nom de **fonction d'onde**  $\Psi = \Psi(\vec{r}, t)$  permet de calculer la probabilité d'observer différentes mesures (ex : position, énergie) d'une particule. Il réalise que le module au carré de la fonction d'onde  $|\Psi|^2$  correspond à une densité de probabilité de présence de la particule. Il a reçu le lauréat de la moitié du prix noble de physique en 1954 pour son interprétation statistique de la fonction d'onde.

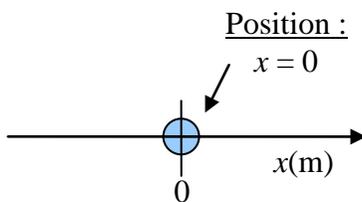


Max Born  
(1882-1970)

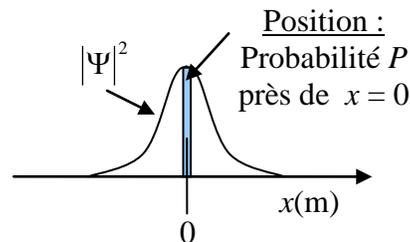
Puisque le module du carré de la fonction d'onde  $|\Psi|^2$  n'est qu'une densité de probabilité, la probabilité d'observer une particule se déplaçant selon l'axe  $x$  entre la coordonnée  $x_1$  et  $x_2$  est égale à l'expression suivante :

Probabilité de présence (mesure position)	Condition de normalisation
$P = \int_{x=x_1}^{x_2}  \Psi(x) ^2 dx$ <p>(<math>P \leq 1</math> d'observer la particule entre la coordonnée <math>x_1</math> et <math>x_2</math>)</p>	$\int_{x=-\infty}^{\infty}  \Psi(x) ^2 dx = 1$ <p>(<math>P = 1</math> d'observer la particule à quelque part)</p>

où  $P$  : Probabilité d'observer la particule entre la coordonnée  $x_1$  et  $x_2$  ( $0 \leq P \leq 1$ )  
 $|\Psi|^2$  : Densité de probabilité associée à la particule



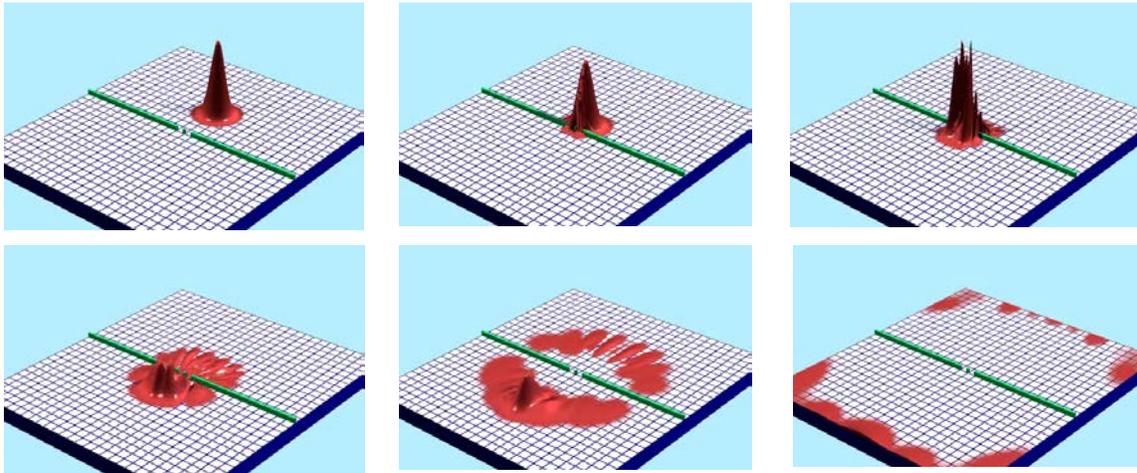
❖ La **mécanique classique** permet de localiser avec certitude la **position** d'une particule à un **endroit précis**.



❖ La **mécanique quantique** permet de calculer la **probabilité** de localiser une particule dans un **intervalle de position**.

## Diffraction et interférence de la fonction d'onde

Voici une simulation numérique de la diffraction de la fonction d'onde au travers un système de deux fentes associé à la cinématique d'un électron (expérience de Young avec un électron). Cette simulation vise à illustrer comment une fonction d'onde  $\Psi$  peut évoluer après diffraction et subir de l'interférence afin de produire un patron dont le module au carré identifie la densité de probabilité de localiser un électron à un endroit donné :



- L'amplitude de la fonction d'onde à un endroit donné permet de calculer la probabilité de localiser l'électron près de cet endroit.
- Plus l'amplitude est élevée, plus la probabilité de présence est élevée.
- L'amplitude la plus élevée sur l'écran est située face aux deux fentes ce qui correspond au maximum central du patron d'interférence de l'expérience de Young.
- Puisque l'onde peut être transmise et réfléchi lors de l'interaction avec les deux fentes, l'électron pourra être observé d'un côté comme de l'autre du système des deux fentes.

## Le choix quantique

La nature probabiliste de la mécanique quantique mène inévitablement à cette question existentielle :

*Sachant que les interactions entre les particules font évoluer dans le temps les fonctions d'onde  $\Psi(\vec{r}, t)$ , lors d'une mesure, comment le choix quantique étant aléatoire selon un observateur est effectué ?*

Selon Albert Einstein, il y avait encore des arguments physiques incompris qui pouvaient expliquer le processus « soi-disant » aléatoire du choix quantique. Selon Neils Bohr, l'interprétation rationnelle du choix quantique n'avait pas de sens. De nos jours, l'interprétation du choix aléatoire reste encore un débat ouvert et plusieurs hypothèses sont encore en vigueur.

ex : interprétation de Copenhague, mondes multiples (Hugh Everett)

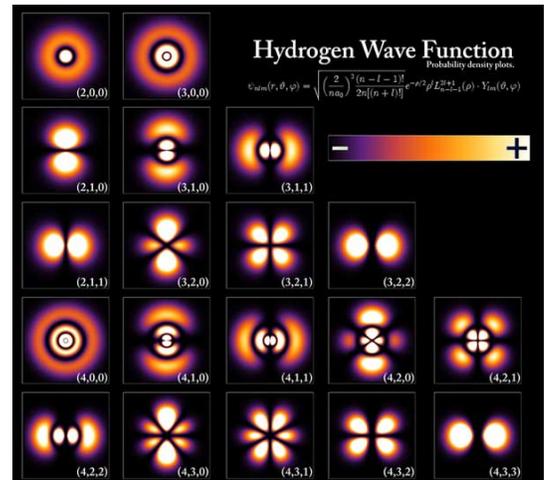


« God does not play dice. »  
Albert Einstein  
(1879-1955)

« Einstein, stop telling God  
what to do. »  
Neils Bohr  
(1885-1962)

## L'effondrement de la fonction d'onde

En mécanique quantique, lorsqu'on applique des lois de conservation (comme l'énergie) à une fonction d'onde, celle-ci se fait limiter par des contraintes et des conditions aux frontières ce qui réduit son ensemble d'états admissibles (comme une corde libre fixée à deux extrémités pouvant uniquement osciller dans des modes stationnaires particulier). Chaque état distinct porte le nom **d'état propre** (vecteur propre). Après l'application d'un **opérateur quantique** visant à extirper une mesure (ou valeur) physique particulière à une **fonction d'onde sans la modifier**, une valeur portant le nom de **valeur propre** est associée à chaque état. Puisque les états ne sont pas arbitraire et qu'ils sont dénombrable, on dit que les **états** sont **quantifiés**.



État propre de la fonction d'onde associée à l'atome d'hydrogène

La mécanique quantique autorise à une fonction d'onde d'être en superposition d'état et interagir avec son environnement de la sorte. Cependant, il y a **effondrement de la fonction d'onde** lorsqu'une observation est effectuée sur la fonction obligeant celle-ci à révéler une valeur macroscopique quantifiée unique de sa réalité. À ce moment précis, la fonction d'onde perd son état de superposition ondulatoire pour une représentation correspondant à l'état propre associée à la valeur propre observée.



Le mystère du choix quantique.

Le processus réduisant la superposition de la fonction d'onde à un seul état propre est aléatoire (coup de dé quantique) et « le choix » de l'état observé respecte toujours la règle de probabilité dicté par la fonction d'onde d'origine.

Exemple : La corde de violon

En « classique », on frotte une corde de violon fixée aux deux extrémités. La corde vibre dans une superposition de plusieurs modes propres impairs dont le mode #1 est plus dominant. Les sons entendus correspondent alors aux valeurs propres des différents modes en vibration et l'intensité du son entendu dépend des amplitudes des modes.

En « quantique », une telle corde ne pourrait qu'être « observée » oscillant que dans un seul mode (sans superposition). L'unique note entendue serait choisie aléatoirement dont « le choix » dépendrait de la probabilité définie par l'amplitude de chaque mode de l'état vibrationnel de la fonction d'onde quantique.

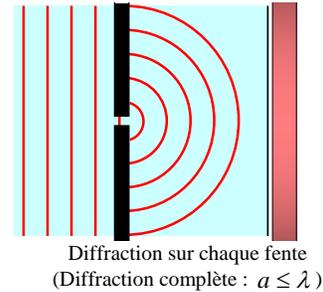


<http://www.commentfaireca.fr/commentfaireca/apprendre-a-jouer-du-violon.html>

On peut observer une corde de violon classique vibrer dans une superposition de modes propres, car on peut entendre une superposition de notes différentes.

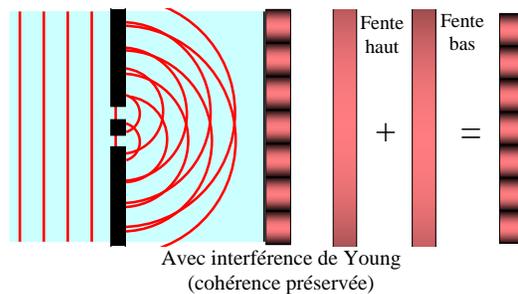
# Observation dans l'interférence de Young et effondrement de la fonction d'onde

Lors d'une expérience de Young, la fonction d'onde  $\Psi(\vec{r}, t)$  d'une particule traverse deux fentes simultanément et subit de la diffraction au travers les deux fentes selon la longueur d'onde  $\lambda$  de la particule et la taille de l'ouverture  $a$ . La fonction d'onde continue d'évoluer sans effondrement (demeure cohérente), car aucune observation n'a été encore effectuée et tous les scénarios véhiculés par la fonction d'onde sont possiblement réalisable.



