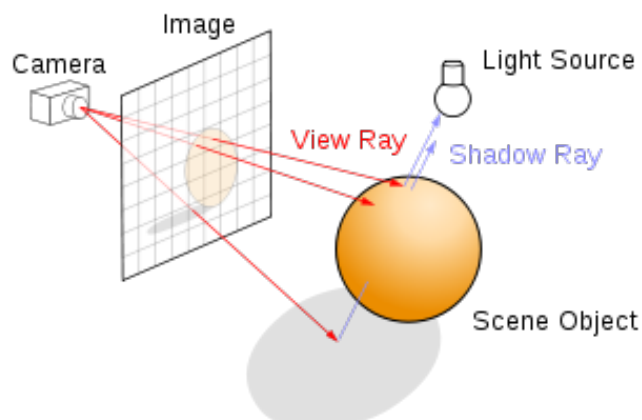


# Chapitre 6.1 – Le *ray tracer* en infographie

## Un *ray tracer* en quelques mots

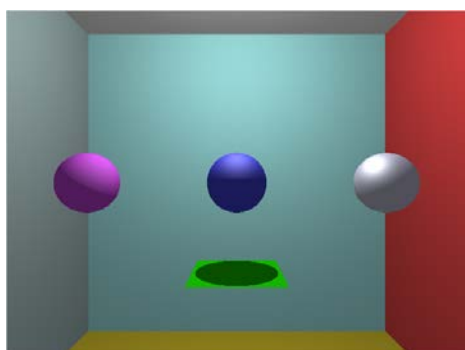
Un *ray tracer* est un logiciel permettant de visualiser une scène modélisée en 3D fondé sur la théorie de l'optique géométrique inversée. L'objectif est de **lancer des rayons** depuis un point d'observation (une caméra) et de suivre la **trajectoire optique inverse**<sup>1</sup> de ce rayon.

Lorsqu'il y a une **intersection** entre le rayon et un objet de l'environnement, un calcul d'**illumination** (*shading*) détermine si l'objet intersecté est éclairé par une source de lumière et évalue la couleur que celui-ci va réfléchir et transmettre vers le point d'observation.

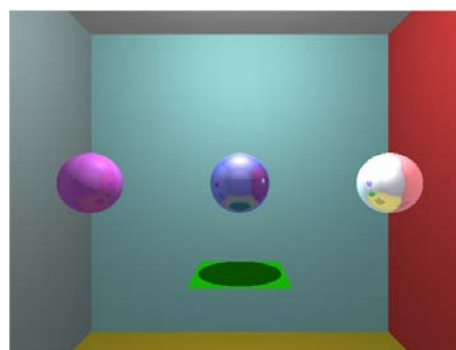


[http://en.wikipedia.org/wiki/Ray\\_tracing\\_\(graphics\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Ray_tracing_(graphics))  
Description visuelle du fonctionnement d'un *ray tracer*.

Les résultats dépendent de la qualité de l'algorithme et du détail de la scène :



Illumination directe seulement avec source de lumière blanche au-dessus de la sphère bleue.



Illumination directe et indirecte à un niveau avec des sphères peu et très miroir. Une source de lumière blanche est au-dessus de la sphère bleue.

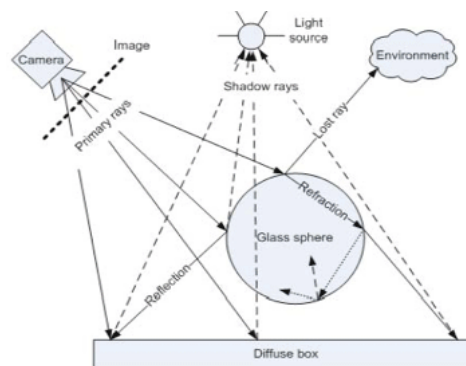
## Termes techniques d'un *ray tracer*

### Scène

Une scène représente un environnement en trois dimensions où l'on retrouve des objets (primitives) que l'on désire visualiser à l'aide d'une image en deux dimensions.

### Caméra

La caméra représente le point de référence par rapport auquel on effectue la visualisation de la scène.



<http://oivdoc90.vsg3d.com/content/513-what-real-time-ray-tracing>  
Illustration de plusieurs rayons lancés depuis la caméra par un *ray tracer*.

<sup>1</sup> Le trajet réel de la lumière est toujours de la source de lumière à l'œil (ou la caméra).

## Rayon

Un rayon correspond à la trajectoire inverse de la lumière initialement partant de la caméra. L'intersection de ce rayon avec un objet de la scène permettra de déterminer la couleur de l'image à générer.

## Géométrie

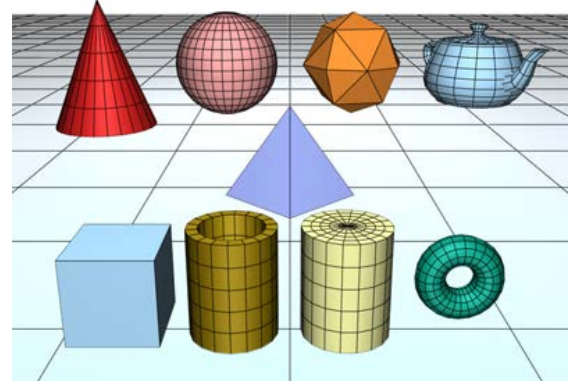
Une géométrie représente la forme d'un objet (plan, sphère, triangle, cube, etc).

## Matériel

Un matériel représente les caractéristiques physiques et visuelles d'un objet (couleur, indice de réfraction, transparence, etc).

## Primitive (objet de la scène)

Une primitive est un objet de la scène que l'on caractérise par une géométrie et un matériel.



<http://www.sluniverse.com/php/vb/general-sl-discussion/68454-parametric-tools-2.html>

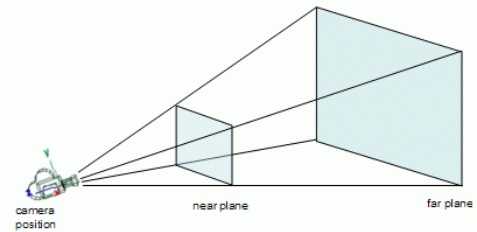
Illustration de géométries typiques.

## Source de lumière

Une source de lumière permet d'illuminer une scène afin de rendre visible les matériaux des primitives dont la géométrie a été intersectée par un rayon. Une source de lumière peut être bloquée par des géométries ce qui reproduit l'effet d'ombrage.

## Pyramide de vue (*view frustum*)

Une pyramide de vue correspond à la région de la scène qui sera vue par la caméra. Elle est délimitée par un écran de face (*near clipping plane*) et un écran de fond (*far clipping plane*).



<http://www.lighthouse3d.com/tutorials/view-frustum-culling/>

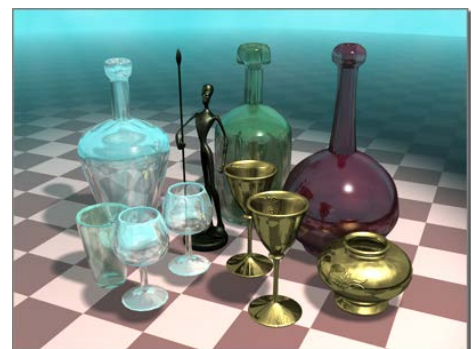
Pyramide de vue associée à une caméra.

## Algorithme d'illumination (*shader*)

Un algorithme d'illumination est un calcul évaluant la **réflexion** et la **transmission** d'une source de lumière sur une primitive. Ce calcul dépend de plusieurs facteurs comme la géométrie et le matériel de la primitive éclairée.

## Écran de vue (*viewport*)

Un écran de vue est une grille régulière de pixels. L'objectif du *raytracer* sera de lancer un rayon depuis la caméra dans chaque pixel afin de calculer une couleur qui dépendra de l'intersection du rayon avec les différentes primitives de la scène et de leur illumination.



<http://knowledge.autodesk.com/support/3ds-max/learn-explore/caas/CloudHelp/cloudhelp/2015/ENU/3DSMax/files/GUID-4D919F24-F0BB-47F0-9C2D-28D393C1A1DE-htm.html>

Scène avec un rendu avec un algorithme d'illumination de haute qualité.

## L'équation d'un rayon

Un rayon  $\vec{r}_{\text{ray}}$  est une structure ayant une origine  $\vec{r}_0$  et une orientation  $\vec{v}$ . Il permet de faire des calculs d'intersection avec des formes géométriques d'une scène. On utilise un paramètre de temps  $t$  pour ordonner chronologiquement les intersections du rayon avec les objets de la scène.

Un rayon paramétré dans le temps aura la forme suivante :

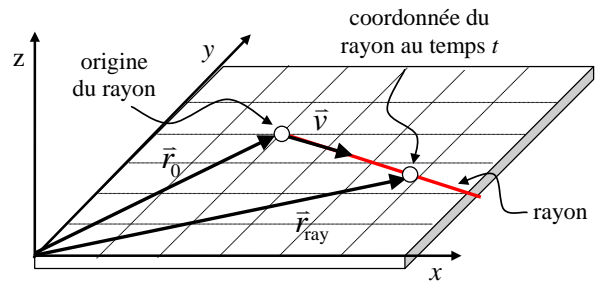
$$\vec{r}_{\text{ray}} = \vec{r}_0 + \vec{v}t$$

où  $\vec{r}_{\text{ray}}$  : Coordonnée touchée par le rayon après un temps  $t$ .

$\vec{r}_0$  : Origine du rayon.

$\vec{v}$  : Orientation du rayon ( $\|\vec{v}\| = 1$ , vecteur unitaire).

$t$  : Temps écoulé dans le déplacement du rayon.



En informatique, la définition d'un rayon aura besoin des variables suivantes :

Géométrie du rayon	Information sur la géométrie intersectée
<ul style="list-style-type: none"> <li>Position d'origine du rayon (<math>\vec{r}_0</math>)</li> <li>Orientation du rayon (<math>\vec{v}</math>)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Le temps <math>t</math> pour intercepter la géométrie.</li> <li>La normale à la surface <math>\vec{n}</math> au site de l'interception.</li> <li>Une coordonnée de texture <math>uv</math> (s'il y en a une).</li> <li>Référence vers le matériel appliqué sur la géométrie (ex : pour obtenir la couleur de la géométrie).</li> </ul>

## La caméra

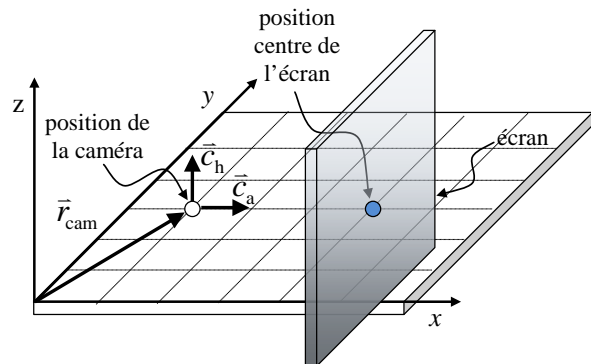
La caméra représente le site à partir duquel nous allons prendre une image en deux dimensions d'une scène en trois dimensions. Pour ce faire, il nous faut la position de la caméra, son orientation et la définition du « haut » de la caméra.

### Paramètres de la caméra :

$\vec{r}_{\text{cam}}$  : Position de la caméra.

$\vec{c}_a$  : Orientation l'avant de la caméra  
( $\|\vec{c}_a\| = 1$ , vecteur unitaire).

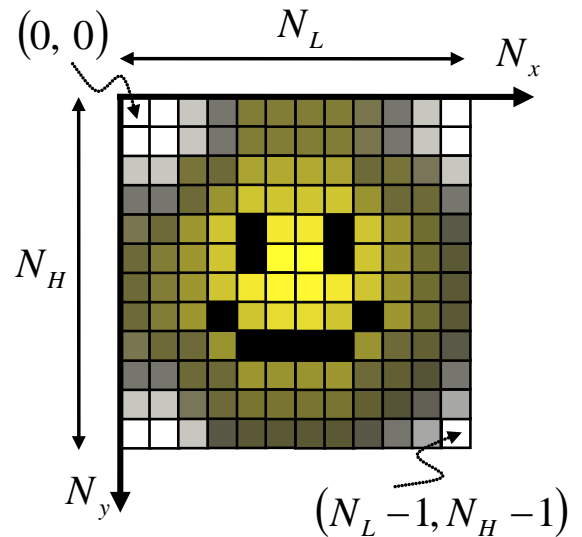
$\vec{c}_h$  : Orientation du haut de la caméra  
( $\|\vec{c}_h\| = 1$ , vecteur unitaire).



## L'écran de vue (*viewport*)

L'écran de vue (*viewport*) correspond à la portion de la scène qui sera visible par la caméra. Cet écran est composé d'une grille régulière à deux dimensions dont chaque élément porte le nom de « pixel ». Il y a  $N_L$  pixels en largeur (*width*) et  $N_H$  pixels en hauteur (*height*). La largeur n'est pas nécessairement égale à la hauteur. De nos jours, la résolution d'un moniteur<sup>2</sup> est de l'ordre de  $1440 \times 900$ .

En infographie, on fait correspondre un **axe x** de nombre entier  $N_x$  avec la **largeur** dont le sens **positif** est **vers la droite** et un **axe y** de nombre entier  $N_y$  avec la **hauteur** avec un **sens positif vers le bas**. Le pixel de coordonnée  $(N_x = 0, N_y = 0)$  est alors situé dans le coin supérieur gauche de l'écran (voir schéma ci-contre).



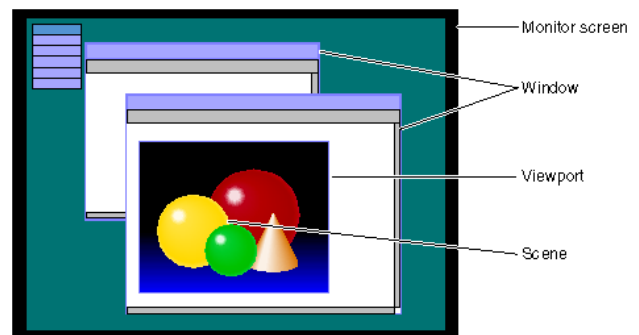
Afin d'affecter la bonne couleur à chaque pixel de l'écran de vue, il faudra lancer un rayon  $\vec{r}_{\text{ray}}$  depuis la position de la caméra  $\vec{r}_{\text{cam}}$  dans chaque pixel  $(N_x, N_y)$  de l'écran de vue. Il faudra faire correspondre à chaque pixel  $(N_x, N_y)$  une coordonnée  $(x, y, z)$  dans l'espace monde (*world space*) de la scène 3d tel que

$$(N_x, N_y) \rightarrow \vec{r}_0 = (x, y, z)$$

afin de déterminer la position  $\vec{r}_0$  d'entrée du rayon  $\vec{r}_{\text{ray}}$  dans la scène (puisque ce rayon n'est pas officiellement lancé depuis la caméra). Ce calcul de transformation d'espace sera réalisé par la pyramide de vue (*view frustum*).

Afin de clarifier certains termes techniques, voici une représentation visuelle de plusieurs éléments se retrouvant dans la description de l'écran :

- moniteur (*monitor screen*)
- fenêtre d'un programme (*window*)
- écran de vue (*viewport*)
- scène 3d à visualiser (*scene*)

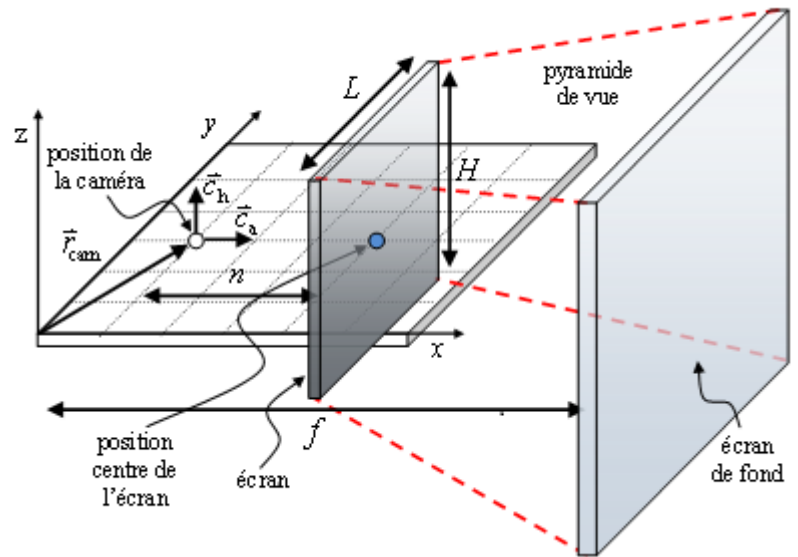


[http://techpubs.sgi.com/library/tpl/cgi-bin/getdoc.cgi?coll=nt&db=bks&srch=&fname=/SGI\\_Developer/Cos3C\\_PG/sgi\\_html/ch09.html](http://techpubs.sgi.com/library/tpl/cgi-bin/getdoc.cgi?coll=nt&db=bks&srch=&fname=/SGI_Developer/Cos3C_PG/sgi_html/ch09.html)

<sup>2</sup> Pour un écran de 19''.

## La pyramide de vue (*view frustum*)

La pyramide de vue (*view frustum*) correspond à la région de la scène qui sera visualisée par la caméra. L'écran de face (*near clipping plane*) représente une surface de taille  $L \times H$  dans l'espace  $xyz$  de la scène sur laquelle la visualisation de la scène va s'effectuer. D'une certaine façon, elle représente l'écran de vue dans l'espace de la scène. La profondeur de la pyramide de vue est limitée par l'écran de fond (*far clipping plane*).



Pour bien définir la pyramide de vue, il faut préciser la distance  $n$  entre la caméra et l'écran de face et la distance  $f$  entre la caméra et l'écran de fond.

### Définition des paramètres :

$n$  : Distance entre la caméra et l'écran de face (*near clipping plane*).

$f$  : Distance entre la caméra et l'écran de fond (*far clipping plane*).

$L$  : Largeur de l'écran (*width*).

$N_L$  : Nombre de pixels en largeur de l'écran de vue (*viewport*).

$H$  : Hauteur de l'écran (*height*).

$N_H$  : Nombre de pixels en hauteur de l'écran de vue (*viewport*).

## Comment déterminer $L$ et $H$ adéquatement

Afin de déterminer le plus judicieusement la largeur  $L$  et la hauteur  $H$  de l'écran de face, il est préférable d'utiliser un angle d'ouverture  $\theta$  selon l'axe vertical et d'utiliser un ratio  $a$  basé sur le nombre de pixels  $N_L$  en largeur et  $N_H$  en hauteur afin de produire une image sans distorsion. Le nombre de pixels disponibles dépend de la fenêtre du rendu (*viewport*) utilisée dans l'application.

Habituellement, on utilise un angle d'ouverture tel que

$$\theta = 60^\circ$$

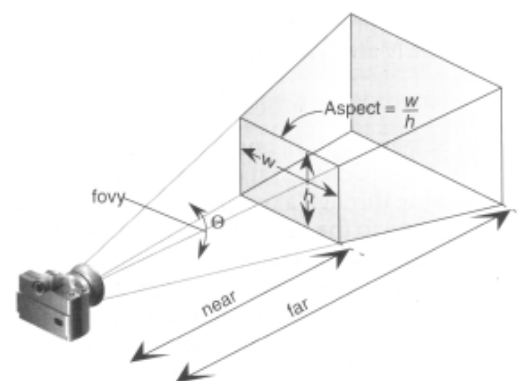


Figure 3-14 Perspective Viewing Volume Specified by gluPerspective() <https://andrewharvey4.wordpress.com/2009/12/>

$N_L$  ou  $w$  : Nombre de pixels sur la largeur.

$N_H$  ou  $h$  : Nombre de pixels sur la hauteur.

C'est ce type d'implémentation que la librairie *OpenGL* propose d'utiliser grâce à la fonction *gluPerspective*<sup>3</sup> pour configurer la pyramide de vue dans le calcul du rendu :

```
void gluPerspective(GLdouble fovy,
                   GLdouble aspect,
                   GLdouble zNear,
                   GLdouble zFar);
```

*fovy*

Specifies the field of view angle, in degrees, in the y direction.

*aspect*

Specifies the aspect ratio that determines the field of view in the x direction. The aspect ratio is the ratio of x (width) to y (height).

*zNear*

Specifies the distance from the viewer to the near clipping plane (always positive).

*zFar*

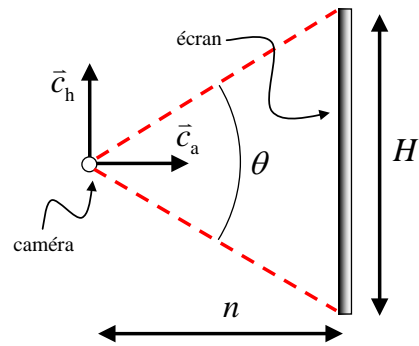
Specifies the distance from the viewer to the far clipping plane (always positive).

Pour définir adéquatement la hauteur  $H$  de l'écran à partir de  $n$  et  $\theta$ , nous pouvons utiliser la relation trigonométrique

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{H/2}{n}$$

ce qui nous donne

$$H = 2n \tan\left(\frac{\theta}{2}\right).$$



Pour éviter la distorsion de l'image, on utilise le ratio  $a$  à partir de  $N_L$  et  $N_H$  tel que

$$a = \frac{N_L}{N_H}$$

ce qui nous permet de définir la largeur  $L$  de l'écran à l'aide de l'équation

$$L = aH .$$

En résumé, nous pouvons déterminer  $L$  et  $H$  de la façon suivante :

Angle d'ouverture à définir	Ratio des pixels	Hauteur de l'écran	Largeur de l'écran
$\theta = 60^\circ$ (habituellement)	$a = \frac{N_L}{N_H}$	$H = 2n \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$	$L = aH$

<sup>3</sup> <http://www.opengl.org/sdk/docs/man2/xhtml/gluPerspective.xml>

## La localisation du pixel sur l'écran

Pour construire un rayon, on débute avec la localisation du pixel à colorer sur l'écran en utilisant deux vecteurs « pixel unitaire »  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$ . Ces deux vecteurs permettent se déplacer sur la surface de l'écran de face à coup de « taille de pixel ».

La position du pixel sera

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_{\text{cam}} + n\vec{c}_a + \vec{r}_{\text{ini}} + N_x\vec{u}_1 + N_y\vec{u}_2$$

avec l'usage des vecteurs pixels unitaires

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{c}_a \times \vec{c}_h}{\|\vec{c}_a \times \vec{c}_h\|} \frac{L}{N_L} \quad \text{et} \quad \vec{u}_2 = \frac{\vec{c}_a \times \vec{u}_1}{\|\vec{c}_a \times \vec{u}_1\|} \frac{H}{N_H}$$

et l'usage du vecteur

$$\vec{r}_{\text{ini}} = -\frac{N_L}{2}\vec{u}_1 - \frac{N_H}{2}\vec{u}_2$$

localisant le pixel de coordonnée (0,0) situé dans le coin supérieur gauche de l'écran de vue depuis le centre de l'écran. Il faut préciser que  $\vec{r}_0$  tel que défini donne une coordonnée (x,y,z) au pixel dans l'espace de scène associé au coin supérieur gauche du pixel ( $N_x, N_y$ ). Au besoin, on peut **modifier l'équation** de  $\vec{r}_0$  pour avoir comme coordonnée le **centre du pixel** ou tout simplement une **coordonnée aléatoire** dans le pixel.

### Définition des paramètres :

$\vec{r}_0$  : Position du pixel à colorer.

$\vec{r}_{\text{cam}}$  : Position de la caméra.

$\vec{c}_a$  : Orientation l'avant de la caméra ( $\|\vec{c}_a\| = 1$ , vecteur unitaire).

$\vec{c}_h$  : Orientation du haut de la caméra ( $\|\vec{c}_h\| = 1$ , vecteur unitaire).

$n$  : Distance entre la caméra et l'écran de projection en 2D de la scène.

$\vec{r}_{\text{ini}}$  : Vecteur pour positionner le pixel de coordonnée (0,0) à partir du centre de l'écran.

$N_x$  : Coordonnée écran du pixel selon l'axe largeur de l'écran ( $N_x \in [0.. N_L - 1]$ , entier).

$N_y$  : Coordonnée écran du pixel selon l'axe hauteur de l'écran ( $N_y \in [0.. N_H - 1]$ , entier).

$L$  : Largeur de l'écran (*width*).

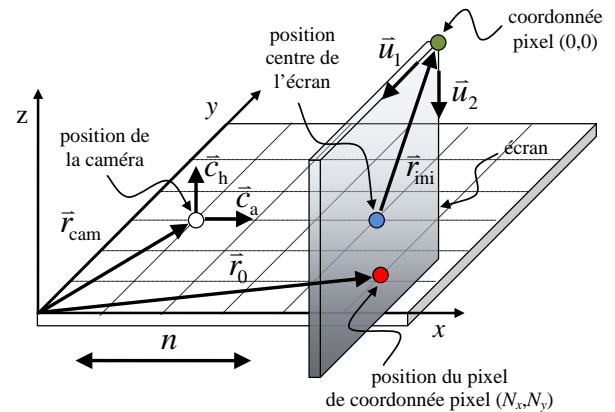
$N_L$  : Nombre de pixels en largeur.

$H$  : Hauteur de l'écran (*height*).

$N_H$  : Nombre de pixels en hauteur.

$\vec{u}_1$  : Vecteur pixel unitaire qui est orienté selon l'axe largeur de l'écran vers la droite.

$\vec{u}_2$  : Vecteur pixel unitaire qui est orienté selon l'axe hauteur de l'écran vers le bas.



## La construction du rayon

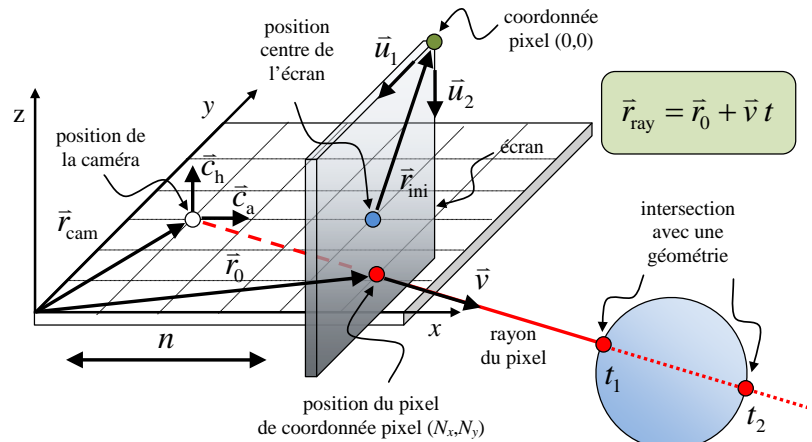
La construction d'un rayon  $\vec{r}_{ray}$  nécessite la position du pixel  $\vec{r}_0$  sur l'écran et l'orientation  $\vec{v}$  du rayon que l'on définit comme étant

$$\vec{v} = \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}_{cam}}{\|\vec{r}_0 - \vec{r}_{cam}\|}$$

ce qui nous donne un rayon

$$\vec{r}_{ray} = \vec{r}_0 + \vec{v}t$$

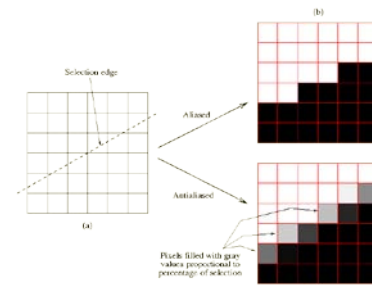
particulier pour tous les pixels de coordonnée  $(N_x, N_y)$  de l'écran.



Il ne reste plus qu'à tester l'intersection de ce rayon avec les géométries de la scène afin d'évaluer la couleur du rayon et ainsi colorer adéquatement le pixel  $(N_x, N_y)$ .

## Anticrénelage (anti-aliasing)

Le crénelage (*aliasing*) portant également le nom d'effet escalier survient lorsque l'on doit reproduire une courbe à couleur unique dans un espace en forme de grille régulière (écran de pixels). Pour réduire l'effet visuel, il faut calculer une couleur moyenne sur la ligne de démarcation des couleurs afin d'adoucir la transition des couleurs. Pour une ligne noire sur fond blanc, il faut remplacer certains pixels blancs et noirs en pixels gris sous différentes teintes afin d'adoucir l'effet d'escalier.

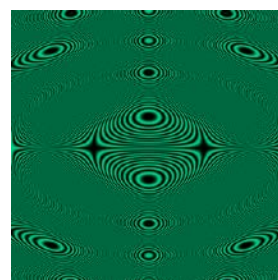


[http://www.linuxtopia.org/online\\_books/graphics\\_tools/gimp\\_advanced\\_guide/gimp\\_guide\\_node36\\_007.html](http://www.linuxtopia.org/online_books/graphics_tools/gimp_advanced_guide/gimp_guide_node36_007.html)

Pour réduire le crénelage (*anti aliasing*) dans un algorithme de *ray tracing*, il faut lancer plusieurs rayons dans chaque pixel avec des coordonnées internes différentes (pas toujours dans le coin supérieur gauche) et faire une moyenne des couleurs calculées. Ceci permet d'avoir une couleur « pondérée » lorsqu'un rayon touche la bordure d'une géométrie. Certains rayons d'un même pixel toucheront une géométrie et d'autres non ce qui donnera une couleur nuancée.

Cependant, ceci peut représenter une perte d'information si deux couleurs vraiment distinctes peuvent se retrouver dans le même pixel.

Exemple : Figure d'interférence



Patron d'interférence de Young  
( $d = 2 \text{ mm}$ ,  $\lambda = 500 \text{ nm}$ ,  $L = 3 \text{ m}$ ).



Disparition du patron d'interférence  
avec 5 rayons aléatoires.



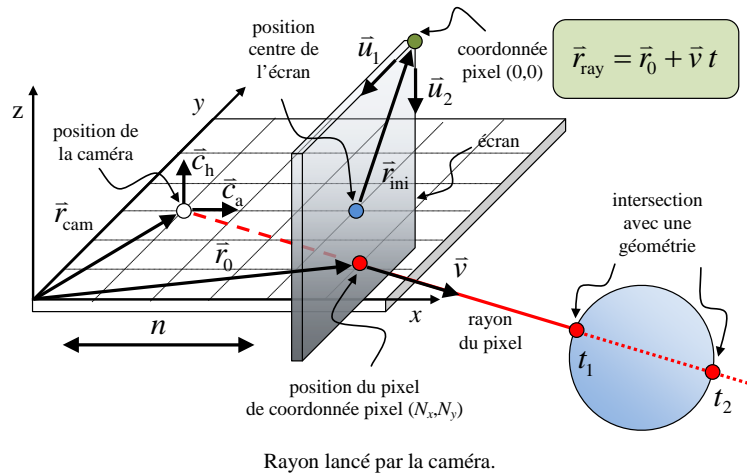
# Chapitre 6.2a – L'intersection dans le ray tracer

## Le calcul de l'intersection

Le calcul de l'intersection consiste à vérifier si un rayon

$$\vec{r}_{\text{ray}} = \vec{r}_0 + \vec{v} t$$

partant de la caméra et traversant un pixel de l'écran de projection peut effectuer une intersection avec une géométrie de la scène. Si plusieurs géométries réalisent une intersection avec le rayon, il faut identifier la géométrie la plus près en utilisant le temps  $t$  pour ordonner les intersections réalisées.



Il y aura intersection si une coordonnée du rayon  $\vec{r}_{\text{ray}}$  à un temps  $t$  est égale à une coordonnée  $\vec{r}_{\text{géo}} = \vec{r}_{\text{géo}}(x, y, z)$  d'une géométrie. Habituellement, nous exprimons la forme des géométries sous forme canonique (surface quadrique<sup>1</sup>) ce qui représente une contrainte aux valeurs admissibles du rayon  $\vec{r}_{\text{ray}}$  pour qu'il y ait intersection. Si aucune valeur ne permet de satisfaire la contrainte, alors il n'y a pas d'intersection avec le rayon  $\vec{r}_{\text{ray}}$ .

Voici quelques exemples de forme géométriques sous forme implicite  $G(x, y, z) = 0$  :

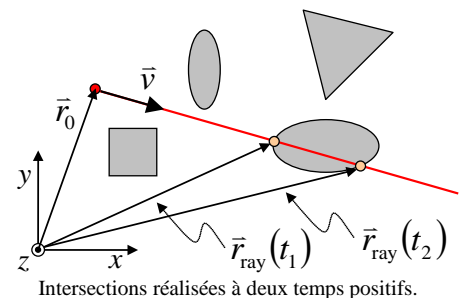
Plan	Triangle	Sphère
$ax + by + cz + d = 0$	$ax + by + cz + d = 0$ (avec contraintes sur $x, y$ et $z$ )	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$

## L'analyse des solutions en temps $t$

Puisque le calcul de l'intersection d'un rayon  $\vec{r}_{\text{ray}}$  avec une géométrie consiste à évaluer les multiples solutions d'une équation paramétrée selon la variable du temps  $t$ , il y aura souvent plusieurs solutions.

Dans le contexte d'un ray tracer, la solution physique devra respecter les contraintes suivantes :

- 1) Le temps  $t$  doit être **réel**. Un temps imaginaire ne correspond pas à une intersection dans l'espace réel  $xyz$ .
- 2) Le temps  $t$  doit être **positif**. Un temps négatif correspond à une intersection dans la direction inverse au rayon (dans le sens de  $-\vec{v}$ ).
- 3) Le temps  $t$  doit être le **plus petit** de l'ensemble des solutions tout en **étant positif** afin de déterminer l'intersection valide la plus près de l'origine du rayon.



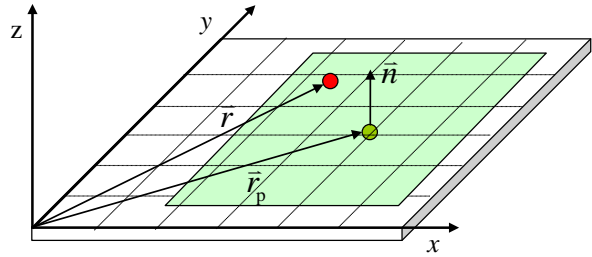
<sup>1</sup> Pour une forme générale, consultez le lien suivant : <http://fr.wikipedia.org/wiki/Quadrique>

## L'équation vectorielle d'un plan

L'équation implicite  $P(x, y, z)$  d'un plan position passant par le point  $(x_p, y_p, z_p)$  dont la normale à la surface est orientée selon  $(a, b, c)$  est sous la forme

$$ax + by + cz + d = 0$$

où  $d = -ax_p - by_p - cz_p$  et  $x, y$  et  $z$  correspond à une coordonnée sur le plan.



Visualisation d'un plan situé dans le plan  $xy$ .

On peut réécrire cette relation sous forme vectorielle à l'aide de l'équation suivante :

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_p) = 0$$

où  $\vec{r}$  : Position d'un point sur le plan.

$$(\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

$\vec{r}_p$  : Position d'un point de référence sur le plan.

$$(\vec{r}_s = x_s\vec{i} + y_s\vec{j} + z_s\vec{k})$$

$\vec{n}$  : Normale à la surface du plan.

$$(\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k})$$

### Preuve :

Considérons un plan passant par la coordonnée  $(x_p, y_p, z_p)$  ayant une normale à la surface sous forme vectorielle  $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ . Réécrivons l'équation implicite du plan sous forme vectoriel où  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  correspond à une coordonnée  $(x, y, z)$  située sur le plan :

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (\text{Équation implicite du plan})$$

$$\Rightarrow ax + by + cz + (-ax_p - by_p - cz_p) = 0 \quad (d = -ax_p - by_p - cz_p)$$

$$\Rightarrow (a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}) \cdot (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) + (-ax_p - by_p - cz_p) = 0 \quad (\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z)$$

$$\Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{r} + (-ax_p - by_p - cz_p) = 0 \quad (\text{Définition de } \vec{n} \text{ et } \vec{r})$$

$$\Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{r} - (ax_p + by_p + cz_p) = 0 \quad (\text{Factoriser signe négatif})$$

$$\Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{r} - (a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}) \cdot (x_p\vec{i} + y_p\vec{j} + z_p\vec{k}) = 0 \quad (\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z)$$

$$\Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{r} - \vec{n} \cdot \vec{r}_p = 0 \quad (\text{Définition de } \vec{n} \text{ et } \vec{r}_p)$$

$$\Rightarrow \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_p) = 0 \quad \blacksquare \quad (\text{Factoriser } \vec{n})$$

## L'intersection d'un rayon avec un plan

Le temps  $t$  requis pour réaliser une intersection entre un rayon  $\vec{r}_{\text{ray}}$  et un plan passant par la position  $\vec{r}_p$  dont la normale à la surface est orientée selon le vecteur  $\vec{n}$  se calcul grâce à la résolution d'un polynôme du 1<sup>er</sup> degré

$$At + B = 0$$

$$\text{tel que } A = \vec{n} \cdot \vec{v} \text{ et } B = \vec{n} \cdot (\vec{r}_0 - \vec{r}_p)$$

avec  $\vec{r}_0$  : Origine du rayon (position d'émission du rayon).

$\vec{v}$  : Orientation du rayon ( $\|\vec{v}\| = 1$ , vecteur unitaire).

$\vec{r}_p$  : Position d'un point de référence sur le plan.

$\vec{n}$  : Normale à la surface du plan.

### Preuve :

Pour évaluer l'intersection d'un rayon  $\vec{r}_{\text{ray}}$  avec un plan, il suffit d'interpréter la forme du plan comme étant une contrainte aux différentes positions pouvant être occupées par le rayon.

Rayon	Contrainte de l'intersection avec le plan
$\vec{r}_{\text{ray}} = \vec{r}_0 + \vec{v}t$	$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_p) = 0$

Si l'on impose que la position du rayon  $\vec{r}_{\text{ray}}$  intersection une position  $\vec{r}$  appartenant au plan, nous obtenons la contrainte

$$\vec{n} \cdot (\vec{r}_{\text{ray}} - \vec{r}_p) = 0.$$

Puisque  $\vec{r}_{\text{ray}} = \vec{r}_0 + \vec{v}t$  est paramétré selon  $t$ , nous pouvons remplacer cette expression dans la contrainte précédente afin de déterminer l'instant  $t$  où il y aura intersection :

$$\vec{n} \cdot (\vec{r}_{\text{ray}} - \vec{r}_p) = 0 \quad (\text{Équation précédente})$$

$$\Rightarrow \vec{n} \cdot ((\vec{r}_0 + \vec{v}t) - \vec{r}_p) = 0 \quad (\vec{r}_{\text{ray}} = \vec{r}_0 + \vec{v}t)$$

$$\Rightarrow \vec{n} \cdot (\vec{r}_0 - \vec{r}_p + \vec{v}t) = 0 \quad (\text{Réécriture})$$

$$\Rightarrow \vec{n} \cdot (\vec{r}_0 - \vec{r}_p) + \vec{n} \cdot \vec{v}t = 0 \quad (\text{Distribuer le produit scalaire})$$

$$\Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v}t + \vec{n} \cdot (\vec{r}_0 - \vec{r}_p) = 0 \quad (\text{Réorganiser les termes})$$

$$\Rightarrow At + B = 0 \quad \blacksquare \quad (\text{Remplacer } A \text{ et } B)$$

En isolant le temps  $t$  dans la dernière équation, on obtient ainsi un temps d'intersection  $t_{\text{int}}$  égal à

$$t_{\text{int}} = -\frac{\vec{n} \cdot (\vec{r}_0 - \vec{r}_p)}{\vec{n} \cdot \vec{v}} \quad \Rightarrow \quad t_{\text{int}} = \frac{\vec{n} \cdot (\vec{r}_p - \vec{r}_0)}{\vec{n} \cdot \vec{v}}$$

pour intersecté le rayon  $\vec{r}_{\text{ray}}$  avec le plan.

**Situation A : L'intersection d'un rayon avec un plan.** Un rayon d'origine  $\vec{r}_0 = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$  et d'orientation  $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$  voyage dans une scène 3d où est situé un plan d'origine  $\vec{r}_p = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$  dont la normale à la surface est orientée selon  $\vec{N} = 3\vec{i} + 4\vec{k}$ . On désire (a) évaluer la normale à la surface normalisée, (b) évaluer le temps requis afin que le rayon puisse intersecter le plan et (c) la coordonnée de l'intersection entre le rayon et le plan.

Évaluons la normale à la surface afin qu'elle soit unitaire :

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|} &\Rightarrow &\vec{n} = \frac{(3\vec{i} + 4\vec{k})}{\|(3\vec{i} + 4\vec{k})\|} \\ & &\Rightarrow &\vec{n} = \frac{(3\vec{i} + 4\vec{k})}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \\ & &\Rightarrow &\boxed{\vec{n} = 0,6\vec{i} + 0,8\vec{k}} \quad \text{(a)} \end{aligned}$$

Évaluons le temps de l'intersection entre un rayon et un plan à partir de l'expression

$$t_{\text{int}} = \frac{\vec{n} \cdot (\vec{r}_p - \vec{r}_0)}{\vec{n} \cdot \vec{v}}$$

$$\begin{aligned} 1) \quad \vec{r}_p - \vec{r}_0 &\Rightarrow \vec{r}_p - \vec{r}_0 = (-2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}) - (2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) \\ &\Rightarrow \boxed{\vec{r}_p - \vec{r}_0 = -4\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \vec{n} \cdot \vec{v} &\Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v} = (0,6\vec{i} + 0,8\vec{k}) \cdot (-\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}) \\ &\Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v} = (0,6)(-1) + (0)(2) + (0,8)(-3) \\ &\Rightarrow \boxed{\vec{n} \cdot \vec{v} = -3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad t_{\text{int}} = \frac{\vec{n} \cdot (\vec{r}_p - \vec{r}_0)}{\vec{n} \cdot \vec{v}} &\Rightarrow t_{\text{int}} = \frac{(0,6\vec{i} + 0,8\vec{k}) \cdot (-4\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k})}{(-3)} \\ &\Rightarrow t_{\text{int}} = \frac{(0,6)(-4) + (0)(5) + (0,8)(1)}{(-3)} \\ &\Rightarrow \boxed{t_{\text{int}} = 0,5333} \quad \text{(b)} \end{aligned}$$

Évaluons la position de l'intersection avec l'expression du rayon :

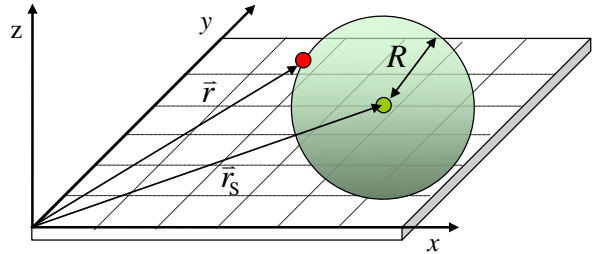
$$\begin{aligned} \vec{r}_{\text{ray}} = \vec{r}_0 + \vec{v}t &\Rightarrow \vec{r}_{\text{int}} = \vec{r}_0 + \vec{v}t_{\text{int}} \\ &\Rightarrow \vec{r}_{\text{int}} = (2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) + (-\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k})(0,5333) \\ &\Rightarrow \boxed{\vec{r}_{\text{int}} = 1,467\vec{i} - 1,933\vec{j} - 0,6\vec{k}} \quad \text{(c)} \end{aligned}$$

## L'équation vectorielle d'une sphère

L'équation implicite  $S(x, y, z)$  d'une sphère de rayon  $R$  centrée à la position  $(x_s, y_s, z_s)$  est sous la forme

$$(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2 = R^2$$

où  $x, y$  et  $z$  correspond à une coordonnée sur la sphère.