## Sans observation des fentes :

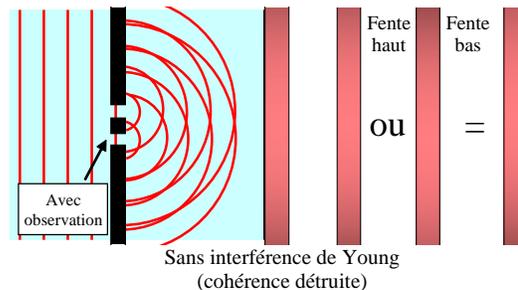
L'interaction des deux sections de fonction d'onde diffractées cohérentes permettra une interférence de Young constructive et destructive en différent point de l'espace selon la différence de marche associée aux deux fentes (influencé par la distance  $d$  entre les deux fentes) et la longueur d'onde  $\lambda$  de la particule.



Lors d'une observation sur un écran, on peut mesurer la densité de probabilité  $|\Psi|^2$  de capter une particule en différent point de l'écran.

## Avec observation d'une des deux fentes :

Si l'on fait une « observation » pour déterminer la fente qui sera traversée par la particule, la fonction d'onde  $\Psi(\vec{r}, t)$  traversera uniquement l'une des deux fentes. Il y aura effondrement de la fonction d'onde  $\Psi(\vec{r}, t)$  en une nouvelle fonction d'onde  $\Psi_{\text{obs}}(\vec{r}, t)$  égale à l'état associé à l'observation.



Ainsi, **il n'y aura aucune interférence possible entre les deux fentes**, car la nouvelle fonction d'onde n'effectue qu'une seule diffraction (il faut deux ondes cohérentes pour interférer). On se retrouve alors avec le patron de diffraction de la fente du haut ou du bas sans interférence de Young. On peut alors mesurer la densité de probabilité  $|\Psi_{\text{obs}}|^2$  de capter une particule en différent point de l'écran.

En mécanique quantique, faire une **observation** implique inévitablement une **perturbation** de la fonction d'onde et un **effondrement** de celle-ci en **un état précis**. La fonction d'onde voyage « dans le vide » en une superposition d'état, mais elle est observée dans « une interaction avec la matière » en un seul état à la fois.

# L'analogie du dé à 6 faces

On peut comparer la mécanique quantique et la nature probabiliste de la fonction d'onde à l'analogie suivante :

*Imaginez un dé à 6 faces dans un monde à deux dimensions.*

## La fonction d'onde : (le dé)

Le dé représente à fonction d'onde, car il évolue dans le temps, mais ne signifie rien physiquement pour un univers à deux dimensions. La troisième dimension manquante nous empêche de voir tous les côtés du dé en même temps.



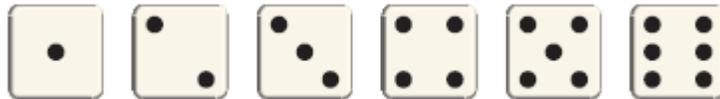
## La mesure de la fonction d'onde : (regarder le dé)

Lorsqu'on observe le dé perpendiculairement à l'une de ses faces, on ne peut qu'observer qu'une seule face à la fois. Il y a effondrement du dé ce qui l'invite à prendre un état particulier (une position) et cet état nous donne sa valeur associée (ex : la valeur 4).



## Les états possibles et valeurs associées : (les six faces 1, 2, 3, 4, 5 et 6)

Les six états admissibles du dé nous donnent accès aux six valeurs uniques associées représentés par les six faces du dé, car il y a seulement six faces différentes que l'on peut observer.



## La probabilité : (règle combinatoire et statistique du dé)

Mathématiquement, on peut évaluer qu'il y a pour chaque face du dé « 1 chance sur 6 » d'être observée. Si le dé était « pipé », les probabilités seraient différentes pour chaque face, mais la somme des probabilités serait égale à « 1 » puisqu'il doit toujours y avoir une seule face observée à la fois (impossible de rien observer). C'est la fonction d'onde qui décrit la répartition des probabilités.

## Le choix et l'effondrement de la fonction d'onde : (le hasard)

C'est le « hasard » qui décide de la face observée sur un dé à chaque fois qu'il est lancé. Ce choix aléatoire est guidé par les probabilités de réalisation de chaque état admissible. La question de savoir « qui fait le choix » demeure toujours en suspend. La seule chose qu'on sait, c'est que le processus de sélection de l'état « ne triche pas » les probabilités.



## Exemple non équiprobable : (Somme de deux dés à six faces)

État :	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Probabilité :	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36















# Chapitre 5.5a – Le noyau de Rutherford

## Le modèle atomique de Thomson

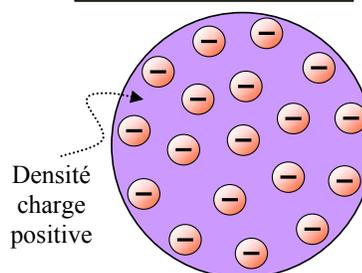
Le modèle de Thomson fut proposé en 1904 par le physicien anglais J.J. Thomson après la découverte de l'électron en 1897 (prix Nobel de physique de 1906) par ce même physicien. Dans ce modèle, l'atome est considéré comme étant une « densité de charge positive » parsemé de charges négatives (pudding aux raisins). Cette distribution permet d'expliquer la neutralité de l'atome (autant de charges positives que négatives) et la stabilité de celui-ci.



J.J. Thomson  
(1856-1940)

- Atome neutre.
- Densité de charge positive à l'intérieur de l'atome.
- Les électrons de charge négative à l'intérieur de l'atome sont en mouvement sous la forme d'anneau.
- La masse volumique de l'atome est équitablement répartie dans l'atome.
- La stabilité de l'atome est possible grâce à la force électrique entre les charges positives et les charges négatives.

Modèle de Thomson



## Le modèle atomique de Rutherford

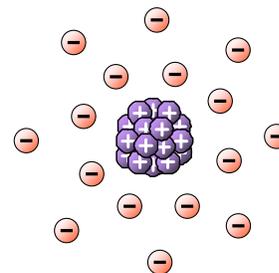
En 1909, le physicien de Nouvelle-Zélande Ernest Rutherford fut en mesure de reformuler le modèle atomique de Thomson. À l'aide d'un modèle théorique de diffusion fondé sur une collision élastique entre deux particules chargées repoussées par une force électrique et d'une expérience réalisée par Hans Geiger et Ernest Marsden (deux de ses étudiants), Rutherford démontra qu'un atome était constitué d'un petit noyau de charges positives entouré d'un nuage de charges négatives dont la masse de l'atome était essentiellement située dans le noyau.



Ernest Rutherford  
(1871-1937)

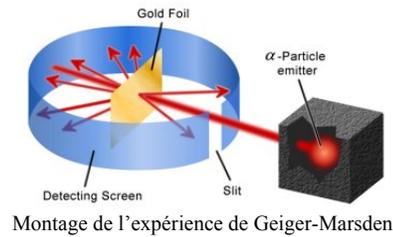
- Atome neutre.
- Charge positive concentrée au centre de l'atome dans le noyau.
- Les électrons de charges négatives à l'intérieur de l'atome sont en mouvement sur des orbites circulaires.
- La masse volumique de l'atome est pratiquement nulle partout sauf où le noyau est situé.
- Le noyau de l'atome est instable. Il faudra la découverte du neutron (hypothèse formulée par Rutherford en 1920) et la force nucléaire pour expliquer la stabilité du noyau atomique.

Modèle de Rutherford



# L'expérience de Geiger-Marsden

L'expérience de Geiger-Marsden consistait à utiliser un faisceau de particules alpha  $\alpha$  (noyau d'hélium) à environ  $1,9 \times 10^7$  m/s pour bombarder une mince feuille d'or de  $6000 \text{ \AA}^1$  d'épaisseur (quelques atomes d'épaisseurs). Puisque 99,99% des particules alpha traversaient la feuille sans être déviées et sans endommager la feuille, les deux modèles atomiques précédent semblaient être plausibles, car :



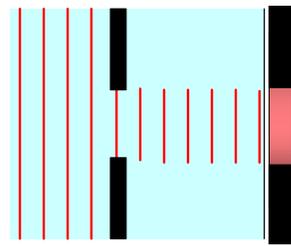
Montage de l'expérience de Geiger-Marsden

Modèle Thomson	Modèle Rutherford
Les particules alpha passent <b>au travers des faibles densités de charges positives</b> en subissant une faible déviation.	Les particules alpha passent <b>loin des noyaux</b> subissant ainsi une faible déviation due à la petite force électrique.

Cependant, 0,01% des particules alpha subissaient une diffusion avec des angles prononcés ( $0$  à  $180^\circ$ ). Cette **diffusion** ne peut **pas** être expliquée par une **diffraction de l'onde-particule** (hypothèse inexistant en 1909) sur les **atomes** d'or (taille :  $a \approx 10^{-10}$  m), car :

$$a \gg \gg \lambda_\alpha = \frac{h}{mv} = \frac{6,63 \times 10^{-34}}{(4 \times 1,67 \times 10^{-27})(1,9 \times 10^7)} = 5,22 \times 10^{-15} \text{ m}$$

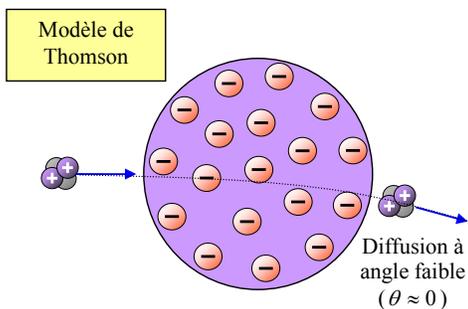
(Longueur d'onde de de Broglie, introduit en 1924)



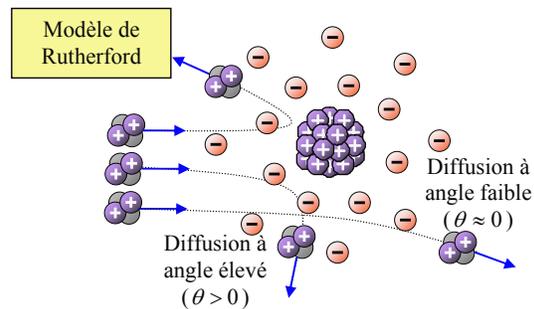
La diffraction des particules alpha sur les atomes d'or respecte la distribution ci-haut. (Diffraction :  $a \gg \gg \lambda$ )

Ce scénario semblait être possible uniquement si l'atome était constitué essentiellement de vide dont la **masse** et la **charge électrique positive** était concentré dans un **petit noyau**. Une particule alpha pouvait alors se diriger à grande vitesse directement vers le noyau, ralentir et être diffusée en raison de la répulsion électrique des charges positives du noyau sur les charges positives de la particule alpha.