Visualisation d'une sphère située dans le premier octant d'un espace  $xyz$ .

On peut réécrire cette relation sous forme vectorielle à l'aide de l'équation suivante :

$$\vec{r} \cdot \vec{r} - 2\vec{r} \cdot \vec{r}_s + \vec{r}_s \cdot \vec{r}_s = R^2$$

où  $\vec{r}$  : Position d'un point sur la sphère. ( $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ )  
 $\vec{r}_s$  : Position du centre de la sphère. ( $\vec{r}_s = x_s\vec{i} + y_s\vec{j} + z_s\vec{k}$ )  
 $R$  : Rayon de la sphère.

### Preuve :

Considérons une sphère centrée en coordonnée  $(x_s, y_s, z_s)$  de rayon  $R$ . Réécrivons l'équation implicite de cette sphère sous forme vectoriel où  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  correspond à une coordonnée  $(x, y, z)$  située sur la sphère :

$$\begin{aligned} (x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2 &= R^2 && \text{(Équation implicite de la sphère)} \\ \Rightarrow (d_x)^2 + (d_y)^2 + (d_z)^2 &= R^2 && (d_x = x - x_s, d_y = y - y_s, d_z = z - z_s) \\ \Rightarrow d^2 &= R^2 && (d^2 = d_x^2 + d_y^2 + d_z^2) \\ \Rightarrow \|\vec{d}\|^2 &= R^2 && (\|\vec{d}\| = d) \\ \Rightarrow \vec{d} \cdot \vec{d} &= R^2 && (\|\vec{d}\|^2 = \vec{d} \cdot \vec{d}) \\ \Rightarrow (\vec{r} - \vec{r}_s) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_s) &= R^2 && (\vec{d} = \vec{r} - \vec{r}_s) \\ \Rightarrow \vec{r} \cdot \vec{r} - 2\vec{r} \cdot \vec{r}_s + \vec{r}_s \cdot \vec{r}_s &= R^2 && \blacksquare \quad \text{(Distribuer le produit scalaire)} \end{aligned}$$

## L'intersection d'un rayon avec une sphère

Le temps  $t$  requis pour réaliser une intersection entre un rayon  $\vec{r}_{\text{ray}}$  et une sphère de rayon  $R$  centrée à la position  $\vec{r}_S$  se calcul grâce à la résolution d'un polynôme du 2<sup>ème</sup> degré

$$At^2 + Bt + C = 0$$

$$\text{tel que } A = \vec{v} \cdot \vec{v} \text{ , } B = 2\vec{r}_{S0} \cdot \vec{v} \text{ et } C = \vec{r}_{S0} \cdot \vec{r}_{S0} - R^2 \text{ où } \vec{r}_{S0} = \vec{r}_0 - \vec{r}_S \text{ .}$$

avec  $\vec{r}_0$  : Origine du rayon (position d'émission du rayon).

$\vec{v}$  : Orientation du rayon ( $\|\vec{v}\| = 1$ , vecteur unitaire).

$\vec{r}_S$  : Position du centre de la sphère.

$R$  : Rayon de la sphère.

Preuve :

Pour évaluer l'intersection d'un rayon  $\vec{r}_{\text{ray}}$  avec une sphère, il suffit d'interpréter la forme de la sphère comme étant une contrainte aux différentes positions pouvant être occupées par le rayon.

Rayon	Contrainte de l'intersection avec la sphère
$\vec{r}_{\text{ray}} = \vec{r}_0 + \vec{v}t$	$\vec{r} \cdot \vec{r} - 2\vec{r} \cdot \vec{r}_S + \vec{r}_S \cdot \vec{r}_S = R^2$

Si l'on impose que la position du rayon  $\vec{r}_{\text{ray}}$  intersection une position  $\vec{r}$  appartenant à la sphère, nous obtenons la contrainte

$$\vec{r}_{\text{ray}} \cdot \vec{r}_{\text{ray}} - 2\vec{r}_{\text{ray}} \cdot \vec{r}_S + \vec{r}_S \cdot \vec{r}_S = R^2$$

et puisque le rayon  $\vec{r}_{\text{ray}} = \vec{r}_0 + \vec{v}t$  est paramétrisé selon  $t$ , nous pouvons remplacer cette expression dans la contrainte afin de déterminer l'instant  $t$  où il y aura intersection :

$$\vec{r}_{\text{ray}} \cdot \vec{r}_{\text{ray}} - 2\vec{r}_{\text{ray}} \cdot \vec{r}_S + \vec{r}_S \cdot \vec{r}_S = R^2 \quad (\text{Équation précédente})$$

$$\Rightarrow (\vec{r}_0 + \vec{v}t) \cdot (\vec{r}_0 + \vec{v}t) - 2(\vec{r}_0 + \vec{v}t) \cdot \vec{r}_S + \vec{r}_S \cdot \vec{r}_S = R^2 \quad (\vec{r}_{\text{ray}} = \vec{r}_0 + \vec{v}t)$$

$$\Rightarrow \vec{r}_0 \cdot \vec{r}_0 + 2\vec{r}_0 \cdot \vec{v}t + \vec{v} \cdot \vec{v}t^2 - 2\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_S - 2\vec{r}_S \cdot \vec{v}t + \vec{r}_S \cdot \vec{r}_S - R^2 = 0 \quad (\text{Distribuer produit scalaire})$$

$$\Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{v}t^2 + 2(\vec{r}_0 \cdot \vec{v} - \vec{r}_S \cdot \vec{v})t + \vec{r}_0 \cdot \vec{r}_0 - 2\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_S + \vec{r}_S \cdot \vec{r}_S - R^2 = 0 \quad (\text{Regrouper termes en } t)$$

$$\Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{v}t^2 + 2(\vec{r}_0 - \vec{r}_S) \cdot \vec{v}t + (\vec{r}_0 - \vec{r}_S) \cdot (\vec{r}_0 - \vec{r}_S) - R^2 = 0 \quad (\text{Factorier } \vec{v})$$

$$\Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{v}t^2 + 2\vec{r}_{S0} \cdot \vec{v}t + \vec{r}_{S0} \cdot \vec{r}_{S0} - R^2 = 0 \quad (\vec{r}_{S0} = \vec{r}_0 - \vec{r}_S)$$

$$\Rightarrow At^2 + Bt + C = 0 \quad \blacksquare \quad (\text{Remplacer } A, B \text{ et } C)$$

En isolant le temps  $t$  dans la dernière équation, on obtient ainsi les temps d'intersection  $t_{\text{int}}$  égaux à

$$t_{\text{int}} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

ce qui nous donne les interprétations suivantes :

$B^2 - 4AC < 0$	$B^2 - 4AC = 0$	$B^2 - 4AC > 0$
0 solution (aucune intersection)	1 solution (une intersection)	2 solutions (deux intersections)

Dans le cas de **deux solutions**, il faut choisir la solution qui propose le **plus petit temps positif** étant le 1<sup>er</sup> contact valide avec la sphère.

**Situation B : L'intersection d'un rayon avec une sphère.** Un rayon d'origine  $\vec{r}_0 = 3\vec{i} + 2\vec{j}$  et d'orientation  $\vec{v} = -3\vec{j} + 5\vec{k}$  voyage dans une scène 3d où est située une sphère de rayon  $R = 3$  centrée à la coordonnée  $\vec{r}_s = \vec{i} - 3\vec{k}$ . On désire évaluer les temps d'intersection entre le rayon et la sphère s'il y a intersection.

À partir de l'expression

$$At^2 + Bt + C = 0 \quad \text{où} \quad t = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

tel que

$$A = \vec{v} \cdot \vec{v} \quad , \quad B = 2\vec{r}_{s0} \cdot \vec{v} \quad , \quad C = \vec{r}_{s0} \cdot \vec{r}_{s0} - R^2 \quad \text{et} \quad \vec{r}_{s0} = \vec{r}_0 - \vec{r}_s \quad ,$$

évaluons quelques termes puis évaluons les racines réelles du polynôme du 2<sup>ième</sup> degré afin d'évaluer le temps des intersections entre un rayon et une sphère :

$$\begin{aligned}
 1) \quad \vec{r}_{s0} = \vec{r}_0 - \vec{r}_s &\Rightarrow \vec{r}_{s0} = (3\vec{i} + 2\vec{j}) - (\vec{i} - 3\vec{k}) \\
 &\Rightarrow \boxed{\vec{r}_{s0} = 2\vec{i} + 5\vec{j}} \\
 2) \quad A = \vec{v} \cdot \vec{v} &\Rightarrow A = (-3\vec{j} + 5\vec{k}) \cdot (-3\vec{j} + 5\vec{k}) \\
 &\Rightarrow A = (0)(0) + (-3)(-3) + (5)(5) \\
 &\Rightarrow \boxed{A = 34} \\
 3) \quad B = 2\vec{r}_{s0} \cdot \vec{v} &\Rightarrow B = 2(2\vec{i} + 5\vec{j}) \cdot (-3\vec{j} + 5\vec{k}) \\
 &\Rightarrow B = 2((2)(0) + (5)(-3) + (0)(5)) \\
 &\Rightarrow \boxed{B = -30} \\
 4) \quad C = \vec{r}_{s0} \cdot \vec{r}_{s0} - R^2 &\Rightarrow C = (2\vec{i} + 5\vec{j}) \cdot (2\vec{i} + 5\vec{j}) - (3)^2 \\
 &\Rightarrow C = ((2)(2) + (5)(5) + (0)(0)) - 9 \\
 &\Rightarrow \boxed{C = 20}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) At^2 + Bt + C = 0 &\Rightarrow t_{\text{int}} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \\ &\Rightarrow t_{\text{int}} = \frac{-(-30) \pm \sqrt{(-30)^2 - 4(34)(20)}}{2(34)} \\ &\Rightarrow t_{\text{int}} = \frac{30 \pm \sqrt{-1820}}{68} \\ &\Rightarrow \text{Il n'y a pas de racine réelle, donc } \underline{\text{il n'y a pas d'intersection.}} \end{aligned}$$

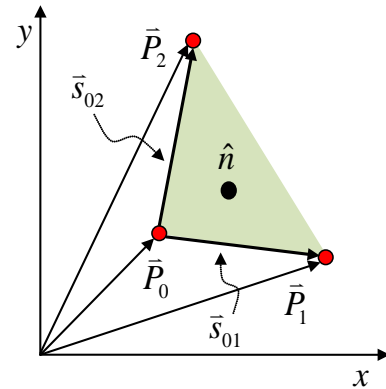


# Chapitre 6.2b – L'intersection d'un triangle dans le ray tracer

## La normale à la surface d'un triangle

À partir des trois points  $\bar{P}_0$ ,  $\bar{P}_1$  et  $\bar{P}_2$  d'un triangle, on peut former deux segments  $\bar{s}_{01}$  et  $\bar{s}_{02}$  afin de calculer une normale à la surface  $\hat{n}$  à l'aide de l'équation suivante :

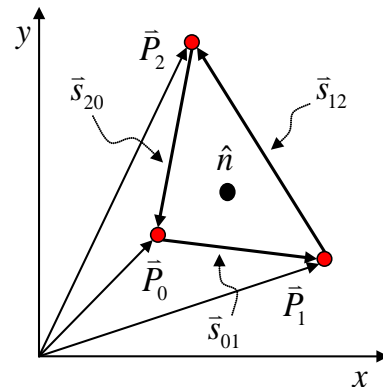
- $\bar{s}_{01} = \bar{P}_1 - \bar{P}_0$  (segment  $\bar{P}_0$  à  $\bar{P}_1$ )
- $\bar{s}_{02} = \bar{P}_2 - \bar{P}_0$  (segment  $\bar{P}_0$  à  $\bar{P}_2$ )
- $\bar{n} = \bar{s}_{01} \times \bar{s}_{02}$  (normale du triangle)
- $\hat{n} = \frac{\bar{s}_{01} \times \bar{s}_{02}}{\|\bar{s}_{01} \times \bar{s}_{02}\|}$  (normale normalisée)



## L'intersection d'un rayon avec un triangle par vecteurs intérieurs

À partir des trois points  $\bar{P}_0$ ,  $\bar{P}_1$  et  $\bar{P}_2$  d'un triangle, on peut former trois segments  $\bar{s}_{01}$ ,  $\bar{s}_{12}$  et  $\bar{s}_{20}$  puis une normale à la surface  $\hat{n}$  à l'aide des définitions suivantes :

- $\bar{s}_{01} = \bar{P}_1 - \bar{P}_0$  (segment  $\bar{P}_0$  à  $\bar{P}_1$ )
- $\bar{s}_{12} = \bar{P}_2 - \bar{P}_1$  (segment  $\bar{P}_1$  à  $\bar{P}_2$ )
- $\bar{s}_{20} = \bar{P}_0 - \bar{P}_2$  (segment  $\bar{P}_2$  à  $\bar{P}_0$ )
- $\bar{s}_{02} = -\bar{s}_{20}$  (segment  $\bar{P}_0$  à  $\bar{P}_2$ )
- $\hat{n} = \frac{\bar{s}_{01} \times \bar{s}_{02}}{\|\bar{s}_{01} \times \bar{s}_{02}\|}$  (normale selon l'ordre des points)

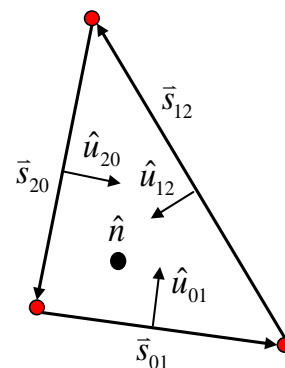


Triangle avec trois segments et une normale à la surface.

Avec la définition de la normale  $\hat{n}$ , on peut définir un vecteur unitaire  $\hat{u}_{AB}$  pour chacun des segments du triangle à l'aide de l'équation

$$\hat{u}_{AB} = \frac{\hat{n} \times \bar{s}_{AB}}{\|\hat{n} \times \bar{s}_{AB}\|} \text{ avec } A, B \in \{0, 1, 2\}$$

représentant un vecteur pointant vers l'intérieur du triangle.



Représentation des vecteurs intérieurs associés au segment d'un triangle.

À partir d'un rayon  $\vec{r}_{\text{ray}} = \vec{r}_0 + \vec{v}t$ , on peut évaluer le temps  $t = t_{\text{int}}$  requis afin de réaliser une intersection avec le plan du triangle grâce à l'équation démontrée précédemment<sup>1</sup> :

$$At + B = 0 \quad \text{tel que} \quad A = \vec{n} \cdot \vec{v} \quad \text{et} \quad B = \vec{n} \cdot (\vec{r}_0 - \vec{r}_p)$$

où  $\vec{P}_0$  : Point de référence du triangle.

$\vec{n}$  : La normale du triangle.

$\vec{r}_0$  : L'origine du rayon.

$\vec{v}$  : L'orientation du rayon.

Avec le temps d'intersection  $t_{\text{int}}$ , on peut évaluer la position de l'intersection  $\vec{r}_{\text{int}}$  avec le plan du triangle avec l'équation du rayon :

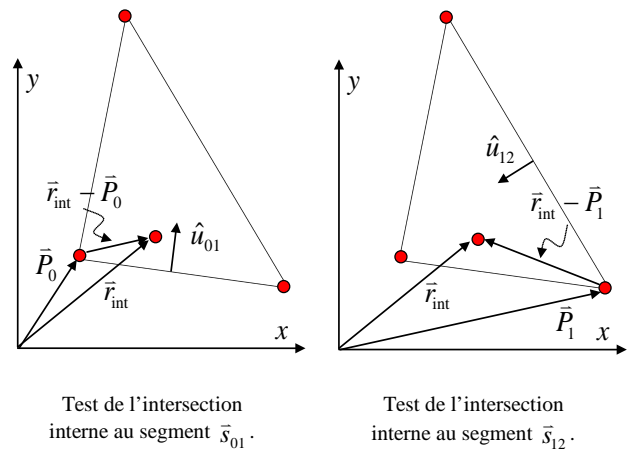
$$\vec{r}_{\text{int}} = \vec{r}_{\text{ray}}(t = t_{\text{int}}) \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_{\text{int}} = \vec{r}_0 + \vec{v}t_{\text{int}}$$

Pour que  $\vec{r}_{\text{int}}$  soit situé à l'intérieur du triangle, cette position doit satisfaire les contraintes

$$(\vec{r}_{\text{int}} - \vec{P}_A) \cdot \hat{u}_{AB} > 0 \quad \forall \hat{u}_{AB} \in \text{triangle}$$

pour l'ensemble des vecteurs unitaires intérieurs  $\hat{u}_{AB}$  du triangle. Ceci correspond à satisfaire cette contrainte pour les trois vecteurs  $\hat{u}_{01}$ ,  $\hat{u}_{12}$  et  $\hat{u}_{20}$ .

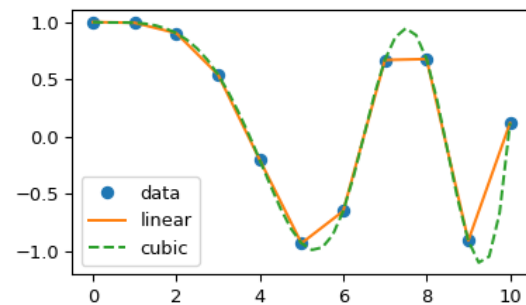
Cette méthode peut également déterminer si un point est à l'intérieur d'une série de segments formant un polygone planaire convexe.



## L'interpolation

L'interpolation est une opération mathématique permettant de remplacer une fonction mathématique exacte par une autre étant approximative et moins complexe, mais en préservant une valeur de départ et une valeur d'arrivée.

On utilisera alors l'interpolation lorsque la fonction mathématique exacte n'est pas connue ou trop complexe à calculer. L'interpolation sera utilisée pour approximer la fonction exacte tel qu'illustré sur le schéma ci-contre.



<https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/tutorial/interpolate.html>

Approximation d'une fonction inconnue à partir d'une collection de donnée à l'aide d'une interpolation linéaire et cubique.

<sup>1</sup> Cette équation a été démontrée au chapitre 6.2a.

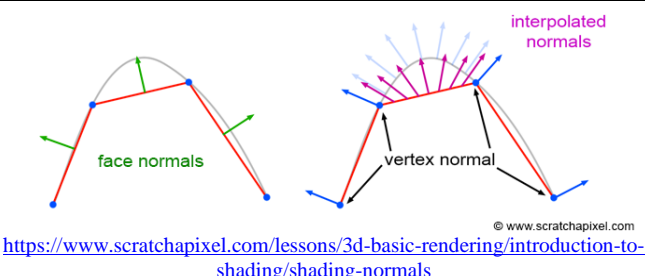
L'interpolation linéaire permet d'approximer la fonction mathématique exacte par une fonction linéaire. Voici les équations de l'interpolation linéaire à deux paramètres :

Interpolation linéaire d'une fonction scalaire	Interpolation linéaire d'une fonction vectorielle
$V_{inter} = V_0(1-t) + V_1t$	$\vec{v}_{inter} = \vec{v}_0(1-t) + \vec{v}_1t$

où  $V_{inter}$ ,  $\vec{v}_{inter}$  : Valeur/vecteur interpolé à un taux  $t$ .  
 $t$  : Taux de l'interpolation.  
 $V_0$ ,  $\vec{v}_0$  : Valeur/vecteur de référence à  $t = 0$ .  
 $V_1$ ,  $\vec{v}_1$  : Valeur/vecteur de référence à  $t = 1$ .

L'opération mathématique de l'interpolation peut être utilisée dans plusieurs occasions :

La moyenne pondérée	Le calcul du centre de masse
$N_{pondérée} = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} P_i N_i}{\sum_{i=0}^{N-1} P_i}$	$x_{CM} = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} m_i x_i}{\sum_{i=0}^{N-1} m_i}$
Le taux d'interpolation est la pondération de la note $P_i$ de valeur $N_i$ .	Le taux d'interpolation est la masse $m_i$ positionné en $x_i$ .