Cette **diffusion** est la conséquence d'une **interaction coulombienne** (force électrique) ne pouvant être expliquée que par le modèle de Thomson :



- Diffusion légère des particules alpha, car la charge positive est diluée dans le volume de l'atome (faible force électrique).



- Diffusion légère si la particule alpha passe loin du noyau.
- Diffusion élevée si la particule alpha passe près du noyau.

<sup>1</sup> Un angström est une unité de longueur :  $1 \text{ \AA} = 0,1 \text{ nm} = 1 \times 10^{-10}$

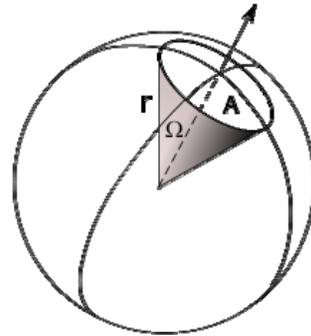
## La section efficace différentielle

La section efficace différentielle  $d\sigma/d\Omega$  mesure la probabilité qu'une particule ait subi une diffusion après une interaction dans une direction située à l'intérieur d'un angle solide<sup>2</sup>  $d\Omega$ .

Expérimentalement, à partir d'un nombre de particules  $N_0$  émises initialement, un capteur occupera une surface angulaire  $\Omega$  et la quantité de particules captées  $N$  sera déterminée par une intégrale sur la surface angulaire  $\Omega$  :

$$N = N_0 \int_{\theta=\theta_i}^{\theta_f} \int_{\phi=\phi_i}^{\phi_f} \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin(\phi) d\theta d\phi$$

$$\text{où } \theta \in [0..2\pi] \text{ et } \phi \in [0..\pi]$$



[http://fr.wikipedia.org/wiki/Angle\\_solide](http://fr.wikipedia.org/wiki/Angle_solide)  
Un angle solide  $\Omega$  correspond à un élément de surface angulaire sans unité de  $m^2$ . La relation est :  $\Omega = A / r^2$

## La section efficace différentielle de la diffusion de Rutherford

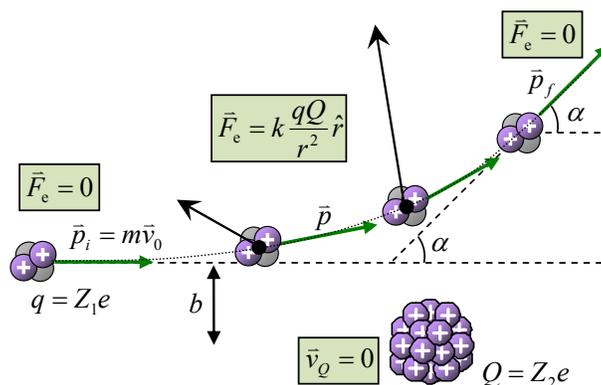
La grande réussite de Rutherford fut de proposer un modèle théorique pour établir la relation entre la distribution des particules alpha déviées « anormalement » et l'hypothèse du noyau atomique. Une équation de section efficace différentielle  $d\sigma/d\Omega$  permis d'établir un lien entre un nombre de particules captées  $\sigma$  en fonction d'un d'angle solide  $\Omega$  à partir de l'équation du mouvement d'une particule de charge  $Z_1e$  se déplaçant avec une énergie cinétique  $K$  déviée par une charge électrique ponctuelle  $Z_2e$  (étant le noyau) sous l'effet de la force électrique :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4K} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$$

Preuve :

Avant d'entamer le calcul de la section efficace, rappelons le résultat de la diffusion de Rutherford<sup>3</sup> donnant une équation associée à l'angle de déviation d'une particule chargée en raison d'une interaction coulombienne sur une charge ponctuelle :

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi \epsilon_0 K_0 b}$$



<sup>2</sup> Un petit angle solide  $d\Omega$  correspond à une petite portion de surface située sur une sphère.

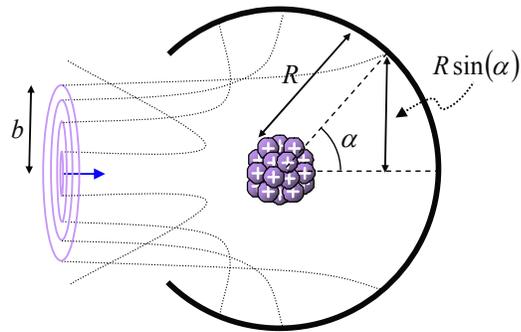
<sup>3</sup> La diffusion de Rutherford a été présentée dans le chapitre NYB – Chapitre 2.3b.

Dans cette relation, nous réalisons qu'une réduction du paramètre d'impact  $b$  augmente l'angle de déviation :

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi \epsilon_0 K_0 b} \Rightarrow \alpha = 2 \tan^{-1}(u) \quad \text{où} \quad u = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi \epsilon_0 K_0 b}$$

$b$	$u$	$\alpha$
0	$\infty$	$180^\circ$
$\frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi \epsilon_0 K_0}$	1	$90^\circ$
$\infty$	0	$0^\circ$

Lançons un disque de particules en direction de l'atome déviateur. Ce disque de particules peut être décomposé en anneau de particules de rayon  $b$ . Chaque anneau sera dévié d'un angle  $\alpha$  particulier et sera entièrement capturée sur un anneau de rayon  $R \sin(\alpha)$  situé sur un écran sphérique.



On peut analyser une petite variation du paramètre d'impact  $db$  sur la petite variation de déviation  $d\alpha$  :

L'anneau de particules diffusé entre une distance  $b$  et  $b + db$  du noyau défecteur occupe une surface

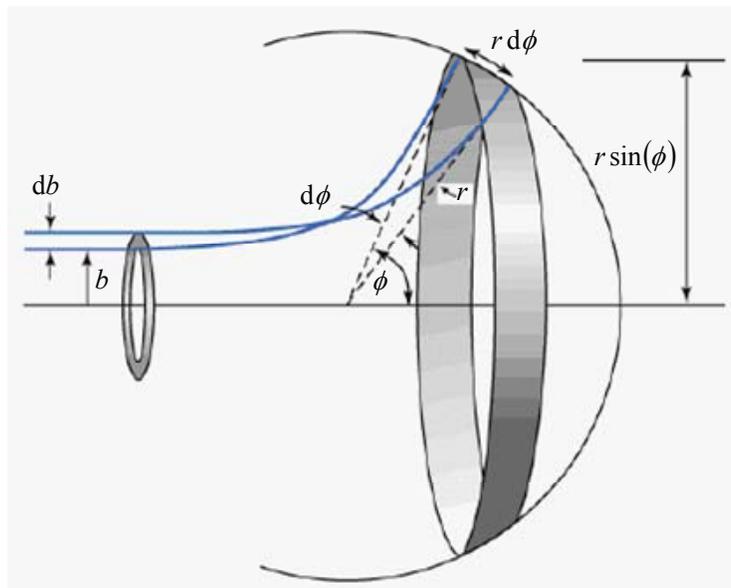
$$d\sigma = 2\pi b db .$$

Cet anneau de particules sera dévié et capté à l'intérieur d'un anneau situé sur une sphère de rayon  $r$  occupant une surface

$$dA = 2\pi r \sin(\phi) r d\phi = 2\pi r^2 \sin(\phi) d\phi .$$

En angle solide, cette surface prend la valeur

$$d\Omega = \frac{dA}{r^2} = 2\pi \sin(\phi) d\phi .$$



<http://www.chemistry.sfu.ca/assets/uploads/file/Course%20Materials%202012-1/NUSC%20342/L22.pdf>

Nous pouvons isoler le paramètre d'impact  $b$  afin d'établir le lien ce paramètre d'impact et l'angle de déviation de la particule :

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi \varepsilon_0 K_0 b} \Rightarrow b = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi \varepsilon_0 K_0} \frac{1}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \Rightarrow \boxed{b = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi \varepsilon_0 K_0} \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Nous obtenons ainsi la section efficace différentielle suivante :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{surface occupée par les particules déviées}}{\text{angle solide de la surface de capture}} \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\pi b db}{2\pi \sin(\phi) d\phi}$$