L'interpolation linéaire d'un vecteur normale	
$\vec{n}_{int} = \vec{n}_0(1-t) + \vec{n}_1t$	 <p><a href="https://www.scratchapixel.com/lessons/3d-basic-rendering/introduction-to-shading/shading-normals">https://www.scratchapixel.com/lessons/3d-basic-rendering/introduction-to-shading/shading-normals</a></p>
Le taux d'interpolation est $1-t$ pour la normale $\vec{n}_0$ et $t$ pour la normale $\vec{n}_1$ .	

Le plan par interpolation linéaire
$\vec{r} = \vec{P}_0t_0 + \vec{P}_1t_1 + \vec{P}_2t_2 \quad \text{où} \quad t_0, t_1, t_2 \in [-\infty, +\infty] \quad \text{mais} \quad t_0 + t_1 + t_2 = 1$
Le taux d'interpolation est la pondération $t_0$ du point $\vec{P}_0$ , $t_1$ du point $\vec{P}_1$ et $t_2$ du point $\vec{P}_2$

## L'équation d'un plan en coordonnée barycentrique

Un plan en coordonnée barycentrique est formé à l'aide d'un point  $\bar{P}_0$  appartenant au plan et représentant l'origine de celui-ci ainsi que de deux segments  $\bar{s}_1$  et  $\bar{s}_2$  correspondant à la base du plan. Pour former les deux segments, on peut utiliser deux autres points  $\bar{P}_1$  et  $\bar{P}_2$ .

L'équation d'un point  $\bar{r}$  appartenant à la surface du plan correspond à l'équation

$$\bar{r} = \bar{P}_0 + \bar{s}_1 b_1 + \bar{s}_2 b_2$$

tel que

$$b_1, b_2 \in [-\infty, +\infty]$$

où

$$\bar{s}_1 = \bar{P}_1 - \bar{P}_0 \text{ et } \bar{s}_2 = \bar{P}_2 - \bar{P}_0 .$$

Preuve :

Soit un point  $\bar{r}$  situé dans le plan du triangle. Par interpolation linéaire, nous pouvons représenter ce point par l'équation

$$\bar{r} = \bar{P}_0 t_0 + \bar{P}_1 t_1 + \bar{P}_2 t_2$$

où  $t_0, t_1, t_2 \in [-\infty, +\infty]$  mais  $t_0 + t_1 + t_2 = 1$  correspondent à des facteurs d'interpolation linéaire des points formant le triangle.

Réécrivons l'équation du plan  $\bar{r}$  en utilisant la notation des segments  $\bar{s}_1 = \bar{P}_1 - \bar{P}_0$  et  $\bar{s}_2 = \bar{P}_2 - \bar{P}_0$  :

$$\bar{r} = \bar{P}_0 t_0 + \bar{P}_1 t_1 + \bar{P}_2 t_2 \quad (\text{Équation du plan})$$

$$\Rightarrow \bar{r} = \bar{P}_0 t_0 + (\bar{P}_0 t_1 - \bar{P}_0 t_1) + (\bar{P}_0 t_2 - \bar{P}_0 t_2) + \bar{P}_1 t_1 + \bar{P}_2 t_2 \quad (\text{Ajouter de deux termes nuls})$$

$$\Rightarrow \bar{r} = \bar{P}_0 (t_0 + t_1 + t_2) + \bar{P}_1 t_1 - \bar{P}_0 t_1 + \bar{P}_2 t_2 - \bar{P}_0 t_2 \quad (\text{Factoriser } \bar{P}_0)$$

$$\Rightarrow \bar{r} = \bar{P}_0 (t_0 + t_1 + t_2) + (\bar{P}_1 - \bar{P}_0) t_1 + (\bar{P}_2 - \bar{P}_0) t_2 \quad (\text{Factoriser } t_1 \text{ et } t_2)$$

$$\Rightarrow \bar{r} = \bar{P}_0 (t_0 + t_1 + t_2) + \bar{s}_1 t_1 + \bar{s}_2 t_2 \quad (\text{Remplacer } \bar{s}_1 = \bar{P}_1 - \bar{P}_0 \text{ et } \bar{s}_2 = \bar{P}_2 - \bar{P}_0)$$

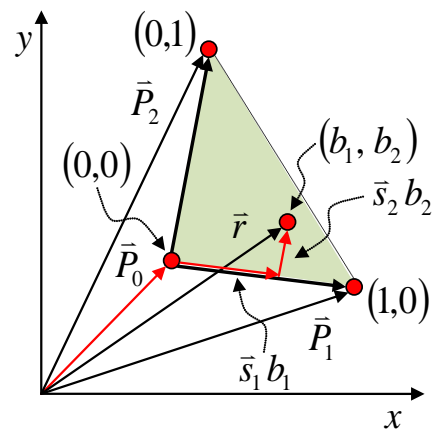
Appliquons la contrainte nécessaire à la formation du plan

$$t_0 + t_1 + t_2 = 1$$

ce qui donnera l'équation

$$\bar{r} = \bar{P}_0 + \bar{s}_1 t_1 + \bar{s}_2 t_2 .$$

En remplaçant la notation  $t_1 \rightarrow b_1$  et  $t_2 \rightarrow b_2$ , nous obtenons la description d'un plan en coordonnée barycentrique où la coordonnée  $(b_1, b_2) = (0, 0)$  correspond au point  $\bar{P}_0$  et les différentes coordonnées  $(b_1, b_2)$  donneront tous les points du plan où  $b_1, b_2 \in [-\infty, +\infty]$  puisque  $\bar{s}_1$  et  $\bar{s}_2$  forment la base du plan. ■



Équation d'un point  $\bar{r}_{\text{tri}}$  appartenant au triangle en coordonnée barycentrique.

## La projection d'un point dans le plan d'un triangle en coordonnée barycentrique

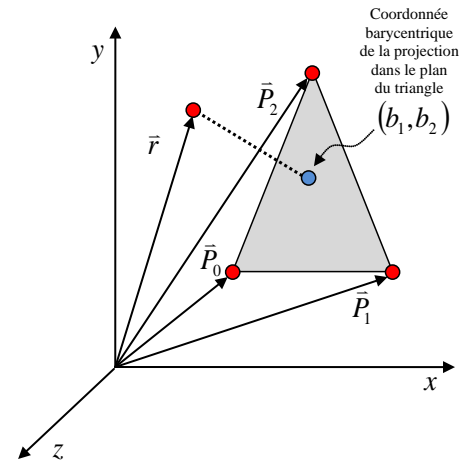
La projection d'un vecteur position  $\vec{r}$  dans le plan d'un triangle formé par les points  $\vec{P}_0$ ,  $\vec{P}_1$  et  $\vec{P}_2$  peut être évaluée en coordonnée barycentrique  $(b_1, b_2)$  à l'aide des calculs

$$b_1 = \frac{(\vec{w} \cdot \vec{s}_1)(\vec{s}_2 \cdot \vec{s}_2) - (\vec{w} \cdot \vec{s}_2)(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2)}{(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_1)(\vec{s}_2 \cdot \vec{s}_2) - (\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2)^2}$$

et 
$$b_2 = \frac{(\vec{w} \cdot \vec{s}_2)(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_1) - (\vec{w} \cdot \vec{s}_1)(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2)}{(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_1)(\vec{s}_2 \cdot \vec{s}_2) - (\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2)^2}$$

où

$$\vec{s}_1 = \vec{P}_1 - \vec{P}_0, \quad \vec{s}_2 = \vec{P}_2 - \vec{P}_0 \quad \text{et} \quad \vec{w} = \vec{r} - \vec{P}_0.$$



Si la contrainte

$$b_1 \geq 0, \quad b_2 \geq 0 \quad \text{et} \quad b_1 + b_2 \leq 1$$

est respectée, la projection du vecteur  $\vec{r}$  dans le plan du triangle sera à l'intérieur du triangle. Autrement, la projection sera à l'extérieur du triangle.

Preuve :

Débutons avec un vecteur  $\vec{r}$  quelconque représenté dans la base  $\vec{u}_1$ ,  $\vec{u}_2$  et  $\hat{n}$  où

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 \neq 0 \quad \text{et} \quad \hat{n} = \frac{\vec{u}_1 \times \vec{u}_2}{\|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2\|}$$

au lieu des vecteurs  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$ . Les deux vecteurs  $\vec{u}_1$ ,  $\vec{u}_2$  forment un plan et  $\hat{n}$  est perpendiculaire au plan.

Dans cette base, le vecteur  $\vec{r}$  sera

$$\vec{r} = \vec{P}_0 + \vec{u}_1 t_1 + \vec{u}_2 t_2 + \hat{n} t_3$$

tel que  $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$  et  $\vec{P}_0$  correspond à une translation de l'origine.

Si l'on utilise cette nouvelle représentation du vecteur  $\vec{r}$  et qu'on la fait correspondre avec la base d'un triangle en coordonnée barycentrique, nous obtenons

$$\vec{r} = \vec{P}_0 + \vec{s}_1 t_1 + \vec{s}_2 t_2 + \hat{n} t_3 \quad \text{où} \quad \vec{s}_1 = \vec{u}_1 \quad \text{et} \quad \vec{s}_2 = \vec{u}_2.$$

Par la suite, construisons un vecteur  $\vec{w}$  représentant la distance entre  $\vec{r}$  et  $\vec{P}_0$  pour obtenir :

$$\vec{r} = \vec{P}_0 + \vec{s}_1 t_1 + \vec{s}_2 t_2 + \hat{n} t_3 \quad \Rightarrow \quad \vec{r} - \vec{P}_0 = \vec{s}_1 t_1 + \vec{s}_2 t_2 + \hat{n} t_3 \quad (\text{Regrouper } \vec{r} \text{ et } \vec{P}_0)$$

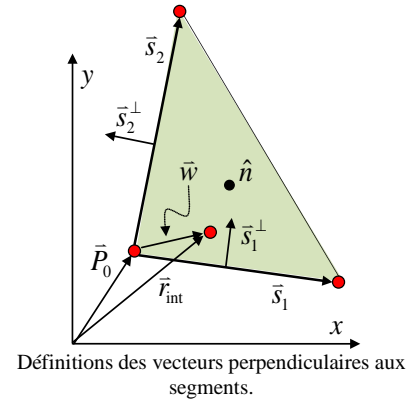
$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{w} = \vec{s}_1 t_1 + \vec{s}_2 t_2 + \hat{n} t_3} \quad (\text{Remplacer } \vec{w} = \vec{r} - \vec{P}_0)$$

À l'aide de la définition de la normale à la surface

$$\hat{n} = \frac{\vec{s}_1 \times \vec{s}_2}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|},$$

construisons un vecteur  $\vec{s}_1^\perp$  perpendiculaire à  $\vec{s}_1$  (tout en étant dans le plan du triangle) et un vecteur  $\vec{s}_2^\perp$  perpendiculaire à  $\vec{s}_2$  (tout en étant dans le plan du triangle). Cette construction sera nécessaire dans notre calcul puisque nos deux vecteurs  $\vec{s}_1$  et  $\vec{s}_2$  ne sont pas parallèles ( $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \neq 0$ ). Cette construction est possible grâce aux calculs

$$\vec{s}_1^\perp = \hat{n} \times \vec{s}_1 \quad \text{et} \quad \vec{s}_2^\perp = \hat{n} \times \vec{s}_2.$$



Avec ces deux nouveaux vecteurs, il est maintenant possible d'isoler  $t_1$  et  $t_2$  dans notre équation de  $\vec{w}$  en utilisant le produit scalaire pour annuler des termes de l'équation. Débutons avec le vecteur  $\vec{s}_1^\perp = \hat{n} \times \vec{s}_1$  afin d'isoler  $t_2$  :

$$\begin{aligned} \vec{w} = \vec{s}_1 t_1 + \vec{s}_2 t_2 + \hat{n} t_3 &\Rightarrow \vec{w} \cdot \vec{s}_1^\perp = (\vec{s}_1 t_1 + \vec{s}_2 t_2 + \hat{n} t_3) \cdot \vec{s}_1^\perp && \text{(Produit scalaire avec } \vec{s}_1^\perp) \\ &\Rightarrow \vec{w} \cdot \vec{s}_1^\perp = \vec{s}_1 t_1 \cdot \vec{s}_1^\perp + \vec{s}_2 t_2 \cdot \vec{s}_1^\perp + \hat{n} t_3 \cdot \vec{s}_1^\perp && \text{(Distribuer produit scalaire)} \\ &\Rightarrow \vec{w} \cdot \vec{s}_1^\perp = \vec{s}_2 \cdot \vec{s}_1^\perp t_2 && (\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_1^\perp = 0 \text{ et } \hat{n} \cdot \vec{s}_1^\perp = 0) \\ &\Rightarrow t_2 = \frac{\vec{w} \cdot \vec{s}_1^\perp}{\vec{s}_2 \cdot \vec{s}_1^\perp} && \text{(Isoler } t_2) \\ &\Rightarrow t_2 = \frac{\vec{w} \cdot \hat{n} \times \vec{s}_1}{\vec{s}_2 \cdot \hat{n} \times \vec{s}_1} && (\vec{s}_1^\perp = \hat{n} \times \vec{s}_1) \\ &\Rightarrow t_2 = \frac{\vec{w} \cdot \left( \frac{\vec{s}_1 \times \vec{s}_2}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|} \right) \times \vec{s}_1}{\vec{s}_2 \cdot \left( \frac{\vec{s}_1 \times \vec{s}_2}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|} \right) \times \vec{s}_1} && (\hat{n} = \frac{\vec{s}_1 \times \vec{s}_2}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|}) \\ &\Rightarrow \boxed{t_2 = \frac{\vec{w} \cdot (\vec{s}_1 \times \vec{s}_2) \times \vec{s}_1}{\vec{s}_2 \cdot (\vec{s}_1 \times \vec{s}_2) \times \vec{s}_1}} && \text{(Simplifier terme } |\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|) \end{aligned}$$

Avec l'identité du triple produit vectoriel

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}),$$

on peut reformuler l'équation de  $t_2$  sans faire l'usage du produit vectoriel<sup>2</sup> en remplaçant les produits vectoriels par l'expression

$$(\vec{s}_1 \times \vec{s}_2) \times \vec{s}_1 = \vec{s}_2(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_1) - \vec{s}_1(\vec{s}_2 \cdot \vec{s}_1).$$

<sup>2</sup> Cette stratégie permet de calculer  $t_2$  à l'aide d'un ordinateur plus efficacement.

Cette reformulation rend le calcul numérique plus rapide à effectuer. Ainsi, nous avons l'expression suivante pour  $t_2$  :

$$t_2 = \frac{\bar{w} \cdot (\bar{s}_1 \times \bar{s}_2) \times \bar{s}_1}{\bar{s}_2 \cdot (\bar{s}_1 \times \bar{s}_2) \times \bar{s}_1} \Rightarrow t_2 = \frac{\bar{w} \cdot [\bar{s}_2(\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_1) - \bar{s}_1(\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2)]}{\bar{s}_2 \cdot [\bar{s}_2(\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_1) - \bar{s}_1(\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2)]} \quad ((\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{b}(\bar{a} \cdot \bar{c}) - \bar{a}(\bar{b} \cdot \bar{c}))$$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{(\bar{w} \cdot \bar{s}_2)(\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_1) - (\bar{w} \cdot \bar{s}_1)(\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2)}{(\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_1)(\bar{s}_2 \cdot \bar{s}_2) - (\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2)^2} \quad \blacksquare \quad (\text{Distribuer produit scalaire})$$

Par analogie, on peut utiliser  $\bar{s}_2^\perp = \hat{n} \times \bar{s}_2$  et exploiter le fait que

$$\bar{s}_2 \cdot \bar{s}_2^\perp = 0 \quad \text{et} \quad \hat{n} \cdot \bar{s}_2^\perp = 0$$

afin d'isoler la variable  $t_1$  de l'équation  $\bar{r} = \bar{P}_0 + \bar{s}_1 t_1 + \bar{s}_2 t_2 + \hat{n} t_3$  et donnant l'expression

$$t_1 = \frac{(\bar{w} \cdot \bar{s}_1)(\bar{s}_2 \cdot \bar{s}_2) - (\bar{w} \cdot \bar{s}_2)(\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2)}{(\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_1)(\bar{s}_2 \cdot \bar{s}_2) - (\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2)^2} \quad \blacksquare$$

## L'intersection d'un rayon avec un triangle en coordonnées barycentrique

À partir d'un rayon

$$\bar{r}_{\text{ray}} = \bar{r}_0 + \bar{v} t,$$

nous pouvons évaluer le temps  $t_{\text{int}}$  requis afin de réaliser l'intersection du rayon avec le plan d'un triangle positionné en  $\bar{P}_0$  ayant deux segments  $\bar{s}_1$  et  $\bar{s}_2$  à l'aide de l'équation

$$At + B = 0$$

$$\text{tel que } A = \bar{n} \cdot \bar{v} \quad \text{et} \quad B = \bar{n} \cdot (\bar{r}_0 - \bar{P}_0).$$

En évaluant la position de l'intersection à l'aide de l'équation

$$\bar{r}_{\text{int}} = \bar{r}_0 + \bar{v} t_{\text{int}},$$

nous pouvons obtenir les coordonnées barycentriques de  $\bar{r}_{\text{int}}$  avec les deux expressions

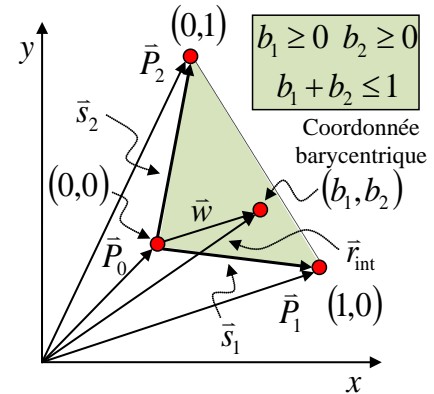
$$b_1 = \frac{(\bar{w} \cdot \bar{s}_1)(\bar{s}_2 \cdot \bar{s}_2) - (\bar{w} \cdot \bar{s}_2)(\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2)}{(\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_1)(\bar{s}_2 \cdot \bar{s}_2) - (\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2)^2} \quad \text{et} \quad b_2 = \frac{(\bar{w} \cdot \bar{s}_2)(\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_1) - (\bar{w} \cdot \bar{s}_1)(\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2)}{(\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_1)(\bar{s}_2 \cdot \bar{s}_2) - (\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2)^2}$$

où

$$\bar{s}_1 = \bar{P}_1 - \bar{P}_0, \quad \bar{s}_2 = \bar{P}_2 - \bar{P}_0 \quad \text{et} \quad \bar{w} = \bar{r}_{\text{int}} - \bar{P}_0.$$

Pour évaluer l'état de l'intersection, nous avons deux scénarios à analyser :

Critère à satisfaire afin que $\bar{r}_{\text{int}}$ soit à l'intérieur du triangle	Critère à satisfaire afin que $\bar{r}_{\text{int}}$ soit à l'extérieur du triangle
$b_1 \geq 0, b_2 \geq 0$ et $b_1 + b_2 \leq 1$	$b_1 < 0$ ou $b_2 < 0$ ou $b_1 + b_2 > 1$



L'intersection sera à l'intérieur du triangle si la coordonnée barycentrique de l'intersection  $(t_1, t_2)$  respecte les contraintes.

# L'interpolation linéaire de la normale à la surface d'un triangle à l'aide des coordonnées barycentriques

Considérons un triangle formé à l'aide des trois points  $\vec{P}_0$ ,  $\vec{P}_1$  et  $\vec{P}_2$  où l'on a attribué une normale à la surface  $\hat{n}_0$ ,  $\hat{n}_1$  et  $\hat{n}_2$  distinctes pour les trois points du triangle. Ces normales seront utilisées pour des calculs d'illumination et non des calculs d'intersection.

Bien que la normale géométrique au plan formé par le triangle demeure calculable par la formule

$$\hat{n} = \frac{\vec{s}_1 \times \vec{s}_2}{\|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2\|} \quad \text{où} \quad \vec{s}_1 = \vec{P}_1 - \vec{P}_0, \quad \vec{s}_2 = \vec{P}_2 - \vec{P}_0,$$

attribuer une normale à chaque point du triangle permet de simuler un « effet de courbure » pour un algorithme d'illumination.

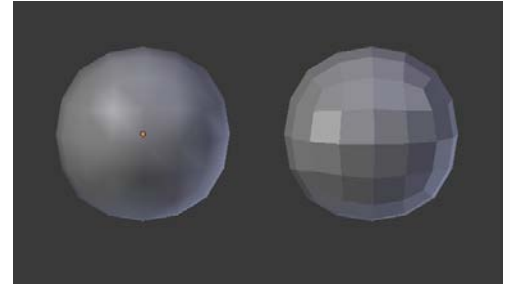
Pour évaluer la **normale à la surface du triangle** en une coordonnée barycentrique  $(b_1, b_2)$  du triangle, on peut utiliser l'équation suivante pour effectuer le calcul de l'interpolation linéaire de la normale à la surface en fonction de la coordonnée barycentrique du point dans le triangle :

$$\hat{n}_{\text{interpolé}} = \hat{n}_0(1 - b_1 - b_2) + \hat{n}_1 b_1 + \hat{n}_2 b_2$$

où  $\hat{n}_{\text{interpolé}}$  : Normale interpolée en coordonnée  $(b_1, b_2)$  du triangle.