En remplaçant la notation  $\alpha$  par  $\phi$  de la coordonnée sphérique, nous pouvons calculer :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\pi b db}{2\pi \sin(\phi) d\phi} \quad (\text{Définition})$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\pi b}{2\pi \sin(\phi)} \frac{db}{d\phi} \quad (\text{Isoler } \frac{db}{d\phi})$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin(\phi)} \frac{db}{d\phi} \quad (\text{Simplifier})$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin(\phi)} \frac{d}{d\phi} \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi \varepsilon_0 K_0} \cot\left(\frac{\phi}{2}\right) \right) \quad \left( b = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi \varepsilon_0 K_0} \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right)$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin(\phi)} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi \varepsilon_0 K_0} \frac{d}{d\phi} \cot\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (\text{Factoriser constante})$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin(\phi)} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi \varepsilon_0 K_0} \left[ -\csc^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \frac{d}{d\phi} \left(\frac{\phi}{2}\right) \right] \quad \left( \frac{d}{dx} \cot(x) = -\csc^2(x) \right)$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = -\frac{b}{\sin(\phi)} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi \varepsilon_0 K_0} \csc^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \quad \left( \frac{d}{d\phi} \left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{1}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = -\frac{b}{\sin(2\phi/2)} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi \varepsilon_0 K_0} \csc^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (\text{Simplifier et } \sin(\phi) = \sin(2\phi/2) )$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = -\frac{b}{2 \sin(\phi/2) \cos(\phi/2)} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi \varepsilon_0 K_0} \csc^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (\sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cdot \cos(\theta))$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = -\frac{b}{2 \sin(\phi/2) \cos(\phi/2)} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi \varepsilon_0 K_0} \frac{1}{\sin^2(\phi/2)} \quad \left( \csc(\theta) = \frac{1}{\sin(\theta)} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = -b \frac{Z_1 Z_2 e^2}{32\pi \varepsilon_0 K_0} \frac{1}{\sin^3(\phi/2)} \frac{1}{\cos(\phi/2)} \quad (\text{Simplifier})$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = - \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi \epsilon_0 K_0} \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right) \frac{Z_1 Z_2 e^2}{32\pi \epsilon_0 K_0} \frac{1}{\sin^3(\phi/2)} \frac{1}{\cos(\phi/2)} \quad \left( b = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi \epsilon_0 K_0} \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right)$$

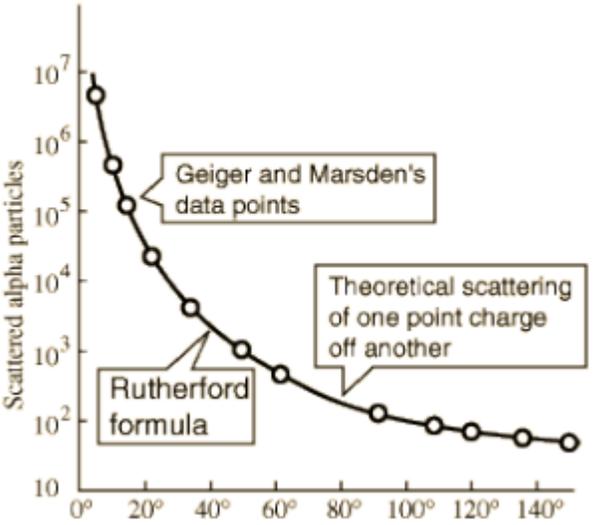
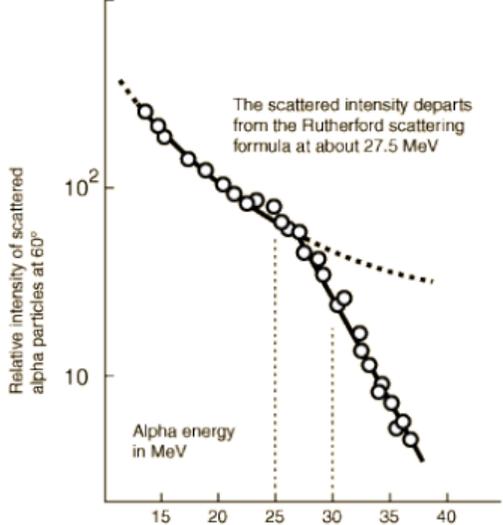
$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = - \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi \epsilon_0 K_0} \frac{\cos(\phi/2)}{\sin(\phi/2)} \right) \frac{1}{4} \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi \epsilon_0 K_0} \right) \frac{1}{\sin^3(\phi/2)} \frac{1}{\cos(\phi/2)} \quad \left( \cot(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = - \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi \epsilon_0 K_0} \right) \frac{1}{4} \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi \epsilon_0 K_0} \right) \frac{1}{\sin^4(\phi/2)} \quad \text{(Simplifier)}$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = - \left( \frac{1}{2} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi \epsilon_0 K_0} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\phi/2)} \quad \text{(Regrouper termes)}$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = - \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{4K_0} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\phi/2)} \quad \text{(Réécriture)}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{d\sigma}{d\Omega} \right| = \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{4K_0} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\phi/2)} \quad \blacksquare \quad \text{(Valeur absolue)}$$

Diffusion sur un potentiel électrique à petite énergie cinétique	Diffusion sur un potentiel électrique à haute énergie cinétique
 <p data-bbox="146 1596 779 1680">Le modèle théorique de Rutherford est confirmé par l'expérience de Geiger et Marsden.</p>	 <p data-bbox="795 1522 1364 1743">Le modèle théorique de Rutherford n'est plus valide en raison de <b>l'interaction forte</b> entre le noyau atomique et la particule alpha. Une structure interne au noyau atomique est nécessaire afin d'expliquer cette nouvelle diffusion.</p>

Référence : <http://www.chemistry.sfu.ca/assets/uploads/file/Course%20Materials%2012-1/NUSC%20342/L22.pdf>

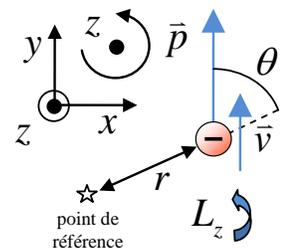




# Chapitre 5.5b – Le spectre de l'hydrogène et le modèle de Bohr

## Le moment cinétique

Le moment cinétique  $L_z$  d'une particule mesure la quantité de mouvement transportée par une particule pour effectuer une rotation autour de l'axe  $z$ . Cette quantité augmente si la particule augmente sa quantité de mouvement  $p$ , augmente si la trajectoire circulaire de rayon  $r$  augmente et augmente lorsque l'angle  $\theta$  s'approche de  $90^\circ$  favorisant ainsi une trajectoire de forme circulaire.



Moment cinétique $L_z$ d'une particule	Moment cinétique $L_z$ d'un corps	Moment cinétique vectoriel
$L_z = r p \sin(\theta)$	$L_z = I \omega$	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

- où
- $L_z$  : Moment cinétique de la particule selon l'axe  $z$  ( $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ )
  - $r$  : Distance dans le plan  $xy$  entre le point de référence et la particule (m)
  - $p$  : Module de la quantité de mouvement ( $p = mv$ ) de la particule dans le plan  $xy$  ( $\text{kg} \cdot \text{m/s}$ )
  - $\theta$  : Angle dans le plan  $xy$  entre  $r$  et  $p$
  - $I$  : Moment d'inertie du corps ( $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ )
  - $\omega$  : Vitesse angulaire du corps ( $\text{rad/s}$ )

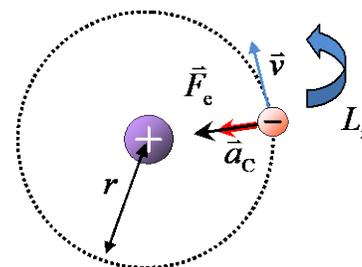
## Le moment cinétique d'un électron en orbite autour d'un proton

Le moment cinétique est une mesure très intéressante lorsqu'il est question d'orbite. Sous l'action d'une force centrale, une particule effectuant une trajectoire circulaire de rayon  $r$  autour d'un point de référence doit avoir une valeur imposée de moment cinétique  $L_z$ . Le moment cinétique augmentera avec l'augmentation du rayon de l'orbite malgré le fait que la vitesse de la particule diminuera.

Dans le cas d'un électron tournant autour d'un proton sous l'action de la force électrique, on peut établir la relation suivante :

$$L_z = \sqrt{m_e k e^2 r}$$

- où
- $L_z$  : Moment cinétique de l'électron autour du proton selon l'axe  $z$  ( $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ )
  - $r$  : Le rayon de l'orbite de l'électron (m)
  - $e$  : Charge électrique élémentaire,  $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$
  - $k$  : Constante de la loi de Coulomb,  $k = 9,00 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$
  - $m_e$  : Masse de l'électron,  $m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$



### Preuve :

Considérons un électron en mouvement sur une trajectoire circulaire autour d'un proton immobile. Évaluons par la 2<sup>ème</sup> loi de Newton et de l'accélération centripète  $a_C$  la relation existant entre la force électrique  $F_e$  et le rayon de la trajectoire circulaire. Cette relation imposera une vitesse  $v$  particulière en fonction du rayon  $r$  de l'orbite :

$$\begin{aligned}\sum \vec{F} = m\vec{a} &\Rightarrow F_e = ma_C && \text{(Force électrique radiale avec acc. centripète)} \\ &\Rightarrow k \frac{|q_p q_e|}{r^2} = m \frac{v^2}{r} && \text{(Remplacer } F_e = k \frac{|qQ|}{r^2}, a_C = \frac{v^2}{r} \text{ )} \\ &\Rightarrow k \frac{|(e)(-e)|}{r^2} = m \frac{v^2}{r} && \text{(Proton : } q_p = e, \text{ Électron : } q_e = -e \text{ )} \\ &\Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{ke^2}{mr}}} && \text{(Simplifier } r, \text{ isoler } v \text{ )}\end{aligned}$$

Introduisons cette relation vitesse-rayon dans l'évaluation du moment cinétique de l'électron :

$$\begin{aligned}L_z = r p \sin(\theta) &\Rightarrow L_z = r(mv)\sin(90^\circ) && \text{(Trajectoire circulaire : } \theta = 90^\circ, p = mv \text{ )} \\ &\Rightarrow L_z = r m \left( \sqrt{\frac{ke^2}{mr}} \right) && \text{(Remplacer } v = \sqrt{\frac{ke^2}{mr}} \text{ , preuve précédente)} \\ &\Rightarrow L_z = \sqrt{mke^2 r} \quad \blacksquare && \text{(Simplifier } m \text{ et } r \text{ )}\end{aligned}$$

## **L'énergie cinétique d'une particule en termes de moment cinétique**

Le mouvement d'une particule peut toujours être décomposé comme étant radiale et rotatif par rapport à un point de référence. En décomposant la vitesse de cette manière, nous pouvons obtenir l'expression suivante de l'énergie cinétique en fonction du moment cinétique :

$$K = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{L_z^2}{2I_z} \quad \text{où} \quad I_z = mr^2$$

où  $L_z$  : Moment cinétique de la particule selon l'axe  $z$  (kg · m<sup>2</sup>/s)

$p_r$  : Quantité de mouvement radial de la particule (kg · m/s)

$m$  : Masse de la particule (kg)

$I_z$  : Moment d'inertie de la particule (kg · m<sup>2</sup>)

$r$  : Distance entre la particule et le point de référence (m)

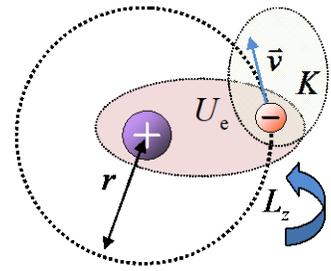
Preuve :

Exprimons l'énergie cinétique à l'aide d'une vitesse décomposée radialement à un point de référence en tangentiellement à un point de référence :

$$\begin{aligned}
K = \frac{1}{2}mv^2 &\Rightarrow K = \frac{1}{2}m(v_r^2 + v_\theta^2) \\
&\Rightarrow K = \frac{m}{2}v_r^2 + \frac{m}{2}r^2\frac{1}{r^2}mv_\theta^2 \\
&\Rightarrow K = \frac{m^2v_r^2}{2m} + \frac{m^2r^2v_\theta^2}{2mr^2} \\
&\Rightarrow K = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{L_z^2}{2mr^2} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

### L'énergie de l'atome d'hydrogène classique

En mécanique classique, l'atome d'hydrogène stable est considéré comme étant un noyau composé d'un proton de charge positive et d'un électron de charge négative qui circule en équilibre sur une trajectoire circulaire autour du noyau. Dans ce **modèle classique**, tous les **rayons d'orbite circulaire** sont **admissibles**. L'énergie  $E$  de liaison (négative) du système composée de l'énergie potentielle électrique  $U_e$  du système proton-électron et de l'énergie cinétique  $K$  de l'électron dépend de la distance  $r$  entre l'électron et le proton :



Atome d'hydrogène classique.

$$E = K + U_e = -\frac{1}{2} \frac{ke^2}{r} \quad \text{avec} \quad L_z = \sqrt{m_e ke^2 r}$$

Ayant une relation le moment cinétique et le rayon de la trajectoire circulaire, effectuons un bilan d'énergie considérant une énergie potentielle électrique  $U_e$  et une énergie cinétique  $K$  :

$$\begin{aligned}
E = K + U_e &\Rightarrow E = \left( \frac{p_r^2}{2m} + \frac{L_z^2}{2I_z} \right) + \frac{kq_p q_e}{r} && (K = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{L_z^2}{2I_z}, U_e = \frac{kqQ}{r}) \\
&\Rightarrow E = \frac{L_z^2}{2m_e r^2} + \frac{kq_p q_e}{r} && (p_r = 0 \text{ et } I_z = m_e r^2) \\
&\Rightarrow E = \frac{(\sqrt{m_e ke^2 r})^2}{2m_e r^2} + \frac{k(e)(-e)}{r} && (\text{Remplacer } L_z = \sqrt{m_e ke^2 r}, q_p = e, q_e = -e) \\
&\Rightarrow E = \frac{1}{2} \frac{ke^2}{r} - \frac{ke^2}{r} && (\text{Simplifier}) \\
&\Rightarrow E = -\frac{1}{2} \frac{ke^2}{r} \quad \blacksquare && (\text{Regrouper terme})
\end{aligned}$$

## L'action de l'électromagnétisme en mécanique quantique

En mécanique quantique, plusieurs problèmes furent résolus après l'introduction de la constante de Planck  $h$  :

$$h = 6,62607004 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

(référence : [www.google.ca](http://www.google.ca))

Les unités de cette constante correspondent à ce que l'on nomme en physique une « action ». Une action permet de modifier la configuration d'un système en comptabilisant les variations d'énergie sous un intervalle de temps.

Le **principe de moindre action** invite tout phénomène physique à se réaliser en minimisant l'action requis pour effectuer un changement :

- Puisque  $h$  est une constante très petite, les forces électromagnétiques permettent à un système d'effectuer de très petit changement à la fois à une très grande précision (puisque  $h$  est très petit).
- Un **changement quantique** est un changement nécessitant un nombre entier très limité d'action  $h$ . Ils sont dénombrable unitairement par l'équation  $nh$  où  $n \in \mathbb{N}$ . C'est la **mécanique quantique** qui étudie ces changements.
- Un **changement classique** est un changement nécessitant un nombre phénoménal d'action  $h$ . Ils ne sont pas dénombrable unitairement car 1 J en 1 s requière environ  $1,508 \times 10^{33} h$ . C'est la **mécanique classique** qui étudie ces changements.

## L'action du moment cinétique

La constante de Planck  $h$  peut être réécrite sous une autre forme qui invite un nouveau concept à être interprété comme étant une action : le moment cinétique  $L_z$ .

Preuve :

$$[h] = \text{J} \cdot \text{s} \quad \Rightarrow \quad [h] = \text{J} \cdot \text{s} = (\text{Nm}) \cdot \text{s} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{m} \cdot \text{s} = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} \quad \blacksquare$$

Il est important de préciser que  $[h] = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$  sous cette forme ne correspond pas à des unités de moment cinétique, car une notion de radian est incluse dans le moment cinétique en raison d'une périodicité après un cycle complet.

## La constante de Planck réduite $\hbar$

La constante de Planck  $h$  utilisé pour évaluer le quanta d'énergie d'un photon peut être réécrite sous la forme d'une constant de Planck réduite  $\hbar$  ( $h$  barre) où un nouveau quanta peut être associé à l'action du moment cinétique :

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,0546 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

### Preuve :

La notion de moment cinétique introduit un concept de périodicité dans un mouvement où un cycle correspond à  $2\pi$  radians. Démontrons que l'unité du moment cinétique prend la forme de la constante de Planck réduite  $\hbar$  :

$$[L_z] = [I\omega] = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}} \text{rad} \frac{\text{s}}{\text{s}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2} \text{s} \cdot \text{rad} = \text{J} \cdot \text{s} \cdot \text{rad} = [\hbar] \cdot \text{rad} \frac{1 \text{ tour}}{2\pi \text{ rad}} = \frac{[\hbar]}{2\pi} = [\hbar]$$

## La quantification du moment cinétique

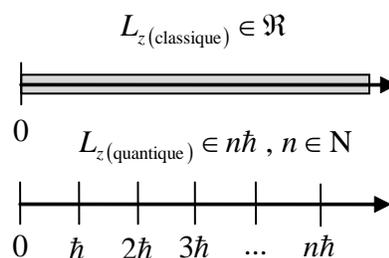
Puisque la constante de Planck réduite  $\hbar$  correspond à l'action du moment cinétique  $L_z$ , la mécanique quantique impose la **quantification du moment cinétique**. Ainsi, toute variation de moment cinétique d'une particule doit s'effectuer à « coup de  $\hbar$  ». De plus, tous les modules du moment cinétique  $L_z$  se doit d'être quantifier et être un multiple entier  $n$  de  $\hbar$  :

$$L_z = n\hbar$$

où  $L_z$  : Moment cinétique d'une particule ou d'un atome (J · s)

$n$  : Nombre entier de quanta de moment cinétique ( $n \in \mathbb{N}$ )

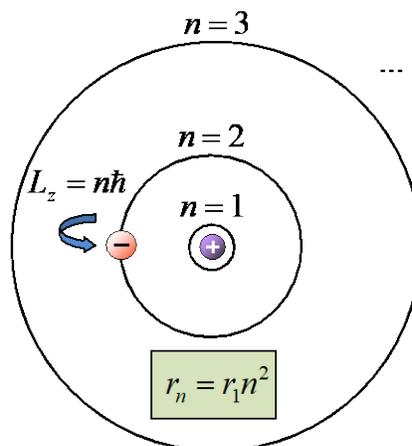
$\hbar$  : Constante de Planck réduite,  $\hbar = 1,0546 \times 10^{-34}$  J · s



## L'énergie de l'atome d'hydrogène de Bohr

L'énergie de l'atome d'hydrogène de Bohr réutilise tous les principes du modèle classique (électron non-relativiste), mais impose une contrainte sur les moments cinétiques  $L_z$  admissible pour l'électron en interaction avec le proton. Ainsi, la quantification du moment cinétique  $L_z = n\hbar$  (contrainte quantique) engendra une quantification des niveaux d'énergie  $E_n$  de l'atome. Cette quantification limite alors l'ensemble des rayons des orbites circulaires admissibles :

$$E_n = -\frac{E_1}{n^2} \quad \text{avec} \quad L_z = n\hbar \quad \text{et} \quad r_n = r_1 n^2$$



Atome d'hydrogène de Bohr.

où  $E_n$  : Énergie associée à l'atome d'hydrogène dans le niveau  $n$  (J)

$r_n$  : Rayon de l'orbite de l'électron dans l'atome d'hydrogène dans le niveau  $n$  (m)

$n$  : Niveau d'énergie quantifié de l'atome d'hydrogène ( $n \in \mathbb{N}$ )

$E_1$  : Énergie fondamentale de l'atome d'hydrogène,  $E_1 = 2,18 \times 10^{-18}$  J = 13,6 eV

$r_1$  : Rayon de Bohr (rayon de l'orbite fondamentale),  $r_1 = 5,29 \times 10^{-11}$  m

### Preuve :

Appliquons la quantification du moment cinétique  $L_z = n \hbar$  afin d'évaluer le rayon de Bohr :

$$\begin{aligned} L_z &= \sqrt{m_e k e^2 r} & \Rightarrow & L_z^2 = m k e^2 r & & \text{(Mettre au carré)} \\ & & \Rightarrow & (n \hbar)^2 = m k e^2 r & & \text{(Quantification : } L_z = n \hbar \text{)} \\ & & \Rightarrow & r = \frac{\hbar^2}{m k e^2} n^2 & & \text{(Isoler } r \text{)} \\ & & \Rightarrow & r = r_1 n^2 & \blacksquare \text{ (1)} & \text{(Remplacer } r_1 = \frac{\hbar^2}{m k e^2} \text{)} \end{aligned}$$

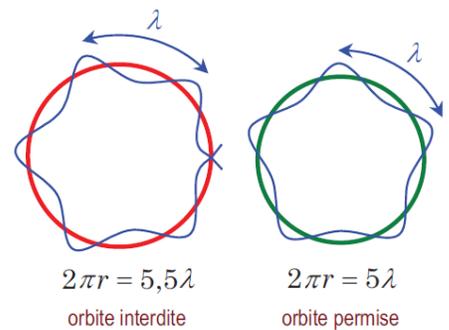
À partir de l'énergie de l'atome d'hydrogène, introduisons la quantification des rayons des orbites  $r$  afin de quantifier les niveaux d'énergies  $E$  de l'électron autour du proton :

$$\begin{aligned} E &= -\frac{1}{2} \frac{k e^2}{r} & \Rightarrow & E = -\frac{1}{2} \frac{k e^2}{r_1 n^2} & & \text{(Quantification : } r = r_1 n^2 \text{)} \\ & & \Rightarrow & E = -\frac{k e^2}{2 r_1} \frac{1}{n^2} & & \text{(Regrouper constante)} \\ & & \Rightarrow & E = -\frac{E_1}{n^2} & \blacksquare \text{ (2)} & \text{(Remplacer } E_1 = \frac{k e^2}{2 r_1} = \frac{m k^2 e^4}{2 \hbar^2} \text{)} \end{aligned}$$

## La quantification du moment cinétique et longueur d'onde de de Broglie

L'hypothèse de la longueur d'onde de de Broglie peut être également utilisé pour justifier le concept de quantification du moment cinétique d'un électron en interaction avec un proton comme dans le cas d'un atome d'hydrogène.