$\hat{n}_0, \hat{n}_1, \hat{n}_2$  : Normales aux trois sommets  $\vec{P}_0, \vec{P}_1$  et  $\vec{P}_2$  du triangle.

$(b_1, b_2)$  : Coordonnée barycentrique du point dans le triangle.



<http://cgi.tutsplus.com/tutorials/secrets-to-creating-low-poly-illustrations-in-blender--cg-31770>

Comparaison entre un *smooth shading* avec interpolation des normales aux sommets d'un polygone et un *flat shading* avec normales unique pour l'ensemble du polygone.



# Chapitre 6.2c – L'intersection de géométrie complexe dans le ray tracer

## L'intersection d'un rayon avec un tube infini

L'intersection d'un rayon avec un tube infini (un cylindre infini sans extrémité) de rayon  $R$  positionné à un point  $\vec{r}_T$  et aligné selon l'axe  $\hat{s}$  se calcul grâce à la résolution d'un polynôme du 2<sup>e</sup> degré en temps  $t$

$$At^2 + Bt + C = 0$$

tel que  $A = \vec{v}_A \cdot \vec{v}_A$ ,  $B = 2\vec{r}_{A0} \cdot \vec{v}_A$  et  $C = \vec{r}_{A0} \cdot \vec{r}_{A0} - R^2$

où  $\vec{r}_{A0} = \hat{s} \times (\vec{r}_0 - \vec{r}_T) \times \hat{s}$  et  $\vec{v}_A = (\hat{s} \times \vec{v} \times \hat{s})$

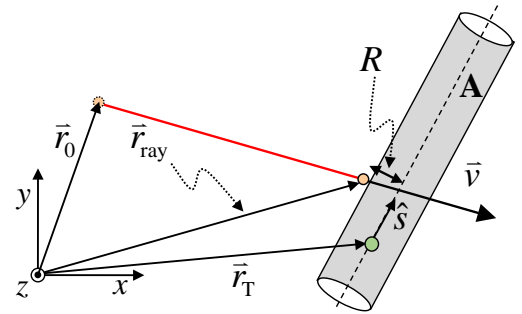
avec<sup>1</sup>  $\vec{r}_0$  : Origine du rayon (position d'émission du rayon).

$\vec{v}$  : Orientation du rayon ( $\|\vec{v}\| = 1$ , vecteur unitaire).

$\vec{r}_T$  : Position où passe le tube.

$\hat{s}$  : L'axe du tube.

$R$  : Rayon du tube.

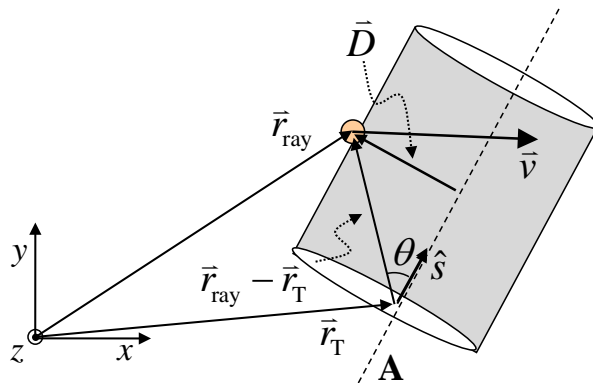


### Preuve :

En premier temps, il faut développer une expression nous permettant d'évaluer la distance  $D$  entre la position de l'intersection  $\vec{r}_{ray}$  et l'axe de référence que forme le tube.

En utilisant le point  $\vec{r}_T$  sur l'axe du tube et une projection à l'aide de la fonction trigonométrique sinus, nous obtenons

$$|\vec{D}| = |\vec{r}_{ray} - \vec{r}_T| \sin(\theta)$$



Cependant, évaluer l'angle  $\theta$  sera difficile. Pour contourner cette réalité, nous utiliserons le produit vectoriel<sup>2</sup> avec l'axe du tube  $\hat{s}$ .

<sup>1</sup> La lettre **A** faite référence à l'axe du tube.

<sup>2</sup> Produit vectoriel :  $\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin(\theta) \hat{n}$

Par la suite, on peut former le vecteur  $\vec{D}$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 \vec{D} = \hat{s} \times (\vec{r}_{\text{ray}} - \vec{r}_T) \times \hat{s} &\Rightarrow \vec{D} = \hat{s} \times ((\vec{r}_0 + \vec{v}t) - \vec{r}_T) \times \hat{s} && \text{(Remplacer } \vec{r}_{\text{ray}} = \vec{r}_0 + \vec{v}t \text{)} \\
 &\Rightarrow \vec{D} = \hat{s} \times (\vec{r}_0 - \vec{r}_T + \vec{v}t) \times \hat{s} && \text{(Réécriture)} \\
 &\Rightarrow \vec{D} = \hat{s} \times (\vec{r}_0 - \vec{r}_T) \times \hat{s} + \hat{s} \times \vec{v}t \times \hat{s} && \text{(Distribution)} \\
 &\Rightarrow \vec{D} = \hat{s} \times (\vec{r}_0 - \vec{r}_T) \times \hat{s} + (\hat{s} \times \vec{v} \times \hat{s})t && \text{(Factoriser } t \text{)} \\
 &\Rightarrow \vec{D} = \vec{r}_{A0} + (\hat{s} \times \vec{v} \times \hat{s})t && (\vec{r}_{A0} = \hat{s} \times (\vec{r}_0 - \vec{r}_T) \times \hat{s}) \\
 &\Rightarrow \boxed{\vec{D} = \vec{r}_{A0} + \vec{v}_A t} && (\vec{v}_A = (\hat{s} \times \vec{v} \times \hat{s}))
 \end{aligned}$$

En exploitant le calcul du produit scalaire<sup>3</sup>, nous pouvons formuler un polynôme du 2<sup>e</sup> degré selon le temps  $t$  qui permettra d'identifier le moment de l'intersection *s'il y a lieu* selon l'expression de  $D$  :

$$\begin{aligned}
 \vec{D} = \vec{r}_{A0} + \vec{v}_A t &\Rightarrow D = |\vec{D}| = |\vec{r}_{A0} + \vec{v}_A t| && \text{(Évaluer le module)} \\
 &\Rightarrow D^2 = |\vec{r}_{A0} + \vec{v}_A t|^2 && \text{(Mettre au carré)} \\
 &\Rightarrow D^2 = (\vec{r}_{A0} + \vec{v}_A t) \cdot (\vec{r}_{A0} + \vec{v}_A t) && \text{(Propriété : } |\vec{A}|^2 = \vec{A} \cdot \vec{A} \text{)} \\
 &\Rightarrow D^2 = \vec{r}_{A0} \cdot \vec{r}_{A0} + 2\vec{r}_{A0} \cdot \vec{v}_A t + \vec{v}_A \cdot \vec{v}_A t^2 && \text{(Distribution)} \\
 &\Rightarrow \boxed{\vec{v}_A \cdot \vec{v}_A t^2 + 2\vec{r}_{A0} \cdot \vec{v}_A t + \vec{r}_{A0} \cdot \vec{r}_{A0} - D^2 = 0} && \text{(Regrouper les termes)}
 \end{aligned}$$

À partir de notre expression permettant d'évaluer le temps  $t$  requis pour effectuer une intersection entre un rayon  $\vec{r}_{\text{ray}}$  et une distance  $D$  à un axe, remplaçons la distance  $D$  d'un tube par la valeur  $R$  qui est constante et construisons notre polynôme du 2<sup>ième</sup> degré :

$$\begin{aligned}
 \vec{v}_A \cdot \vec{v}_A t^2 + 2\vec{r}_{A0} \cdot \vec{v}_A t + \vec{r}_{A0} \cdot \vec{r}_{A0} - D^2 &= 0 && \text{(Expression de } D \text{)} \\
 \Rightarrow (\vec{v}_A \cdot \vec{v}_A)t^2 + (2\vec{r}_{A0} \cdot \vec{v}_A)t + (\vec{r}_{A0} \cdot \vec{r}_{A0} - R^2) &= 0 && (D = R, \text{ une constante)} \\
 \Rightarrow At^2 + Bt + C = 0 & \blacksquare && \text{(Remplacer } A, B \text{ et } C \text{)}
 \end{aligned}$$

<sup>3</sup> Produit scalaire :  $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(\theta) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

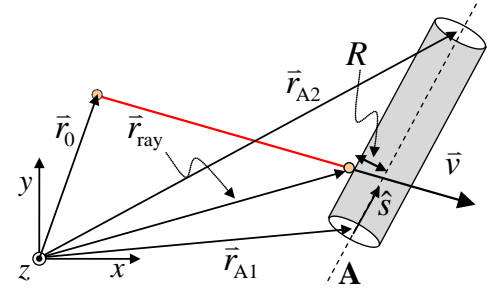
## L'intersection d'un rayon avec un tube

L'intersection d'un rayon avec un tube de rayon  $R$  délimité par les deux points  $\vec{r}_{A1}$  et  $\vec{r}_{A2}$  se calcul grâce à la résolution d'un polynôme du 2<sup>e</sup> degré en temps  $t$

$$At^2 + Bt + C = 0$$

tel que  $A = \vec{v}_A \cdot \vec{v}_A$ ,  $B = 2\vec{r}_{A0} \cdot \vec{v}_A$  et  $C = \vec{r}_{A0} \cdot \vec{r}_{A0} - R^2$

$$\text{où } \hat{s} = \frac{\vec{r}_{A2} - \vec{r}_{A1}}{|\vec{r}_{A2} - \vec{r}_{A1}|}, \quad \vec{r}_{A0} = \hat{s} \times (\vec{r}_0 - \vec{r}_{A1}) \times \hat{s}, \quad \vec{v}_A = (\hat{s} \times \vec{v} \times \hat{s})$$



avec<sup>4</sup>  $\vec{r}_0$  : Origine du rayon (position d'émission du rayon).

$\vec{v}$  : Orientation du rayon ( $\|\vec{v}\| = 1$ , vecteur unitaire).

$\vec{r}_{A1}$  : Position de l'extrémité 1 du tube.

$\vec{r}_{A2}$  : Position de l'extrémité 2 du tube.

$R$  : Rayon du tube.

En plus de solutionner un temps  $t$  **réel** et **positif**, la position de l'intersection  $\vec{r}_{\text{ray}}$  au temps  $t$  doit être située entre les deux extrémités  $\vec{r}_{A1}$  et  $\vec{r}_{A2}$  de l'axe ce qui correspond à satisfaire les deux contraintes

$$\begin{aligned} (\vec{r}_{\text{ray}} - \vec{r}_{A1}) \cdot \hat{s} > 0 & \quad \text{et} \quad (\vec{r}_{\text{ray}} - \vec{r}_{A2}) \cdot \hat{s} < 0 & \quad \text{avec} \quad \vec{r}_{\text{ray}} = \vec{r}_0 + \vec{v}t. \\ (\text{côté intérieur à } \vec{r}_{A1}) & & (\text{côté intérieur à } \vec{r}_{A2}) \end{aligned}$$

### Preuve :

À partir de la démonstration précédente, nous pouvons affirmer que le temps d'intersection d'un tube est un sous ensemble des solutions de l'intersection d'un tube infini.

Pour satisfaire l'intersection entre les deux extrémités du tube  $\vec{r}_{A1}$  et  $\vec{r}_{A2}$ , on peut construire les deux vecteurs

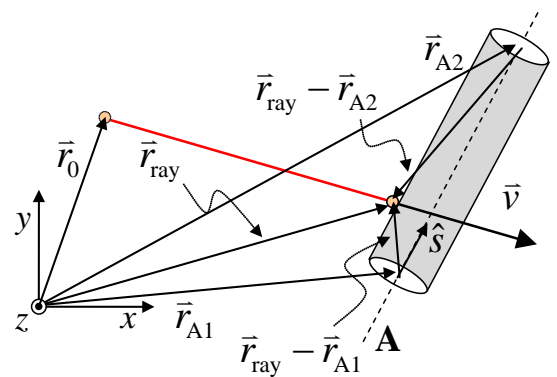
$$\vec{r}_{\text{ray}} - \vec{r}_{A1} \quad \text{et} \quad \vec{r}_{\text{ray}} - \vec{r}_{A2}.$$

Avec l'axe du tube  $\hat{s}$  et le produit scalaire, une intersection  $\vec{r}_{\text{ray}}$  sera à l'intérieur du tube par rapport à  $\vec{r}_{A1}$  si

$$(\vec{r}_{\text{ray}} - \vec{r}_{A1}) \cdot \hat{s} > 0 \quad (\text{même sens que } \hat{s})$$

et sera à l'intérieur du tube par rapport à  $\vec{r}_{A2}$  si

$$(\vec{r}_{\text{ray}} - \vec{r}_{A2}) \cdot \hat{s} < 0 \quad (\text{sens contraire à } \hat{s}) \quad \blacksquare$$



<sup>4</sup> La lettre **A** faite référence à l'axe du tube.

## L'intersection d'un rayon avec un cône

L'intersection d'un rayon avec un cône dont le centre de la base de rayon  $R$  est situé au point  $\vec{r}_{A1}$  et la pointe du cône est située au point  $\vec{r}_{A2}$  se calcule grâce à la résolution d'un polynôme du 2<sup>e</sup> degré en temps  $t$

$$At^2 + Bt + C = 0$$

tel que

$$A = \vec{v}_A \cdot \vec{v}_A - v_s^2 \frac{R^2}{H^2}, \quad B = 2\vec{r}_{A0} \cdot \vec{v}_A + 2Wv_s \frac{R^2}{H^2}$$

$$\text{et} \quad C = \vec{r}_{A0} \cdot \vec{r}_{A0} - W^2 \frac{R^2}{H^2}$$

$$\text{où} \quad \hat{s} = \frac{\vec{r}_{A2} - \vec{r}_{A1}}{|\vec{r}_{A2} - \vec{r}_{A1}|}, \quad \vec{r}_{A0} = \hat{s} \times (\vec{r}_0 - \vec{r}_{A1}) \times \hat{s}, \quad \vec{v}_A = (\hat{s} \times \vec{v} \times \hat{s}), \quad h = (\vec{r}_{\text{ray}} - \vec{r}_{A1}) \cdot \hat{s}, \quad H = |\vec{r}_{A2} - \vec{r}_{A1}|,$$

$$h_0 = (\vec{r}_0 - \vec{r}_{A1}) \cdot \hat{s}, \quad v_s = \vec{v} \cdot \hat{s} \quad \text{et} \quad W = h_{\text{max}} - h_0$$

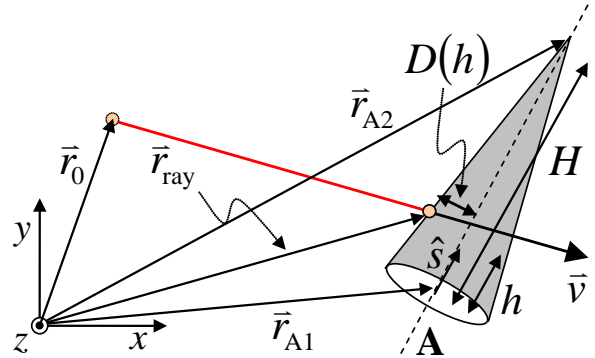
avec<sup>5</sup>  $\vec{r}_0$  : Origine du rayon (position d'émission du rayon).

$\vec{v}$  : Orientation du rayon ( $\|\vec{v}\| = 1$ , vecteur unitaire).

$\vec{r}_{A1}$  : Position centrale de la base du cône.

$\vec{r}_{A2}$  : Position de la pointe du cône.

$R$  : Rayon de la base du cône.



En plus de solutionner un temps  $t$  **réel** et **positif**, la position de l'intersection  $\vec{r}_{\text{ray}}$  au temps  $t$  doit être située entre les deux extrémités  $\vec{r}_{A1}$  et  $\vec{r}_{A2}$  de l'axe ce qui correspond à satisfaire les deux contraintes

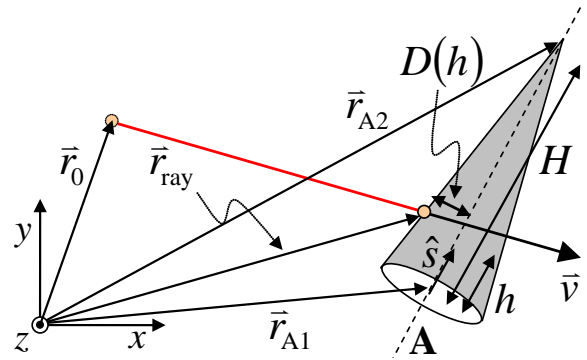
$$\begin{aligned} (\vec{r}_{\text{ray}} - \vec{r}_{A1}) \cdot \hat{s} > 0 & \quad \text{et} \quad (\vec{r}_{\text{ray}} - \vec{r}_{A2}) \cdot \hat{s} < 0 & \quad \text{avec} \quad \vec{r}_{\text{ray}} = \vec{r}_0 + \vec{v}t \\ (\text{côté intérieur à } \vec{r}_{A1}) & & (\text{côté intérieur à } \vec{r}_{A2}) & & \end{aligned}$$

<sup>5</sup> La lettre **A** faite référence à l'axe du tube.

Preuve :

En premier temps, il faut définir la fonction  $D$  représentant la distance entre la position de l'intersection  $\vec{r}_{\text{ray}}$  sur le cône et l'axe du cône. Puisque la distance débute avec une valeur  $R$  étant le rayon de la base du cône situé au point  $\vec{r}_{A1}$  et que cette distance varie linéairement jusqu'à une valeur nulle à la point du cône au point  $\vec{r}_{A2}$ , l'équation  $D$  sera égale à l'expression suivante :

$$D = D(h) = \left(1 - \frac{h}{H}\right)R$$



où  $h = (\vec{r}_{\text{ray}} - \vec{r}_{A1}) \cdot \hat{s}$  : Distance parallèle à l'axe du cône entre le point  $\vec{r}_{A1}$  et la position de l'intersection  $\vec{r}_{\text{ray}}$ .

$H = |\vec{r}_{A2} - \vec{r}_{A1}|$  : La hauteur du cône.

Développons la fonction  $D$  afin d'évaluer une expression pour  $D^2$  :

$$D = \left(1 - \frac{h}{H}\right)R \quad \text{(Expression de } D\text{)}$$

$$\Rightarrow D = \left(1 - \frac{(\vec{r}_{\text{ray}} - \vec{r}_{A1}) \cdot \hat{s}}{H}\right)R \quad (h = (\vec{r}_{\text{ray}} - \vec{r}_{A1}) \cdot \hat{s})$$

$$\Rightarrow D = \left(1 - \frac{(\vec{r}_0 + \vec{v}t - \vec{r}_{A1}) \cdot \hat{s}}{H}\right)R \quad (\vec{r}_{\text{ray}} = \vec{r}_0 + \vec{v}t)$$

$$\Rightarrow D = \left(1 - \frac{(\vec{r}_0 - \vec{r}_{A1}) \cdot \hat{s} + \vec{v} \cdot \hat{s}t}{H}\right)R \quad \text{(Réécriture)}$$

$$\Rightarrow D = \left(1 - \frac{h_0 + \vec{v} \cdot \hat{s}t}{H}\right)R \quad (h_0 = (\vec{r}_0 - \vec{r}_{A1}) \cdot \hat{s})$$

$$\Rightarrow D = \left(1 - \frac{h_0 + v_s t}{H}\right)R \quad (v_s = \vec{v} \cdot \hat{s})$$

$$\Rightarrow D = (H - h_0 - v_s t) \frac{R}{H} \quad \text{(Dénominateur commun)}$$

$$\Rightarrow D = (W - v_s t) \frac{R}{H} \quad (W = h_{\text{max}} - h_0)$$

$$\Rightarrow D^2 = (W - v_s t)^2 \frac{R^2}{H^2} \quad \text{(Mettre au carré)}$$

$$\Rightarrow D^2 = (W^2 - 2Wv_s t + v_s^2 t^2) \frac{R^2}{H^2} \quad \text{(Calcul)}$$

À partir de l'expression

$$\vec{v}_A \cdot \vec{v}_A t^2 + 2\vec{r}_{A0} \cdot \vec{v}_A t + \vec{r}_{A0} \cdot \vec{r}_{A0} - D^2 = 0$$

développée précédemment pour évaluer l'intersection d'un rayon avec un tube infini, remplaçons  $D^2$  dans l'expression afin de formuler notre polynôme du 2<sup>ième</sup> degré pour l'intersection avec le cône :

$$\vec{v}_A \cdot \vec{v}_A t^2 + 2\vec{r}_{A0} \cdot \vec{v}_A t + \vec{r}_{A0} \cdot \vec{r}_{A0} - D^2 = 0 \quad (\text{Expression})$$

$$\Rightarrow \vec{v}_A \cdot \vec{v}_A t^2 + 2\vec{r}_{A0} \cdot \vec{v}_A t + \vec{r}_{A0} \cdot \vec{r}_{A0} - \left( (W^2 - 2Wv_s t + v_s^2 t^2) \frac{R^2}{H^2} \right) = 0 \quad (\text{Remplacer } D)$$

$$\Rightarrow \left( \vec{v}_A \cdot \vec{v}_A - v_s^2 \frac{R^2}{H^2} \right) t^2 + \left( 2\vec{r}_{A0} \cdot \vec{v}_A + 2Wv_s \frac{R^2}{H^2} \right) t + \left( \vec{r}_{A0} \cdot \vec{r}_{A0} - W^2 \frac{R^2}{H^2} \right) = 0 \quad (\text{Réorganisation})$$

$$\Rightarrow At^2 + Bt + C = 0 \quad \blacksquare \quad (\text{Rempl. } A, B \text{ et } C)$$

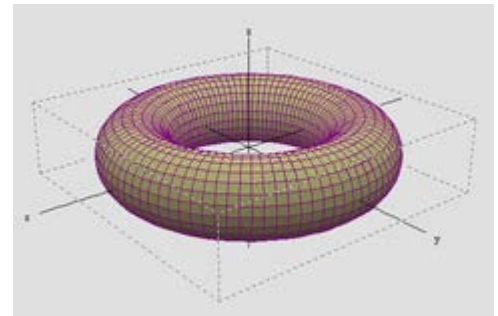
Pour s'assurer que l'intersection au temps  $t$  est située entre les deux extrémités  $\vec{r}_{A1}$  et  $\vec{r}_{A2}$  du cône, il faut utiliser la même démarche que pour le tube ce qui a déjà été démontré.

## L'intersection d'un rayon avec un tore

Un tore est une forme géométrique qui a l'apparence d'un beignet. L'équation implicite d'un tore situé dans le plan  $xy$  et centré à l'origine est égale à l'expression

$$\left( x^2 + y^2 + z^2 + R_{\text{maj}}^2 - R_{\text{min}}^2 \right)^2 = 4R_{\text{maj}}^2 (x^2 + y^2)$$

où  $R_{\text{maj}}$  est la distance entre le centre du tore et le centre de la partir cylindrique du tore (*major radius*) et  $R_{\text{min}}$  est le rayon du cylindre appartenant au tore (*minor radius*).



<https://fr.wikipedia.org/wiki/Tore>  
Un tore dans le plan  $xy$  centré à l'origine où  $R_{\text{maj}} = 3R_{\text{min}}$

Pour réaliser l'intersection du tore avec un rayon  $\vec{r}_{\text{ray}}$ , nous pouvons décrire nos concepts à l'aide des paramètres suivants :

$\vec{r}_0$  : Origine du rayon (position d'émission du rayon).

$\vec{v}$  : Orientation du rayon ( $\|\vec{v}\| = 1$ , vecteur unitaire).

$\vec{r}_T$  : Position centrale du tore.

$\vec{n}$  : L'orientation de la normale au plan du tore.

$R_{\text{max}}$  : Rayon du tore .

$R_{\text{min}}$  : Rayon du cylindre du tore.

L'intersection d'un rayon avec un tore centré à la position  $\bar{r}_T$  dont l'axe de la normale au plan du tore est alignée selon  $\bar{n}$  se calcul grâce à la résolution d'un polynôme du 4<sup>e</sup> degré en temps  $t$

$$At^4 + Bt^3 + Ct^2 + Dt + E = 0$$

tel que

$$\begin{aligned} A &= \delta_1^2 & B &= 2\delta_1\eta_2 & C &= (2\delta_1\beta_3 + \eta_2^2 - 4R_{\text{maj}}^2\gamma_1) \\ D &= 2\eta_2\beta_3 - 4R_{\text{maj}}^2\mu_2 & E &= \beta_3^2 - 4R_{\text{maj}}^2\alpha_3 \end{aligned}$$

et avec les changements de variable suivant :

Changement de base avec $\bar{k}_T \neq \bar{i}$ (sinon, on peut prendre $\bar{j}$ comme référence dans le calcul de $\bar{i}_T$ )		
$\bar{k}_T = \frac{\bar{n}}{ \bar{n} }$	$\bar{i}_T = \frac{\bar{i} \times \bar{k}_T}{ \bar{i} \times \bar{k}_T }$	$\bar{j}_T = \bar{k}_T \times \bar{i}_T$ (pour avoir $\bar{i}_T \times \bar{j}_T = \bar{k}_T$ )

Projection des vecteurs dans la nouvelle base		
$r_{xT} = \bar{r}_T \cdot \bar{i}_T$	$r_{yT} = \bar{r}_T \cdot \bar{j}_T$	$r_{zT} = \bar{r}_T \cdot \bar{k}_T$
$r_{x0} = \bar{r}_0 \cdot \bar{i}_T$	$r_{y0} = \bar{r}_0 \cdot \bar{j}_T$	$r_{z0} = \bar{r}_0 \cdot \bar{k}_T$
$v_x = \bar{v} \cdot \bar{i}_T$	$v_y = \bar{v} \cdot \bar{j}_T$	$v_z = \bar{v} \cdot \bar{k}_T$

Changement de variable en lien avec les coefficients $A, B, C, D$ et $E$		
$\alpha_1 = r_{xT}^2 + r_{yT}^2$	$\alpha_2 = \alpha_1 + r_{x0}^2 + r_{y0}^2$	$\alpha_3 = \alpha_2 - 2r_{x0}r_{xT} - 2r_{y0}r_{yT}$
$\beta_1 = R_{\text{maj}}^2 - R_{\text{min}}^2 + \alpha_1 + r_{zT}^2$	$\beta_2 = \beta_1 + r_{x0}^2 + r_{y0}^2 + r_{z0}^2$	$\beta_3 = \beta_2 - 2r_{x0}r_{xT} - 2r_{y0}r_{yT} - 2r_{z0}r_{zT}$
$\gamma_1 = v_x^2 + v_y^2$	$\delta_1 = \gamma_1 + v_z^2$	
$\mu_1 = r_{x0}v_x + r_{y0}v_y$	$\mu_2 = 2(\mu_1 - v_x r_{xT} - v_y r_{yT})$	
$\eta_1 = \mu_1 + r_{z0}v_z$	$\eta_2 = 2(\eta_1 - v_x r_{xT} - v_y r_{yT} - v_z r_{zT})$	

Preuve :

L'équation d'un tore centré à l'origine dans le plan  $xy$  est

$$(x^2 + y^2 + z^2 + R_{\text{maj}}^2 - R_{\text{min}}^2)^2 = 4R_{\text{maj}}^2(x^2 + y^2) .$$

Pour développer une expression d'un tore centré en  $\bar{r}_T$  avec une normale au plan du tore  $\bar{n}$ , nous devons définir une nouvelles base  $\bar{i}_T, \bar{j}_T$  et  $\bar{k}_T$  tel que

$$\bar{k}_T = \frac{\bar{n}}{|\bar{n}|} \quad \text{et} \quad \bar{i}_T = \frac{\bar{i} \times \bar{k}_T}{|\bar{i} \times \bar{k}_T|} \quad \bar{j}_T = \bar{k}_T \times \bar{i}_T$$

ce qui assure  $\vec{i}_T \times \vec{j}_T = \vec{k}_T$ . Ce choix impose cependant que  $\vec{k}_T \neq \vec{i}$ . On peut mesurer la distance  $x$ ,  $y$  et  $z$  dans notre nouvelle base avec les équations

$$x = (\vec{r} - \vec{r}_T) \cdot \vec{i}_T, \quad y = (\vec{r} - \vec{r}_T) \cdot \vec{j}_T \quad \text{et} \quad z = (\vec{r} - \vec{r}_T) \cdot \vec{k}_T$$

où  $\vec{r}$  correspond à un vecteur position d'un point sur le tore.

Effectuons le produit scalaire afin d'obtenir une notation plus compacte :

$$\begin{aligned} x &= (\vec{r} - \vec{r}_T) \cdot \vec{i}_T & \Rightarrow & \quad x = \vec{r} \cdot \vec{i}_T - \vec{r}_T \cdot \vec{i}_T \\ & & \Rightarrow & \quad \boxed{x = r_x - r_{xT}} \end{aligned}$$

Nous pouvons généraliser l'ensemble des calculs à l'axe  $y$  et  $z$  dans le tableau suivant :

Selon l'axe $x$	Selon l'axe $y$	Selon l'axe $z$
$x = r_x - r_{xT}$	$y = r_y - r_{yT}$	$z = r_z - r_{zT}$
$r_x = \vec{r} \cdot \vec{i}_T$	$r_y = \vec{r} \cdot \vec{j}_T$	$r_z = \vec{r} \cdot \vec{k}_T$
$r_{xT} = \vec{r}_T \cdot \vec{i}_T$	$r_{yT} = \vec{r}_T \cdot \vec{j}_T$	$r_{zT} = \vec{r}_T \cdot \vec{k}_T$

Développons l'expression de  $x^2 = (r_x - r_{xT})^2$  ce qui donne

$$x^2 = r_x^2 - 2r_x r_{xT} + r_{xT}^2.$$

Nous pouvons généraliser l'ensemble des calculs à l'axe  $y$  et  $z$  dans le tableau suivant :

Selon l'axe $x$	Selon l'axe $y$	Selon l'axe $z$
$x^2 = r_x^2 - 2r_x r_{xT} + r_{xT}^2$	$y^2 = r_y^2 - 2r_y r_{yT} + r_{yT}^2$	$z^2 = r_z^2 - 2r_z r_{zT} + r_{zT}^2$

Puisque  $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t$ , nous aurons à développer  $r_x$  :

$$\begin{aligned} r_x &= \vec{r} \cdot \vec{i}_T & \Rightarrow & \quad r_x = (\vec{r}_0 + \vec{v}t) \cdot \vec{i}_T \\ & & \Rightarrow & \quad r_x = \vec{r}_0 \cdot \vec{i}_T + \vec{v} \cdot \vec{i}_T t \\ & & \Rightarrow & \quad \boxed{r_x = r_{x0} + v_x t} \quad (r_{x0} = \vec{r}_0 \cdot \vec{i}_T \text{ et } v_x = \vec{v} \cdot \vec{i}_T) \end{aligned}$$

Nous pouvons généraliser l'ensemble des calculs à l'axe  $y$  et  $z$  dans le tableau suivant :

Selon l'axe $x$	Selon l'axe $y$	Selon l'axe $z$
$r_x = r_{x0} + v_x t$	$r_y = r_{y0} + v_y t$	$r_z = r_{z0} + v_z t$
$r_{x0} = \vec{r}_0 \cdot \vec{i}_T$	$r_{y0} = \vec{r}_0 \cdot \vec{j}_T$	$r_{z0} = \vec{r}_0 \cdot \vec{k}_T$
$v_x = \vec{v} \cdot \vec{i}_T$	$v_y = \vec{v} \cdot \vec{j}_T$	$v_z = \vec{v} \cdot \vec{k}_T$



Développons maintenant l'expression de  $r_x^2 = (r_{x0} + v_x t)^2$  ce qui donne

$$r_x^2 = r_{x0}^2 + 2r_{x0}v_x t + v_x^2 t^2 .$$

Nous pouvons généraliser l'ensemble des calculs à l'axe y et z dans le tableau suivant :

Selon l'axe x	Selon l'axe y	Selon l'axe z
$r_x^2 = r_{x0}^2 + 2r_{x0}v_x t + v_x^2 t^2$	$r_y^2 = r_{y0}^2 + 2r_{y0}v_y t + v_y^2 t^2$	$r_z^2 = r_{z0}^2 + 2r_{z0}v_z t + v_z^2 t^2$

Nous allons maintenant remplacer les expressions de  $x^2$ ,  $y^2$  et  $z^2$  dans l'équation du tore :

$$\begin{aligned} & \left( x^2 + y^2 + z^2 + R_{\text{maj}}^2 - R_{\text{min}}^2 \right)^2 = 4R_{\text{maj}}^2 (x^2 + y^2) \\ \Rightarrow & \left( (r_x^2 - 2r_x r_{xT} + r_{xT}^2) + (r_y^2 - 2r_y r_{yT} + r_{yT}^2) + (r_z^2 - 2r_z r_{zT} + r_{zT}^2) + R_{\text{maj}}^2 - R_{\text{min}}^2 \right)^2 \\ & = 4R_{\text{maj}}^2 \left( (r_x^2 - 2r_x r_{xT} + r_{xT}^2) + (r_y^2 - 2r_y r_{yT} + r_{yT}^2) \right) \\ \Rightarrow & \left( r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 - 2r_x r_{xT} - 2r_y r_{yT} - 2r_z r_{zT} + R_{\text{maj}}^2 - R_{\text{min}}^2 + r_{xT}^2 + r_{yT}^2 + r_{zT}^2 \right)^2 \\ & = 4R_{\text{maj}}^2 \left( r_x^2 + r_y^2 - 2r_x r_{xT} - 2r_y r_{yT} + r_{xT}^2 + r_{yT}^2 \right) \end{aligned}$$

Effectuons les changements de variable

$$\alpha_1 = r_{xT}^2 + r_{yT}^2 \quad \text{et} \quad \beta_1 = R_{\text{maj}}^2 - R_{\text{min}}^2 + \alpha_1 + r_{zT}^2$$

ce qui donne l'expression simplifiée

$$\left( r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 - 2r_x r_{xT} - 2r_y r_{yT} - 2r_z r_{zT} + \beta_1 \right)^2 = 4R_{\text{maj}}^2 \left( r_x^2 + r_y^2 - 2r_x r_{xT} - 2r_y r_{yT} + \alpha_1 \right) .$$

Nous allons maintenant remplacer les expressions de  $r_x^2$ ,  $r_y^2$  et  $r_z^2$  dans l'équation du tore :

$$\begin{aligned} & \left( r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 - 2r_x r_{xT} - 2r_y r_{yT} - 2r_z r_{zT} + \beta_1 \right)^2 = 4R_{\text{maj}}^2 \left( r_x^2 + r_y^2 - 2r_x r_{xT} - 2r_y r_{yT} + \alpha_1 \right) \\ \Rightarrow & \left( (r_{x0}^2 + 2r_{x0}v_x t + v_x^2 t^2) + (r_{y0}^2 + 2r_{y0}v_y t + v_y^2 t^2) + (r_{z0}^2 + 2r_{z0}v_z t + v_z^2 t^2) - 2r_x r_{xT} - 2r_y r_{yT} - 2r_z r_{zT} + \beta_1 \right)^2 \\ & = 4R_{\text{maj}}^2 \left( (r_{x0}^2 + 2r_{x0}v_x t + v_x^2 t^2) + (r_{y0}^2 + 2r_{y0}v_y t + v_y^2 t^2) - 2r_x r_{xT} - 2r_y r_{yT} + \alpha_1 \right) \\ \Rightarrow & \left( v_x^2 t^2 + v_y^2 t^2 + v_z^2 t^2 + 2r_{x0}v_x t + 2r_{y0}v_y t + 2r_{z0}v_z t - 2r_x r_{xT} - 2r_y r_{yT} - 2r_z r_{zT} + \beta_1 + r_{x0}^2 + r_{y0}^2 + r_{z0}^2 \right)^2 \\ & = 4R_{\text{maj}}^2 \left( v_x^2 t^2 + v_y^2 t^2 + 2r_{x0}v_x t + 2r_{y0}v_y t - 2r_x r_{xT} - 2r_y r_{yT} + \alpha_1 + r_{x0}^2 + r_{y0}^2 \right) \\ \Rightarrow & \left( (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) t^2 + 2(r_{x0}v_x + r_{y0}v_y + r_{z0}v_z) t - 2r_x r_{xT} - 2r_y r_{yT} - 2r_z r_{zT} + \beta_1 + r_{x0}^2 + r_{y0}^2 + r_{z0}^2 \right)^2 \\ & = 4R_{\text{maj}}^2 \left( (v_x^2 + v_y^2) t^2 + 2(r_{x0}v_x + r_{y0}v_y) t - 2r_x r_{xT} - 2r_y r_{yT} + \alpha_1 + r_{x0}^2 + r_{y0}^2 \right) \end{aligned}$$

Effectuons l'ensemble des changements de variable suivant :

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= \alpha_1 + r_{x0}^2 + r_{y0}^2 & \beta_2 &= \beta_1 + r_{x0}^2 + r_{y0}^2 + r_{z0}^2 \\ \gamma_1 &= v_x^2 + v_y^2 & \delta_1 &= \gamma_1 + v_z^2 \\ \mu_1 &= r_{x0}v_x + r_{y0}v_y & \eta_1 &= \mu_1 + r_{z0}v_z\end{aligned}$$

Ces changements nous donnent l'expression

$$\left(\delta_1 t^2 + 2\eta_1 t - 2r_x r_{xT} - 2r_y r_{yT} - 2r_z r_{zT} + \beta_2\right)^2 = 4R_{\text{maj}}^2 \left(\gamma_1 t^2 + 2\mu_1 t - 2r_x r_{xT} - 2r_y r_{yT} + \alpha_2\right) .$$

Remplaçons maintenant les termes  $r_x$ ,  $r_y$  et  $r_z$

$$\begin{aligned}\left(\delta_1 t^2 + 2\eta_1 t - 2r_x r_{xT} - 2r_y r_{yT} - 2r_z r_{zT} + \beta_2\right)^2 &= 4R_{\text{maj}}^2 \left(\gamma_1 t^2 + 2\mu_1 t - 2r_x r_{xT} - 2r_y r_{yT} + \alpha_2\right) \\ \Rightarrow \left(\delta_1 t^2 + 2\eta_1 t - 2(r_{x0} + v_x t)r_{xT} - 2(r_{y0} + v_y t)r_{yT} - 2(r_{z0} + v_z t)r_{zT} + \beta_2\right)^2 & \\ = 4R_{\text{maj}}^2 \left(\gamma_1 t^2 + 2\mu_1 t - 2(r_{x0} + v_x t)r_{xT} - 2(r_{y0} + v_y t)r_{yT} + \alpha_2\right) & \\ \Rightarrow \left(\delta_1 t^2 + 2\eta_1 t - 2r_{x0}r_{xT} - 2v_x r_{xT} t - 2r_{y0}r_{yT} - 2v_y r_{yT} t - 2r_{z0}r_{zT} - 2v_z r_{zT} t + \beta_2\right)^2 & \\ = 4R_{\text{maj}}^2 \left(\gamma_1 t^2 + 2\mu_1 t - 2r_{x0}r_{xT} - 2v_x r_{xT} t - 2r_{y0}r_{yT} - 2v_y r_{yT} t + \alpha_2\right) & \\ \Rightarrow \left(\delta_1 t^2 + 2(\eta_1 - v_x r_{xT} - v_y r_{yT} - v_z r_{zT})t + \beta_2 - 2r_{x0}r_{xT} - 2r_{y0}r_{yT} - 2r_{z0}r_{zT}\right)^2 & \\ = 4R_{\text{maj}}^2 \left(\gamma_1 t^2 + 2(\mu_1 - v_x r_{xT} - v_y r_{yT})t + \alpha_2 - 2r_{x0}r_{xT} - 2r_{y0}r_{yT}\right) &\end{aligned}$$

Nous allons faire le changement de variable suivant :

$$\begin{aligned}\alpha_3 &= \alpha_2 - 2r_{x0}r_{xT} - 2r_{y0}r_{yT} & \beta_3 &= \beta_2 - 2r_{x0}r_{xT} - 2r_{y0}r_{yT} - 2r_{z0}r_{zT} \\ \mu_2 &= 2(\mu_1 - v_x r_{xT} - v_y r_{yT}) & \eta_2 &= 2(\eta_1 - v_x r_{xT} - v_y r_{yT} - v_z r_{zT})\end{aligned}$$

Ces changements nous donnent l'expression

$$\left(\delta_1 t^2 + \eta_2 t + \beta_3\right)^2 = 4R_{\text{maj}}^2 \left(\gamma_1 t^2 + \mu_2 t + \alpha_3\right) .$$

Développons maintenant le carré du côté gauche et réécrivons le tout sous la forme d'un polynôme du 4<sup>ième</sup> degré :

$$\begin{aligned}\left(\delta_1 t^2 + \eta_2 t + \beta_3\right)^2 &= 4R_{\text{maj}}^2 \left(\gamma_1 t^2 + \mu_2 t + \alpha_3\right) \\ \Rightarrow \left(\delta_1 t^2 + \eta_2 t + \beta_3\right)\left(\delta_1 t^2 + \eta_2 t + \beta_3\right) &= 4R_{\text{maj}}^2 \left(\gamma_1 t^2 + \mu_2 t + \alpha_3\right) \\ \Rightarrow \delta_1^2 t^4 + \delta_1 \eta_2 t^3 + \delta_1 \beta_3 t^2 + \eta_2 \delta_1 t^3 + \eta_2^2 t^2 + \eta_2 \beta_3 t + \beta_3 \delta_1 t^2 + \beta_3 \eta_2 t + \beta_3^2 &= 4R_{\text{maj}}^2 \left(\gamma_1 t^2 + \mu_2 t + \alpha_3\right) \\ \Rightarrow \delta_1^2 t^4 + 2\delta_1 \eta_2 t^3 + 2\delta_1 \beta_3 t^2 + \eta_2^2 t^2 + 2\eta_2 \beta_3 t + \beta_3^2 &= 4R_{\text{maj}}^2 \left(\gamma_1 t^2 + \mu_2 t + \alpha_3\right) \\ \Rightarrow \delta_1^2 t^4 + 2\delta_1 \eta_2 t^3 + \left(2\delta_1 \beta_3 + \eta_2^2 - 4R_{\text{maj}}^2 \gamma_1\right)t^2 + \left(2\eta_2 \beta_3 - 4R_{\text{maj}}^2 \mu_2\right)t + \beta_3^2 - 4R_{\text{maj}}^2 \alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

La dernière équation se déduit à un polynôme du 4<sup>e</sup> degré

$$At^4 + Bt^3 + Ct^2 + Dt + E = 0$$

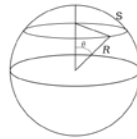
tel que

$$\begin{aligned} A &= \delta_1^2 & B &= 2\delta_1\eta_2 & C &= (2\delta_1\beta_3 + \eta_2^2 - 4R_{\text{maj}}^2\gamma_1) \\ D &= 2\eta_2\beta_3 - 4R_{\text{maj}}^2\mu_2 & E &= \beta_3^2 - 4R_{\text{maj}}^2\alpha_3 \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. ■

## L'intersection d'une calotte sphérique

En construction ...