- $2\pi r \neq N\lambda$  : Superposition de l'onde ne se refermant pas sur elle-même « autodétruit » l'onde stationnaire ce qui **interdit l'orbite**.
- $2\pi r = N\lambda$  : Superposition de l'onde se refermant sur elle-même « renforce » l'onde stationnaire ce qui **autorise l'orbite**.



Physique XXI - Tome C - p. 499 - © ERPI  
On peut interpréter l'électron comme étant une onde stationnaire vibrant sur une orbite autour du noyau. Les orbites admissibles sont celles où il y a résonance.

### Preuve :

Démontrons que l'hypothèse de la longueur d'onde de de Broglie appliqué à l'atome d'hydrogène est équivalent à l'hypothèse de la quantification du moment cinétique proposé par Bohr :

$$\begin{aligned} 2\pi r = n\lambda & \Rightarrow 2\pi r = n \frac{h}{p} & & \text{(Longueur d'onde : } \lambda = \frac{h}{p} \text{)} \\ & \Rightarrow p r = n \frac{h}{2\pi} & & \text{(Réécriture)} \\ & \Rightarrow L_z = n \hbar & \blacksquare & \text{(} L_z = r p \text{ et } \hbar = \frac{h}{2\pi} \text{)} \end{aligned}$$

# Le modèle atomique de l'atome de Rutherford-Bohr

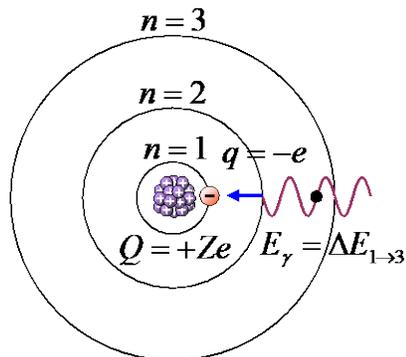
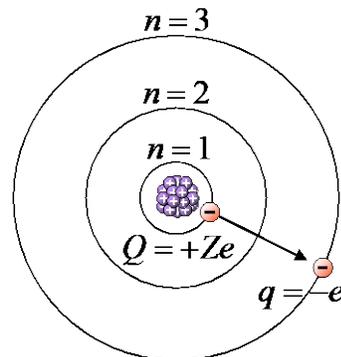
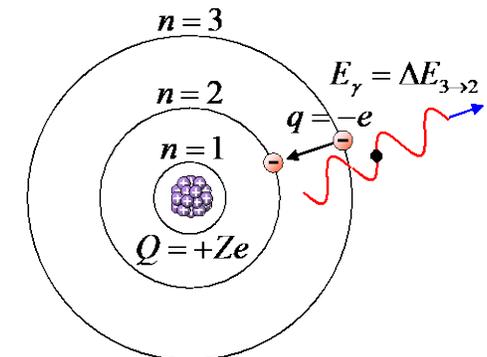
La notion du changement d'état énergétique apporté par Albert Einstein pour expliquer l'effet photoélectrique fut très importante dans l'élaboration du modèle de l'atome de Rutherford-Bohr. Dans ce modèle, les **électrons sont liés au noyau** dans **différents niveaux d'énergies quantifiés** avec une énergie totale (cinétique et potentielle électrique) négative.

- Un **photon** est **absorbé** par l'atome d'hydrogène lorsque l'électron augmente de niveau d'énergie (nombre quantique  **$n$**  **augmente**).
- Un **photon** est **émis** de l'atome d'hydrogène lorsque l'électron diminue de niveau d'énergie (nombre quantique  **$n$**  **diminue**).
- Dans l'atome d'hydrogène, l'énergie de liaison du niveau fondamental est  $E_1 = -13,6$  eV. L'électron sera ionisé (éjecté de l'atome) s'il acquière une énergie totale supérieure à zéro.
- Dans l'atome d'hydrogène, un photon d'énergie supérieure à 13,6 eV (ultraviolet) ionisera automatiquement l'électron de l'atome car  $E_n + 13,6$  eV  $> 0$ .

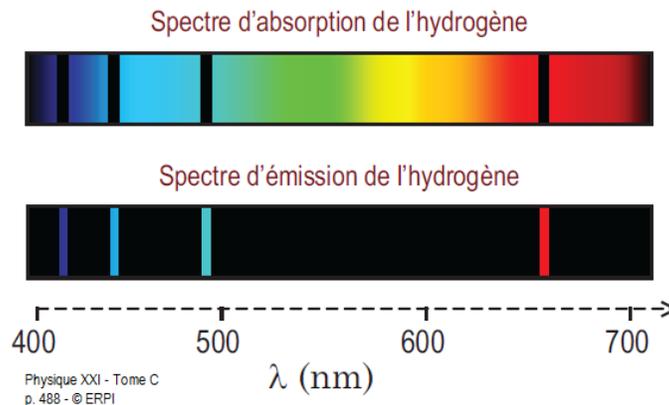
Puisque les niveaux d'énergie sont quantifiés, la transition entre deux niveaux d'énergie s'effectue par l'entremise d'un photon ayant **l'énergie exacte** à la différence d'énergie entre les deux niveaux en jeu :

Émission ( $E_i > E_f$ )	Absorption ( $E_f > E_i$ )
$E_\gamma = hf = \Delta E_{i \rightarrow f} = E_i - E_f$	$E_\gamma = hf = \Delta E_{i \rightarrow f} = E_f - E_i$

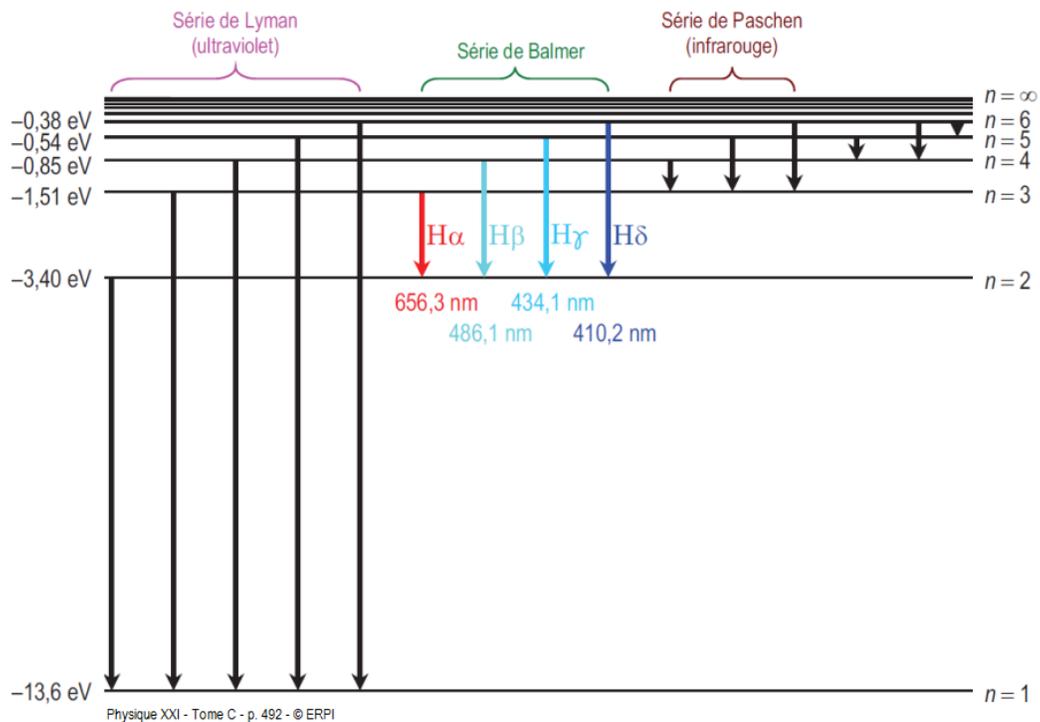
Exemple : (l'énergie du photon en fonction de sa fréquence est  $E_\gamma = hf$ )

<p>Un photon apporte une énergie au système exactement égale à <math>E_\gamma = E_3 - E_1</math>.</p> 	<p>L'atome absorbe l'énergie ce qui permet à un électron du niveau d'énergie <math>n=1</math> de passer au niveau <math>n=3</math></p> 	<p>L'atome se désexcite passant du niveau <math>n=3</math> au niveau <math>n=2</math>. Un photon est alors émis à une énergie <math>E_\gamma = E_3 - E_2</math></p> 
---	--	--

# Le spectre d'absorption et d'émission de l'atome d'hydrogène



## Le spectre de l'hydrogène et les transitions électroniques de l'atome de Bohr



## Exercice

**5.5.3 Une raie infrarouge.** On observe qu'un photon infrarouge de 2633 nm est émis par un atome d'hydrogène. **(a)** Déterminez l'énergie de ce photon en joules et en électronvolts. **(b)** Pour que ce photon soit émis, l'électron est-il passé à un niveau d'énergie  $n$  plus grand ou plus petit ? **(c)** En vous référant au schéma des niveaux d'énergie de l'hydrogène à la fin de l'exposé de la section, déterminez quelle transition est responsable de l'émission de ce photon. (Il s'agit d'une des transition entre les six premiers niveau d'énergie.

## Solution

**5.5.3 Une raie infrarouge.**

**(a)** Évaluons l'énergie du photon de 2633 nm :

$$\begin{aligned} E_\gamma &= \frac{hc}{\lambda} &\Rightarrow & E_\gamma = \frac{hc}{\lambda} \\ & &\Rightarrow & E_\gamma = \frac{(6,63 \times 10^{-34})(3 \times 10^8)}{(2633 \times 10^{-9})} \\ & &\Rightarrow & \boxed{E_\gamma = 7,5541 \times 10^{-20} \text{ J}} \\ & &\Rightarrow & E_\gamma = 7,5541 \times 10^{-20} \text{ J} * \left( \frac{\text{eV}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ CV}} \right) \\ & &\Rightarrow & \boxed{E_\gamma = 0,4721 \text{ eV}} \end{aligned}$$

**(b)** Puisque l'atome a émis un photon, il perd de l'énergie. Ainsi, l'électron passera à un niveau d'énergie  $n$  inférieur à son niveau précédent.

En raison du spectre d'émission de l'atome d'hydrogène, un photon dans l'infrarouge correspond à une transition dans les niveau d'énergie  $n = \{3, 4, 5, 6\}$ . Évaluons le niveau  $E_4$  et  $E_6$  :

$$\begin{aligned} E_n &= -\frac{E_1}{n^2} &\Rightarrow & E_4 = -\frac{(13,6 \text{ eV})}{(4)^2} &\Rightarrow & \boxed{E_4 = -0,85 \text{ eV}} \\ & &\Rightarrow & E_6 = -\frac{(13,6 \text{ eV})}{(6)^2} &\Rightarrow & \boxed{E_6 = -0,377 \text{ eV}} \end{aligned}$$

**(c)** Nous constatons que notre photon émis d'énergie  $E_\gamma = 0,4721 \text{ eV}$  correspond exactement à la transition  $n = 6$  vers  $n = 4$ , car

$$E_{6 \rightarrow 4} = E_4 - E_6 = (-0,85 \text{ eV}) - (-0,377 \text{ eV}) = 0,473 \text{ eV} .$$











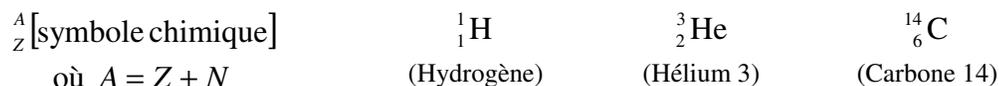




# Chapitre 5.7 – La datation radioactive

## Les symboles chimiques

Les noyaux atomiques se distinguent par leur **nombre de masse**  $A$  correspondant au nombre de nucléons (proton et neutron), par le **numéro atomique**  $Z$  correspondant au nombre de charge élémentaire positive  $+e$  étant le nombre de proton et le nombre de neutron  $N$ . C'est le numéro atomique qui identifie le nom de l'atome par la représentation

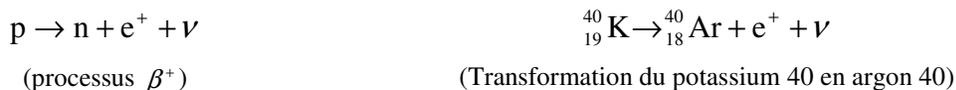


## La désintégration

Dans les atomes, on distingue principalement trois types de désintégration :

- Le processus  $\beta^+$  :

Transformation d'un proton  $p$  en neutron  $n$ . La charge positive  $+e$  du proton est expulsée via un positron  $e^+$  et l'énergie ainsi que la quantité de mouvement est conservée durant le processus via la présence d'un neutrino  $\nu$ .



Lorsque le processus est effectué dans un atome, le neutron reste dans l'atome et le positron ainsi que le neutrino sont expulsés.

- Le processus  $\beta^-$  :

Transformation d'un neutron  $n$  en proton  $p$  et électron  $e^-$ . Une charge positive  $+e$  est expulsée du neutron via un proton ainsi qu'une charge négative  $-e$  via un électron. Pour conserver l'énergie ainsi que la quantité de mouvement durant le processus, un antineutrino  $\bar{\nu}$  est également expulsé du neutron.



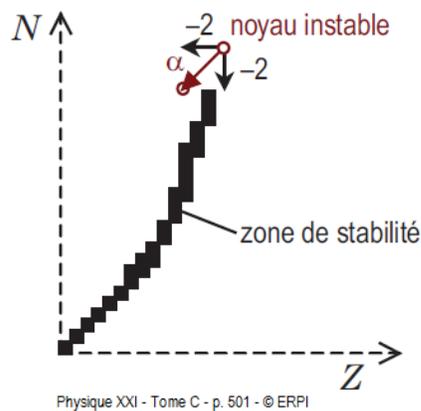
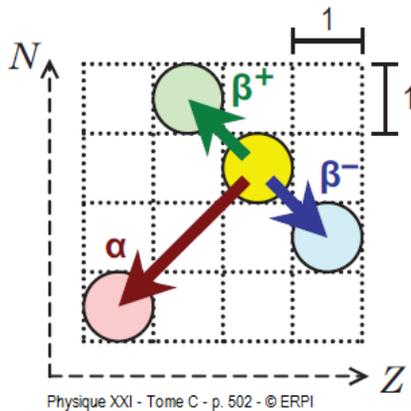
Lorsque le processus est effectué dans un atome, le proton reste dans l'atome et l'électron ainsi que le l'antineutrino sont expulsés.

- Le processus  $\alpha$  :

Expulsion de deux neutrons  $n$  ainsi que de deux protons  $p$  via une particule  $\alpha$  d'un noyau atomique. La particule  $\alpha$  est comparable à un atome d'hélium  ${}^4_2\text{He}$  de charge  $+2e$  (complètement ionisé).



Le schéma ci-contre illustre l'évolution du nombre de neutrons  $N$  et du nombre de protons  $Z$  à l'intérieur d'un atome selon le type de désintégration subit par le noyau.



Ces processus sont nécessaires aux atomes afin que ceux-ci puissent atteindre un état de stabilité.

## Le taux de désintégration

Le taux de désintégration<sup>1</sup>  $R$  correspond au nombre de désintégrations réalisées par un groupe d'atomes par unité de temps. Le taux de désintégration est l'agent qui fait varier le nombre d'atomes  $N$  d'un échantillon dans le temps  $t$ . Puisque ceux-ci sont transformés sous une autre forme, le taux de désintégration fait chuter une population d'atome d'où la présence du signe négatif dans l'équation suivante :

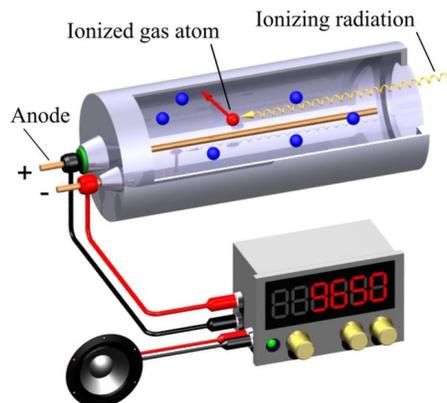
$$R = -\frac{dN}{dt}$$

- où  $R$  : Taux de désintégration d'un échantillon en becquerel (Bq ou s<sup>-1</sup>)
- $N$  : Nombre d'atomes de l'échantillon.
- $t$  : Temps en seconde (s).

## Le compteur Geiger

Un détecteur Geiger est composé d'une chambre isolée remplie d'un gaz inerte, neutre et non conducteur. Au centre de la chambre, on y retrouve une anode (chargée positivement) et une cathode (chargée négativement) sur sa partie extérieure. Lors d'une interaction avec une radiation alpha, beta ou gamma (un photon), un ou plusieurs atomes du gaz se font ioniser ce qui permet la circulation d'un courant et ainsi alimenter le haut-parleur en « clic ».

Un environnement sécuritaire produira environ 50 « clic » par minute. Un environnement hostile comme le cœur d'un site d'essai nucléaire peut atteindre jusqu'à 50 « clic » par seconde.



[https://en.wikipedia.org/wiki/Geiger\\_counter](https://en.wikipedia.org/wiki/Geiger_counter)  
Compteur Geiger

<sup>1</sup> Le taux de désintégration porte également le nom d'activité radioactive.  
Référence : Marc Séguin, Physique XXI Tome C  
Note de cours rédigée par Simon Vézina

## La constante de désintégration

La constante de désintégration  $\lambda$  est le rapport entre le taux de désintégration  $R$  et le nombre de particules d'un échantillon radioactif. Cette valeur est **constante** et ne dépend uniquement que de la particule et du processus qui cause la désintégration :

$$\lambda = \frac{R}{N}$$

(Définition de la constante de désintégration)

$$R = \lambda N$$

(Relation entre constante de désintégration et l'activité)

où  $R$  : Taux de désintégration d'un échantillon en becquerel (Bq)

$\lambda$  : Constante de désintégration ( $s^{-1}$ )

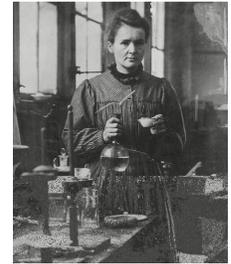
$N$  : Nombre d'atomes dans l'échantillon.

## Le curie

En l'honneur de Marie Curie pour ses travaux réalisées sur le polonium et le radium, le curie (Ci) est un unité d'activité radioactive :

$$1 \text{ Ci} \equiv 3,7 \times 10^{10} \text{ Bq}$$

Cette valeur est très élevée hautement toxique. En comparaison, un corps humain est une source de 8 000 Bq en raison du carbone  $^{14}\text{C}$  et du potassium  $^{40}\text{K}$  présents dans le corps.