[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Calotte\\_spherique.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Calotte_spherique.svg)













# Chapitre 6.3 – Les couleurs dans un *ray tracer*

## La couleur

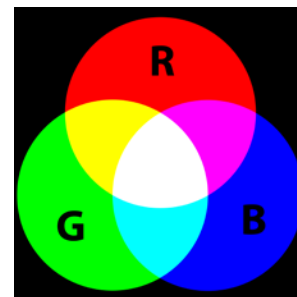
Une couleur  $\ddot{S}$  est un triplet représentant les trois canaux de couleur élémentaire rouge (*red*), vert (*green*) et bleu (*blue*). Un canal doit idéalement avoir une valeur entre 0 et 1 afin d'éviter la saturation<sup>1</sup>:

$$\ddot{S} = (S_R, S_G, S_B)$$

où  $S_R$  : Niveau de rouge dans la couleur de la surface ( $S_R \in [0..1]$ ).

$S_G$  : Niveau de vert dans la couleur de la surface ( $S_G \in [0..1]$ ).

$S_B$  : Niveau de bleu dans la couleur de la surface ( $S_B \in [0..1]$ ).



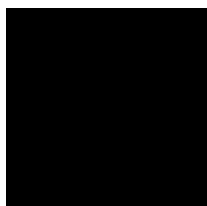
[https://en.wikipedia.org/wiki/RGB\\_color\\_model](https://en.wikipedia.org/wiki/RGB_color_model)

On utilise la notation  $S_\lambda$  pour désigner un canal quelconque d'une couleur  $\ddot{S}$  dans une équation mathématique utilisant des couleurs :

$$S_\lambda \text{ tel que } \lambda \in \{R, G, B\} \text{ et } S_\lambda \in [0..1]$$

Voici différentes représentations de couleur en fonction du vecteur couleur  $\ddot{S}$  :

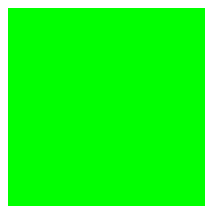
$$\ddot{S} = (0.0, 0.0, 0.0)$$



$$\ddot{S} = (1.0, 0.0, 0.0)$$



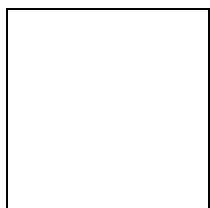
$$\ddot{S} = (0.0, 1.0, 0.0)$$



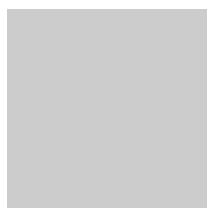
$$\ddot{S} = (0.0, 0.0, 1.0)$$



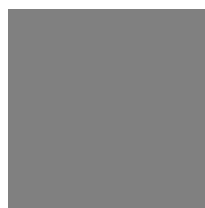
$$\ddot{S} = (1.0, 1.0, 1.0)$$



$$\ddot{S} = (0.8, 0.8, 0.8)$$



$$\ddot{S} = (0.5, 0.5, 0.5)$$



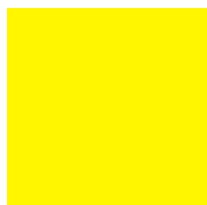
$$\ddot{S} = (0.2, 0.2, 0.2)$$



$$\ddot{S} = (1.0, 0.5, 0.0)$$



$$\ddot{S} = (1.0, 0.965, 0.0)$$



$$\ddot{S} = (0.635, 0.0, 1.0)$$



$$\ddot{S} = (0.1, 0.0, 0.46)$$



<sup>1</sup> La majorité des logiciels ou classe (comme *BufferedImage* de java) n'accepte pas un canal de couleur supérieur à 1.

## L'addition des couleurs

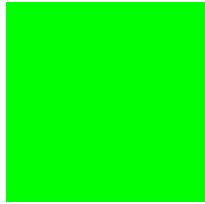
L'addition de deux couleurs  $\ddot{S}_X$  et  $\ddot{S}_Y$  permet d'obtenir une **couleur amplifiée**  $\ddot{S}_{X+Y}$  plus lumineuse. L'addition s'effectue en additionnant les composantes des vecteurs des couleurs  $\ddot{S}_X$  et  $\ddot{S}_Y$  canal  $\lambda$  par canal  $\lambda$  :

$$\ddot{S}_X + \ddot{S}_Y = (S_{RX} + S_{RY}, S_{GX} + S_{GY}, S_{BX} + S_{BY})$$

où  $S_{\lambda X}$  : Canal  $\lambda$  de la couleur  $S_X$ . ( $\lambda \in \{R, G, B\}$ )

$S_{\lambda Y}$  : Canal  $\lambda$  de la couleur  $S_Y$ . ( $\lambda \in \{R, G, B\}$ )

$$\ddot{S}_X = (1.0, 0.0, 0.0) \quad + \quad \ddot{S}_Y = (0.0, 1.0, 0.0) \quad = \quad \ddot{S} = (1.0, 1.0, 0.0)$$



## Saturation d'une couleur

Lorsque l'on réalise des additions de couleur, il est possible qu'un canal  $S_\lambda$  **satüre** ce qui correspond à avoir une **valeur supérieure à 1**. Il est primordial de régler cette situation avant de dessiner cette couleur. Il existe plusieurs algorithmes complexes<sup>2</sup> pour gérer cette situation.

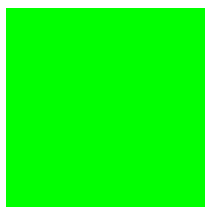
L'algorithme le plus simple consiste à réduire à tous les canaux excédant la valeur limite (qui est de 1) à la valeur limite. Avec la fonction mathématique « min », on peut alors formater toutes les couleurs de façon adéquate avant qu'elle soit affichée avec l'équation

$$\ddot{S}_{\text{aff}} = \min(\ddot{S}, 1.0) = (\min(S_R, 1.0), \min(S_G, 1.0), \min(S_B, 1.0))$$

où la fonction  $\min(S_\lambda, 1.0)$  prend la valeur la plus petite entre  $S_\lambda$  et 1.0 pour chaque canaux R, G et B de la couleur à afficher  $\ddot{S}_{\text{aff}}$ .

Voici un exemple d'addition de deux couleurs avec la normalisation à l'affichage :

$$\ddot{S}_X = (1.0, 0.5, 0.0) \quad + \quad \ddot{S}_Y = (0.0, 1.0, 0.0) \quad = \quad \ddot{S} = (1.0, 1.5, 0.0)$$



$$\ddot{S}_{\text{aff}} = (1.0, 1.0, 0.0)$$

<sup>2</sup> On peut normaliser la saturation en fonction du canal le plus dominant dans la couleur. Le canal dominant se fait réduire à 1.0 et les autres se font diviser par un facteur de proportion (exemple  $S_{\lambda_{\text{max}}}$ ).

## La multiplication d'une couleur par un scalaire

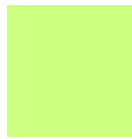
La multiplication d'une couleur  $\ddot{S}_X$  par un scalaire  $k$  correspond à **accentuer** ( $k > 1$ ) ou **atténuer** ( $k < 1$ ) chacun des canaux de la couleur  $\ddot{S}_X$  par un facteur commun en multipliant chaque canal  $S_{\lambda X}$  par le scalaire  $k$ . À moins d'une application très particulière, une couleur est traditionnellement toujours positive ce qui interdit l'existence d'un scalaire négatif (doit respecter  $k > 0$ ) :

$$k \ddot{S} = (k S_R, k S_G, k S_B)$$

où  $S_{\lambda X}$  : Canal  $\lambda$  de la couleur  $S_X$ . ( $\lambda \in \{R, G, B\}$ )

$S_{\lambda Y}$  : Canal  $\lambda$  de la couleur  $S_Y$ . ( $\lambda \in \{R, G, B\}$ )

$$k = 0.6 \quad \ddot{S} = (0.8, 1.0, 0.5) = k \ddot{S} = (0.48, 0.6, 0.3)$$



$$k = 1.5 \quad \ddot{S} = (0.9, 0.5, 0.8) = k \ddot{S} = (1.35, 0.75, 1.2)$$



(Attention : couleur saturée !!!)

$$(\ddot{S}_{\text{aff}} = (1.0, 0.75, 1.0))$$

## La multiplication entre deux couleurs

La multiplication entre deux couleurs  $\ddot{S}_X$  et  $\ddot{S}_Y$  correspond à effectuer un **filtrage** entre deux couleurs. La multiplication nécessite le produit d'un par de composante  $S_{\lambda X}$  et  $S_{\lambda Y}$  que l'on attribue à la composante de la couleur résultante :

$$\ddot{S}_X \ddot{S}_Y = (S_{RX} S_{RY}, S_{GX} S_{GY}, S_{BX} S_{BY})$$

où  $S_{\lambda X}$  : Canal  $\lambda$  de la couleur  $S_X$ . ( $\lambda \in \{R, G, B\}$ )

$S_{\lambda Y}$  : Canal  $\lambda$  de la couleur  $S_Y$ . ( $\lambda \in \{R, G, B\}$ )

$$\ddot{S}_X = (0.5, 0.3, 0.7) \quad \ddot{S}_Y = (0.2, 1.0, 0.4) = (0.1, 0.3, 0.28)$$











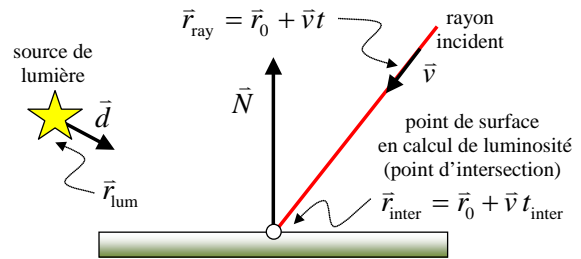




# Chapitre 6.4a – L'illumination direct dans un ray tracer

## Informations nécessaires au calcul d'illumination

Afin de réaliser un calcul d'illumination pour un rayon ayant réalisé une intersection à un temps  $t_{inter}$  sur une géométrie de la scène, il nous faut les informations géométriques suivantes :



L'orientation du rayon	Point d'intersection	Position de la source de lumière	Orientation de la source de lumière	Normale à la surface	Couleur de la source de lumière
$\vec{v}$	$\vec{r}_{inter} = \vec{r}_0 + \vec{v} t_{inter}$	$\vec{r}_{lum}$	$\vec{d}$	$\vec{N}$	$\vec{L}$

À l'aide du matériel appliqué sur la géométrie, nous avons accès aux informations suivantes :

Couleur de base	Constantes de réflexion	Plasticité <sup>1</sup>	Indice de réfraction	Transparence	Réflexivité
$\vec{S}$	$k_a, k_d, k_s$	$p$	$n$	$k_t$	$k_r$

## Luminosité par réflexion ambiante

La réflexion ambiante permet de simuler l'inter réflexion de la lumière entre toutes les différentes surfaces d'une scène. Cette luminosité habituellement faible se retrouve sur toutes les surfaces.

La contribution à la luminosité par réflexion ambiante pour chaque canal  $\lambda$  de couleur est obtenue par l'équation suivante :

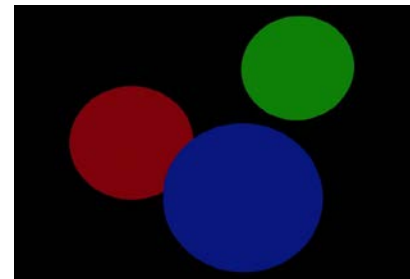
$$L_{amb\lambda} = L_{a\lambda} k_{a\lambda} S_\lambda$$

où  $L_{amb\lambda}$  : Luminosité ambiante de couleur  $\lambda$ .

$L_{a\lambda}$  : Intensité de la lumière ambiante de couleur  $\lambda$  ( $L_{a\lambda} \in [0..1]$ ).

$k_{a\lambda}$  : Constante de réflexion ambiante de la surface pour la couleur  $\lambda$  ( $k_{a\lambda} \in [0..1]$ ).

$S_\lambda$  : Couleur de base de la surface de canal  $\lambda$  ( $S_\lambda \in [0..1]$ ).



[http://www0.cs.ucl.ac.uk/staff/ucacajs/bo-0k/tmp/CGVE/chapter\\_6.htm](http://www0.cs.ucl.ac.uk/staff/ucacajs/bo-0k/tmp/CGVE/chapter_6.htm)  
Luminosité ambiante sur trois sphères.

Si l'on utilise la **notation en triplet** avec une constante de réflexion ambiante  $k_a$  unique pour les trois canaux de couleur  $\lambda$  ( $k_a$  est un scalaire et non un triplet), nous avons

$$\vec{L}_{amb} = \vec{L}_a \vec{S}_a \quad \text{où} \quad \vec{S}_a = k_a \vec{S}$$

<sup>1</sup> Un matériel « plastique » aura tendance à réfléchir la couleur de la source de lumière  $\vec{L}$  et non la couleur du matériel  $\vec{S}$ .

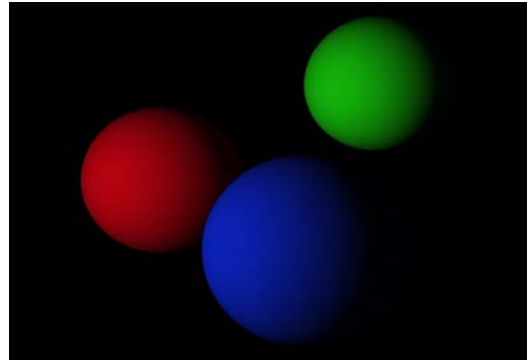
## Luminosité par réflexion diffuse (réflexion lambertienne)

La réflexion diffuse permet de simuler la dispersion de la lumière par une surface. La lumière perçue par un observateur va dépendre de l'angle entre la **normale à la surface** et l'**orientation de la source de lumière** (plus la normale à la surface fait face à la lumière, plus il y aura de réflexion). Cette luminosité donne la forme à la surface.

La contribution à la luminosité par réflexion diffuse pour chaque canal  $\lambda$  de couleur est obtenue par l'équation suivante :

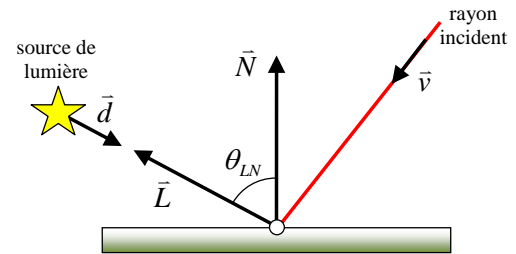
$$L_{\text{dif } \lambda} = L_{\text{d}\lambda} k_{\text{d}\lambda} (\vec{N} \cdot \vec{L}) S_{\lambda}$$

- où
- $L_{\text{dif } \lambda}$  : Luminosité diffuse de couleur  $\lambda$ .
  - $L_{\text{d}\lambda}$  : Intensité de la lumière diffuse de couleur  $\lambda$  ( $L_{\text{d}\lambda} \in [0..1]$ ).
  - $k_{\text{d}\lambda}$  : Constante de réflexion diffuse de la surface pour la couleur  $\lambda$  ( $k_{\text{d}\lambda} \in [0..1]$ ).
  - $\vec{N}$  : Normale à la surface du point de réflexion diffuse ( $|\vec{N}| = 1$ ).
  - $\vec{L}$  : Vecteur lumière orienté du point de diffusion vers la source de lumière ( $|\vec{L}| = 1, \vec{L} = -\vec{d}$ ).
  - $S_{\lambda}$  : Couleur de base de la surface de canal  $\lambda$  ( $S_{\lambda} \in [0..1]$ ).



[http://www0.cs.ucl.ac.uk/staff/ucacajs/book\\_tm\\_p/CGVE/chapter\\_6.htm](http://www0.cs.ucl.ac.uk/staff/ucacajs/book_tm_p/CGVE/chapter_6.htm)

Luminosité ambiante et diffuse sur trois sphère.



Il est important de préciser que la **luminosité diffuse**  $L_{\text{dif}}$  ne peut **pas être négative** (une source de lumière ne retire pas d'éclairage). Ainsi, il faut satisfaire la contrainte suivante :

$$\vec{N} \cdot \vec{L} < 0 \quad \Rightarrow \quad L_{\text{dif}} = 0$$

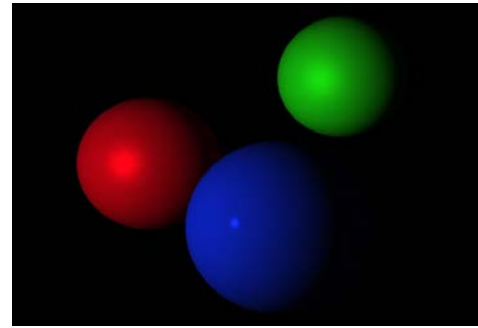
Si l'on utilise la **notation en triplet** avec une constante de réflexion diffuse  $k_d$  unique pour les trois canaux de couleur  $\lambda$ , nous avons

$$\ddot{L}_{\text{dif}} = \begin{cases} \ddot{L}_d (\vec{N} \cdot \vec{L}) \ddot{S}_d & \text{si } \vec{N} \cdot \vec{L} > 0 \\ 0 & \text{si } \vec{N} \cdot \vec{L} < 0 \end{cases} \quad \text{où } \ddot{S}_d = k_d \ddot{S}$$

# Luminosité par réflexion spéculaire

La réflexion spéculaire simule la réflexion de la lumière sur la surface polie produisant des régions à haute intensité qui porte le nom de *highlight*. Une surface **métallique** aura tendance à réfléchir spéculairement la couleur de la surface  $\vec{S}$  et une surface **plastique** aura tendance à réfléchir spéculairement la couleur de la lumière  $\vec{L}$ .

La contribution spéculaire sera forte lorsque le rayon réfléchi  $\vec{R}$  est fortement orienté vers l'œil  $\vec{E}$ .



[http://www0.cs.ucl.ac.uk/staff/ucacajs/book\\_tm\\_p/CGVE/chapter\\_6.htm](http://www0.cs.ucl.ac.uk/staff/ucacajs/book_tm_p/CGVE/chapter_6.htm)  
Luminosité ambiante, diffuse et spéculaire sur trois sphères.

La contribution à la luminosité par réflexion spéculaire pour chaque canal  $\lambda$  de couleur est obtenue à l'aide des deux modèles suivants : Avec :  $S_{\lambda(\text{plas})} = (1 - p)S_{\lambda} + p$

Modèle spéculaire de Phong	Modèle spéculaire de Blinn
$L_{\text{spé}\lambda} = L_{s\lambda} k_{s\lambda} (\vec{R} \cdot \vec{E})^n S_{\lambda(\text{plas})}$	$L_{\text{spé}\lambda} = L_{s\lambda} k_{s\lambda} (\vec{N} \cdot \vec{H})^n S_{\lambda(\text{plas})}$
<p>où <math>\vec{R} = \vec{d} + 2(\vec{L} \cdot \vec{N})\vec{N}</math> (selon la loi de la réflexion)</p>	<p>où <math>\vec{H} = \frac{\vec{E} + \vec{L}}{ \vec{E} + \vec{L} }</math></p>

où  $L_{\text{spé}\lambda}$  : Luminosité spéculaire de couleur  $\lambda$ .

$L_{s\lambda}$  : Intensité de la lumière spéculaire de couleur  $\lambda$  ( $L_{s\lambda} \in [0..1]$ ).

$k_{s\lambda}$  : Constante de réflexion spéculaire de la surface de couleur  $\lambda$  ( $k_{s\lambda} \in [0..1]$ ).

$\vec{L}$  : Vecteur lumière orienté du point de diffusion vers la source de lumière ( $|\vec{L}| = 1, \vec{L} = -\vec{d}$ ).

$\vec{E}$  : Orientation de la lumière se dirigeant vers l'œil ( $|\vec{E}| = 1, \vec{E} = -\vec{v}$ ).

$\vec{R}$  : Orientation de la lumière réfléchi par la surface selon la loi de la réflexion ( $|\vec{R}| = 1$ ).

$\vec{N}$  : Normale à la surface du point de diffusion ( $|\vec{N}| = 1$ ).

$\vec{H}$  : Vecteur bissecteur entre  $\vec{L}$  et  $\vec{E}$  ( $|\vec{H}| = 1$ ).

$p$  : Portion de la réflexion plastique de la surface ( $p \in [0..1]$ ).

$n$  : Rugosité de la surface ( $n = 1$  : surface rugueuse,  $n \rightarrow \infty$  : miroir) ( $n \in [1.. \infty]$ ).