<https://www.britannica.com/biography/Marie-Curie>

Marie Curie  
(1867-1934)

Pour avoir une force activité  $R$ , il faut soit :

- 1) Un échantillon très riche/concentré en atome radioactif ( $N \uparrow$  : Combustible pour réacteur nucléaire)
- 2) Un échantillon contenant un élément fortement radioactif ( $\lambda \uparrow$  : Imagerie/traitement médical)

## La loi de la désintégration radioactive

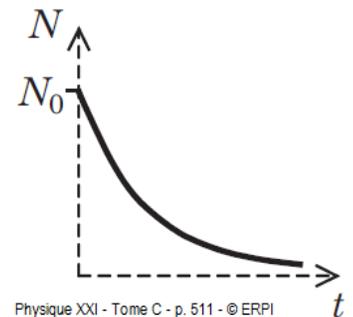
La loi de la désintégration radioactive permet d'évaluer l'évolution d'une très grande population de particules se désintégrant selon la relation  $R = \lambda N$ . Ainsi, une population initiale égale à  $N_0$  sera réduite à  $N$  après un écoulement de temps  $t$  selon l'équation suivante :

$$R = R_0 e^{-\lambda t}$$

(Évolution de l'activité)

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

(Évolution d'une population d'atomes)



Physique XXI - Tome C - p. 511 - © ERPI

où  $R$  : Taux de désintégration d'un échantillon au temps  $t$  (Bq)

$N$  : Nombre d'atomes dans l'échantillon au temps  $t$ .

$\lambda$  : Constante de désintégration ( $s^{-1}$ )

$t$  : Temps écoulé durant la désintégration (s)

$R_0$  : Taux de désintégration initial (Bq)

$N_0$  : Nombre d'atomes dans l'échantillon initialement.

### Preuve :

Débutons cette preuve par énoncer la relation entre la constante de désintégration  $\lambda$  et l'activité  $R$  tel que  $R = \lambda N$  et remplaçons l'activité  $R$  par ce qu'elle influence sur la population d'atome  $N$  étant le rythme de la diminution  $-dN/dt$ . Par la suite, nous pourrons développer cette équation sous la forme d'une équation différentielle :

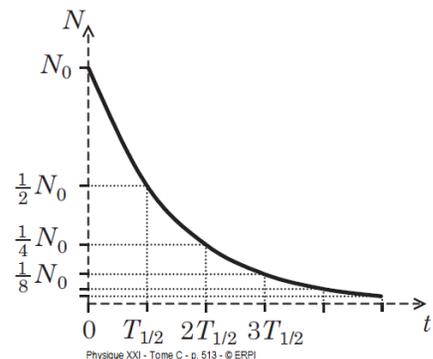
$$\begin{aligned} R = \lambda N &\Rightarrow -\frac{dN}{dt} = \lambda N \\ &\Rightarrow \frac{dN}{N} = -\lambda dt \\ &\Rightarrow \int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = \int_0^t -\lambda dt \\ &\Rightarrow [\ln|N|]_{N_0}^N = -\lambda[t]_0^t \\ &\Rightarrow \ln|N| - \ln|N_0| = -\lambda t \\ &\Rightarrow \ln\left|\frac{N}{N_0}\right| = -\lambda t \\ &\Rightarrow \frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t} \\ &\Rightarrow N = N_0 e^{-\lambda t} \quad \blacksquare (1) \\ &\Rightarrow \left(\frac{R}{\lambda}\right) = \left(\frac{R_0}{\lambda}\right) e^{-\lambda t} \\ &\Rightarrow R = R_0 e^{-\lambda t} \quad \blacksquare (2) \end{aligned}$$

## Le temps de demi-vie

Le temps de demi-vie correspond au temps à écouler avant qu'un échantillon totalisant initialement  $N_0$  atome soit réduit de moitié ( $N = N_0/2$ ). On peut également affirmer que le taux de désintégration initial  $R_0$  aura également diminué de moitié ( $R = R_0/2$ ) après un écoulement de temps égal à une demi-vie :

$$T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

où  $T_{1/2}$  : Temps de demi-vie de la désintégration (s)  
 $\lambda$  : Constante de désintégration ( $s^{-1}$ )



### Remarque<sup>2</sup> :

Le 26 avril 1986, un incident nucléaire est survenu dans la ville de Tchernobyl en Ukraine avec un réacteur réalisant la combustion de dioxyde d'uranium faiblement enrichie (2% de <sup>235</sup>U). Puisque la demi-vie de cet élément est estimée à 703 800 000 ans, ce site sera radioactif encore pour plusieurs années.

### Preuve :

À partir de la loi de la désintégration radioactive, introduisons dans cette équation un écoulement de temps correspondant à demi-vie  $T_{1/2}$  et analysons l'équation sachant que la population d'atomes sera réduit au nombre de  $N = N_0 / 2$  :

$$\begin{aligned} N = N_0 e^{-\lambda t} &\Rightarrow \left(\frac{N_0}{2}\right) = N_0 e^{-\lambda(T_{1/2})} \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda T_{1/2}} \\ &\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\lambda T_{1/2} \\ &\Rightarrow T_{1/2} = \frac{1}{-\lambda} \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ &\Rightarrow T_{1/2} = \frac{1}{-\lambda} (\ln(1) - \ln(2)) \\ &\Rightarrow T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda} \quad \blacksquare \quad (\ln(1) = 0) \end{aligned}$$

## **La relation entre la constante de désintégration et la probabilité de désintégration**

En construction ...

---

<sup>2</sup> Référence : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Catastrophe\\_nucl%C3%A9aire\\_de\\_Tchernobyl](https://fr.wikipedia.org/wiki/Catastrophe_nucl%C3%A9aire_de_Tchernobyl)

Référence : Marc Séguin, Physique XXI Tome C

Note de cours rédigée par Simon Vézina

**Situation 4 : L'homme de glace.** En 1991, dans les Alpes, près de la frontière entre l'Autriche et l'Italie, des randonneurs ont découvert le cadavre d'un homme : le haut de son corps émergeait d'une surface de glace en train de fondre ! Le  $^{14}\text{C}$  (isotope du carbone radioactif) qui se trouve dans chaque gramme de carbone (toutes variétés confondues) de son corps possède un taux de désintégration de 0,133 Bq. On désire déterminer depuis combien de siècles il est mort. On suppose qu'au moment de sa mort, la proportion de  $^{14}\text{C}$  dans son corps était la même que dans l'environnement d'aujourd'hui :  $6,5 \times 10^{10}$  noyaux de  $^{14}\text{C}$  par gramme de carbone (hypothèse forte de la technique de la datation au carbone 14). La demi-vie du carbone  $^{14}\text{C}$  est de 5730 ans.

Évaluons la demi-vie du carbone  $^{14}\text{C}$  en seconde :

$$T_{1/2} = 5730 \text{ ans} \quad \Rightarrow \quad T_{1/2} = 5730 \text{ ans} = 5730 \text{ ans} \times \frac{365,25 \text{ jours}}{\text{an}} \times \frac{24 \text{ h}}{\text{jour}} \times \frac{60 \text{ min}}{\text{h}} \times \frac{60 \text{ s}}{\text{h}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T_{1/2} = 1,808 \times 10^{11} \text{ s}}$$

Évaluons la constante de désintégration  $\lambda$  à partir du temps de demi-vie  $T_{1/2}$  :

$$T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad (1,808 \times 10^{11} \text{ s}) = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\lambda = 3,834 \times 10^{-12} \text{ s}^{-1}} \quad (\lambda = 3,834 \times 10^{-12} \text{ Bq})$$

Évaluons la population  $N$  de carbone  $^{14}\text{C}$  associé à l'échantillon de 1 g prélevé dans l'homme de glace :

$$R = \lambda N \quad \Rightarrow \quad (0,133 \text{ Bq}) = (3,834 \times 10^{-12} \text{ Bq})N$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{N = 3,469 \times 10^{10} \text{ atome de } ^{14}\text{C}} \quad (\text{Remarque : pour un échantillon de 1 g})$$

Évaluons, à l'aide de notre hypothèse, la population  $N_0$  de carbone  $^{14}\text{C}$  associé à l'échantillon de 1 g prélevé dans l'homme de glace à l'instant où celui-ci est décédé :

$$N_0 = m \times \frac{6,5 \times 10^{10} \text{ atomes } ^{14}\text{C}}{\text{gramme carbone C}}$$

$$\Rightarrow \quad N_0 = (1 \text{ g}) \times \frac{6,5 \times 10^{10} \text{ atomes } ^{14}\text{C}}{\text{gramme carbone C}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{N_0 = 6,5 \times 10^{10} \text{ atomes } ^{14}\text{C}}$$

Remarque :

Pour avoir une mesure plus précise et plus rapide de l'activité  $R$ , un prélèvement plus élevé que 1 g de carbone aurait été à privilégier. Cette décision aurait justifié l'usage de l'équation précédente.

Évaluons le temps écoulé entre le décès et l'échantillonnage prélevé sur l'homme de glace à l'aide de la loi de la désintégration radioactive :

$$\begin{aligned}
 N = N_0 e^{-\lambda t} &\Rightarrow \frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t} \\
 &\Rightarrow \ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = -\lambda t \\
 &\Rightarrow t = \frac{1}{-\lambda} \ln\left(\frac{N}{N_0}\right) \\
 &\Rightarrow t = \frac{1}{-(3,834 \times 10^{-12})} \ln\left(\frac{3,469 \times 10^{10}}{6,5 \times 10^{10}}\right) \\
 &\Rightarrow \boxed{t = 1,638 \times 10^{11} \text{ s}}
 \end{aligned}$$

Si l'on convertit ce temps en siècles, cela nous donnera le résultat suivant :

$$\begin{aligned}
 t = 1,638 \times 10^{11} \text{ s} &\Rightarrow t = 1,638 \times 10^{11} \text{ s} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \times \frac{1 \text{ h}}{60 \text{ min}} \times \frac{1 \text{ jour}}{24 \text{ h}} \times \frac{1 \text{ an}}{365,25 \text{ jours}} \times \frac{1 \text{ siècle}}{100 \text{ ans}} \\
 &\Rightarrow \boxed{t = 51,905 \text{ siècles}}
 \end{aligned}$$