$S_{\lambda}$  : Couleur de base de la surface de canal  $\lambda$  ( $S_{\lambda} \in [0..1]$ ).

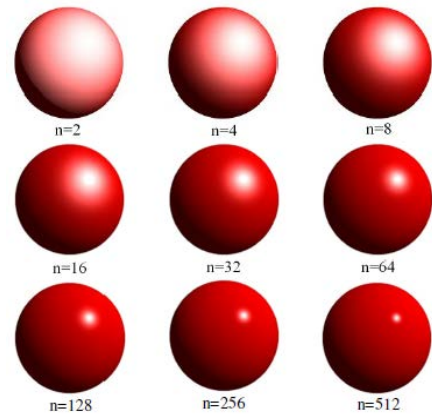
$S_{\lambda(\text{plas})}$  : Couleur spéculaire sous l'effet plastique du matériel ( $S_{\lambda(\text{plas})} = (1 - p)S_{\lambda} + p$ ).

Au niveau de la rugosité de la surface, plus  $n$  est élevée, moins le *highlight* sera diffus (voir image ci-contre).

Il est important de préciser que la **luminosité spéculaire**  $L_{spé}$  ne peut **pas être négative** (une source de lumière ne retire pas d'éclairage). Ainsi, il faut satisfaire la contrainte suivante :

$$\vec{R} \cdot \vec{E} < 0 \quad \text{ou} \quad \vec{N} \cdot \vec{H} < 0$$

$$\Rightarrow L_{dif} = 0$$



[http://www.iro.umontreal.ca/~dift3355/notes/05\\_illumination.pdf](http://www.iro.umontreal.ca/~dift3355/notes/05_illumination.pdf)

Réflexion spéculaire de Phong sur un plastique (réflexion dont la couleur est celle de la lumière).

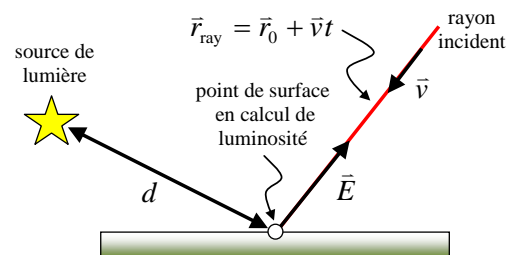
Si l'on utilise la **notation en triplet** avec une constante de réflexion spéculaire  $k_s$  unique pour les trois canaux de couleur  $\lambda$ , nous avons (pour la réflexion spéculaire de *Blinn*)

$$\ddot{L}_{spé} = \begin{cases} \ddot{L}_s (\vec{N} \cdot \vec{H})^n \ddot{S}_s & \text{si } \vec{N} \cdot \vec{H} > 0 \\ 0 & \text{si } \vec{N} \cdot \vec{H} < 0 \end{cases} \quad \text{où } \ddot{S}_s = k_s ((1-p)\ddot{S} + p\ddot{I}) \quad \text{avec } \ddot{I} = (1.0, 1.0, 1.0)$$

## Atténuation de la lumière en fonction de la distance

Une source de lumière peut réduire sa contribution à la luminosité en fonction de sa distance  $d$  avec le point de diffusion. L'atténuation peut être **constante**, **linéaire** et même **quadratique** (pour simuler une source ponctuelle).

On peut évaluer l'effet de l'atténuation  $A$  de la lumière grâce à l'équation suivante :



$$A = \frac{1}{C_{const} + C_{liné}d + C_{quad}d^2}$$

où  $A$  : Facteur d'atténuation de la lumière.

$C_{const}$  : Constante d'atténuation à taux constant de la lumière ( $C_{const} \geq 0$ ).

$C_{liné}$  : Constante d'atténuation à taux linéaire de la lumière ( $C_{liné} \geq 0$ ).

$C_{quad}$  : Constante d'atténuation à taux quadratique de la lumière ( $C_{quad} \geq 0$ ).

$d$  : Distance entre la source de lumière et le point de surface.

**N.B.** Idéalement, le facteur d'atténuation doit toujours respecter  $A \leq 1$  afin que la luminosité maximale ne dépasse pas celle de la source elle-même étant  $\ddot{L}$ . Cependant, cette condition peut être difficile à respecter lorsque  $d < 1$ . Il faudra alors bien choisir l'algorithme de normalisation<sup>2</sup> des couleurs afin d'obtenir le résultat désiré.

<sup>2</sup> Ce sujet a été discuté dans le chapitre 6.3.

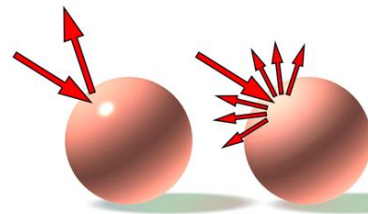
## Équation de la luminosité directe du pixel à plusieurs sources de lumière

Lorsqu'il faut additionner la contribution de plusieurs sources de lumière à la luminosité d'un pixel  $L_{\text{pixel}\lambda}$  de canal de couleur  $\lambda$ , il faut itérer sur l'ensemble des sources et faire l'addition de la contribution diffuse et spéculaire en n'oubliant pas d'ajouter la contribution ambiante qu'une seule fois :

$$L_{\text{pixel}\lambda} = L_{\text{amb}\lambda} + L_{\text{diff}\lambda} + L_{\text{spé}\lambda}$$

$$= L_{\text{a}\lambda} k_{\text{a}\lambda} S_{\lambda} + \sum_{i=1}^N A_i \left[ L_{\text{d}\lambda i} k_{\text{d}\lambda} (\vec{N} \cdot \vec{L}_i) S_{\lambda} + L_{\text{s}\lambda i} k_{\text{s}\lambda} (\vec{N} \cdot \vec{H}_i)^n S_{\lambda(\text{plas})} \right]$$

où l'indice  $i$  représente l'indentification des sources de lumières pouvant contribuer à la luminosité (retirer les sources dans l'ombre où celle trop loin) avec les variables particulières qui en découlent ( $A_i, L_{\text{d}\lambda i}, L_{\text{s}\lambda i}, \vec{L}_i, \vec{H}_i$ ).



Comparaison entre une réflexion spéculaire et une réflexion diffuse.









# Chapitre 6.4b – L'illumination avancée dans un ray tracer

## La source de lumière directionnelle

La source de lumière directionnelle représente une source de lumière ayant une orientation unique dans l'ensemble de la scène sans être localisable dans la scène. Ce type d'éclairage simule d'une certaine façon la lumière du Soleil.

Sans effet d'ombrage, la source de lumière directionnelle  $\ddot{L}_{directionnelle}$  sera égale à l'expression suivante :

$$\ddot{L}_{directionnelle} = \begin{cases} \ddot{L} & \text{si } \vec{N} \cdot \vec{L} > 0 \\ 0 & \text{si } \vec{N} \cdot \vec{L} < 0 \end{cases}$$

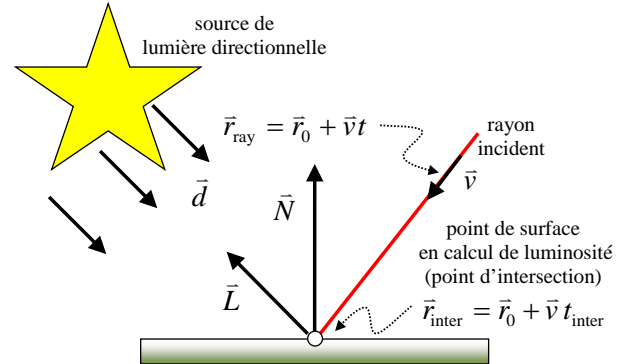
tel que

$$\vec{d} \text{ est constant et } \vec{L} = -\vec{d}$$

où  $\vec{L}$  : Vecteur lumière orienté du point de diffusion vers la source de lumière ( $\|\vec{L}\| = 1$ ).

$\vec{N}$  : Normale à la surface du point de diffusion ( $\|\vec{N}\| = 1$ ).

$\ddot{L}$  : La couleur de la source de lumière.



## La source de lumière ponctuelle

La source de lumière ponctuelle représente une source de lumière ayant une orientation pointant vers le point d'éclairage. Ce type d'éclairage simule d'une certaine façon une ampoule ponctuelle (de taille négligeable).

Sans effet d'ombrage, la source de lumière ponctuelle  $\ddot{L}_{ponctuelle}$  sera égale à l'expression suivante :

$$\ddot{L}_{ponctuelle} = \begin{cases} \ddot{L} & \text{si } \vec{N} \cdot \vec{L} > 0 \\ 0 & \text{si } \vec{N} \cdot \vec{L} < 0 \end{cases}$$

tel que

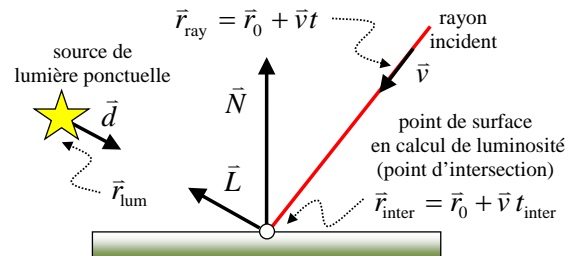
$$\vec{d} = \frac{\vec{r}_{inter} - \vec{r}_{lum}}{\|\vec{r}_{inter} - \vec{r}_{lum}\|} \text{ et } \vec{L} = -\vec{d}$$

où  $\vec{r}_{lum}$  : Position de la lumière ponctuelle.

$\vec{r}_{inter}$  : Position de l'intersection sur la géométrie ( $\vec{r}_{inter} = \vec{r}_0 + \vec{v}t_{inter}$ ).

$\vec{N}$  : Normale à la surface du point de diffusion ( $\|\vec{N}\| = 1$ ).

$\ddot{L}$  : La couleur de la source de lumière.



## La source de lumière ponctuelle orientée

La source de lumière ponctuelle orientée représente une source de lumière ayant une localisation et une orientation de préférence. Ce type d'éclairage simule d'une certaine façon un « spotlight » ponctuel.

Sans effet d'ombrage, la source de lumière « spotlight »  $\ddot{L}_{\text{spotlight}}$  sera égale à l'expression suivante :

$$\ddot{L}_{\text{spotlight}} = \begin{cases} C_{\text{att}} \ddot{L} & \text{si } \vec{N} \cdot \vec{L} > 0 \text{ et } \vec{o} \cdot \vec{d} > \cos(\theta/2) \\ 0 & \text{si } \vec{N} \cdot \vec{L} < 0 \text{ ou } \vec{o} \cdot \vec{d} < \cos(\theta/2) \end{cases}$$

tel que

$$\vec{d} = \frac{\vec{r}_{\text{inter}} - \vec{r}_{\text{lum}}}{\|\vec{r}_{\text{inter}} - \vec{r}_{\text{lum}}\|} \text{ et } \vec{d} = -\vec{L}$$

où  $\vec{r}_{\text{lum}}$  : Position de la lumière ponctuelle.

$\vec{r}_{\text{inter}}$  : Position de l'intersection sur la géométrie ( $\vec{r}_{\text{inter}} = \vec{r}_0 + \vec{v}t_{\text{inter}}$ ).

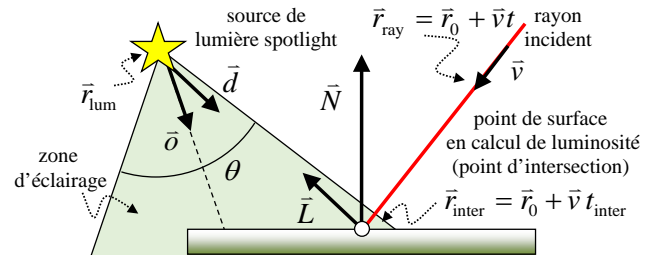
$\vec{N}$  : Normale à la surface du point de diffusion ( $\|\vec{N}\| = 1$ ).

$\vec{o}$  : Orientation centrale de la source de lumière ( $\|\vec{o}\| = 1$ ).

$\theta$  : Angle d'ouverture de la source de lumière ( $\theta \in [0^\circ, 180^\circ]$ )

$\ddot{L}$  : La couleur de la source de lumière.

$C_{\text{att}}$  : Constante d'atténuation ( $C_{\text{att}} \in [0, 1]$ )



Le facteur  $C_{\text{att}}$  représente un facteur d'atténuation permettant de moduler l'éclairage en fonction du positionnement dans la zone d'éclairage. Voici l'interprétation de la constante :

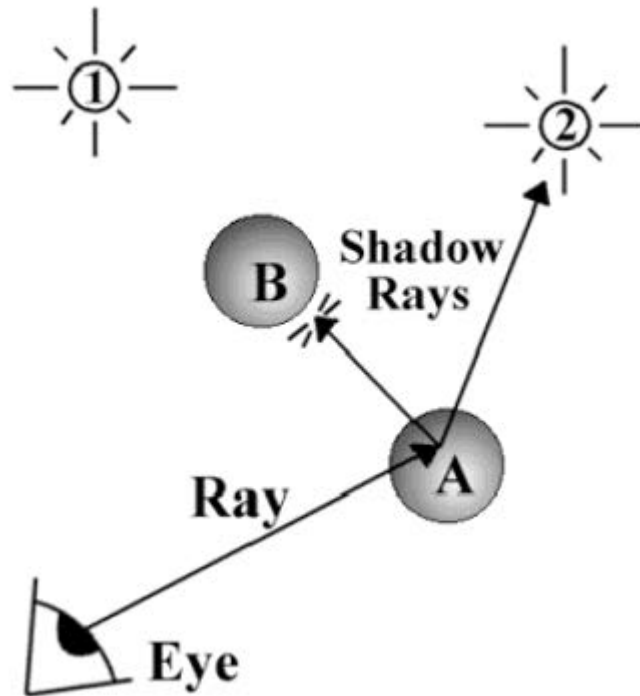
$$C_{\text{att}} = 0 : \text{atténuation complète} \quad C_{\text{att}} = 1 : \text{sans atténuation.}$$

Il existe plusieurs modèles mathématiques pour représenter ce facteur d'atténuation. Par exemple, en utilisant une interpolation linéaire, nous pouvons formuler l'expression suivante :

$$C_{\text{att}} = \vec{o} \cdot \vec{d} (1 - f) + f$$

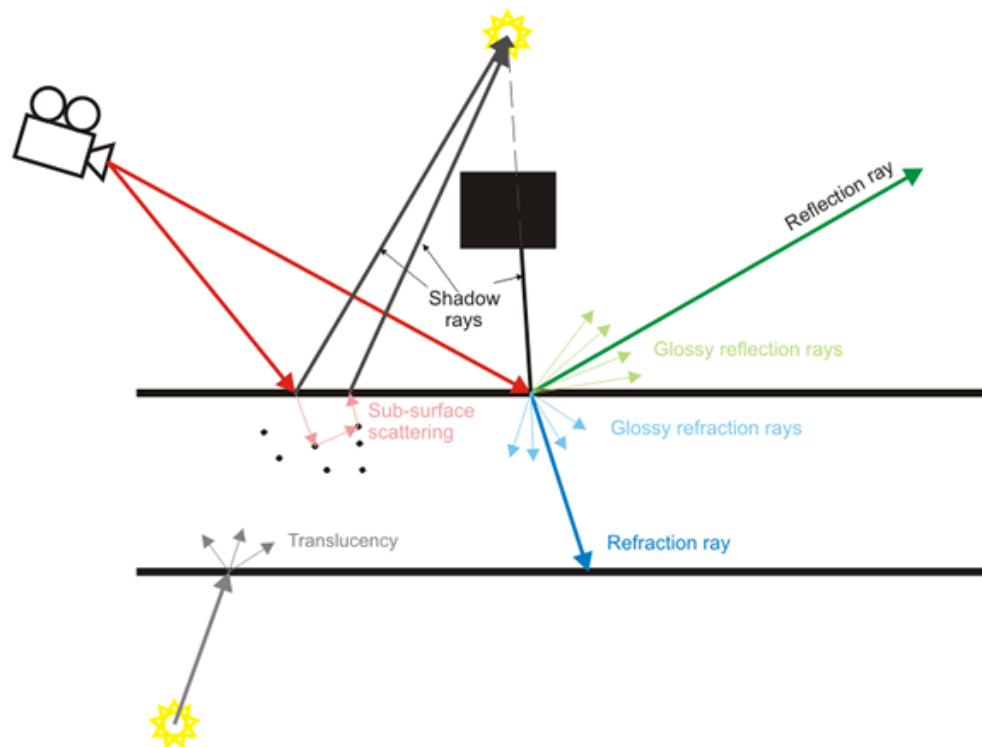
où  $f \in [0, 1]$  représente le facteur de lumière restant en périphérie de la zone d'éclairage.

## Le rayon d'ombre



[http://web.cse.ohio-state.edu/~shen.94/681/Site/Slides\\_files/shadow.pdf](http://web.cse.ohio-state.edu/~shen.94/681/Site/Slides_files/shadow.pdf)

## Illumination indirecte



<https://docs.chaosgroup.com/display/VRAY3SOFTIMAGE/Basic+Ray+Tracing>









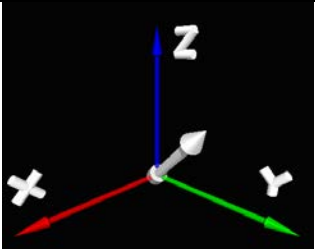




# Chapitre 6.5 – Les matrices de transformation dans le *ray tracer*

## Le vecteur à 4 dimensions dans un *ray tracer*

Pour bien représenter la position d'un point en trois dimensions, il faut utiliser trois coordonnées. En coordonnée cartésienne, la position  $\vec{r}$  d'un point par rapport à l'origine du système d'axe  $xyz$  correspond aux représentations suivantes :

Vectorielle algébrique	Vectorielle colonne	Visualisation
$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$	$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$	

Pour des raisons calculatoires, il sera intéressant de représenter le même concept en vecteur à quatre dimensions puisque nous allons effectuer des modifications à nos vecteurs à l'aide du produit matriciel et une représentation matricielle en format  $4 \times 4$  sera plus polyvalente lors de nos calculs.

Ainsi, nous devons faire correspondre un vecteur 3d sous la forme d'un vecteur 4d à l'aide de la définition suivante :

Vecteur colonne 3d	Vecteur colonne 4d
$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$	$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$

Afin de nous permettre d'effectuer des transformations d'homothétie (changement d'échelle, *scaling* en anglais), de rotation et de translation sur nos vecteurs en utilisant strictement une série de multiplication matricielle de format  $4 \times 4$ , l'introduction de la 4<sup>ième</sup> composante<sup>1</sup> égale à « 1 » sera nécessaire. Ce type de choix a été implémenté dans toutes les cartes graphiques afin d'uniformiser les calculs accélérant ainsi l'affichage d'image à l'écran.

## La convention du produit entre une matrice et un vecteur

Puisque le produit entre une matrice  $M$  et un vecteur  $\vec{u}$  n'est pas commutatif ( $M\vec{u} \neq \vec{u}^T M$ ), il faut choisir une convention lors de ces multiplications. Ces notes de cours proposeront l'usage de la convention droite-gauche suivante

$$\vec{v} = M\vec{u} \quad \text{où } \vec{u} \text{ est le vecteur à transformer et } \vec{v} \text{ est le vecteur transformé par } M.$$

<sup>1</sup> Ce choix permettra d'inclure la translation dans le produit des matrices.

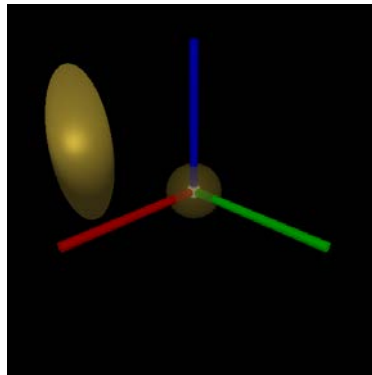
## L'usage de la matrice $4 \times 4$ dans le *ray tracer*

Une matrice  $4 \times 4$   $M$  composé des valeurs  $M_{ij}$  tel que  $i$  correspond au numéro de la ligne et  $j$  correspond au numéro de la colonne de l'élément de matrice  $M$  est représentée sous la forme

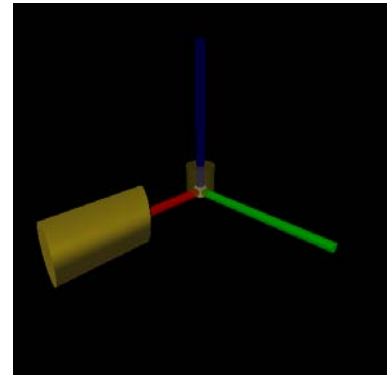
$$M = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} .$$

Cependant, le début de la numérotation dépend habituellement de la discipline qui en fait l'usage. En mathématique, on début traditionnellement par la composante  $m_{11}$ , mais en informatique, on débute avec la composante  $m_{00}$  puisque l'adressage d'un tableau débute avec l'adresse « 0 » (exemple : `tab[0]`).

Dans le *ray tracer*, nous utiliserons ces matrices pour transformer la représentation mathématique d'une géométrie afin de la déplacer (translation), de la faire tourner autour d'un axe (rotation) et de la déformer (homothétie) dans l'espace de la scène. Par exemple, savoir résoudre l'intersection d'un rayon avec une sphère et utiliser ces matrices de transformation permettra de visualiser des sphères déformée.



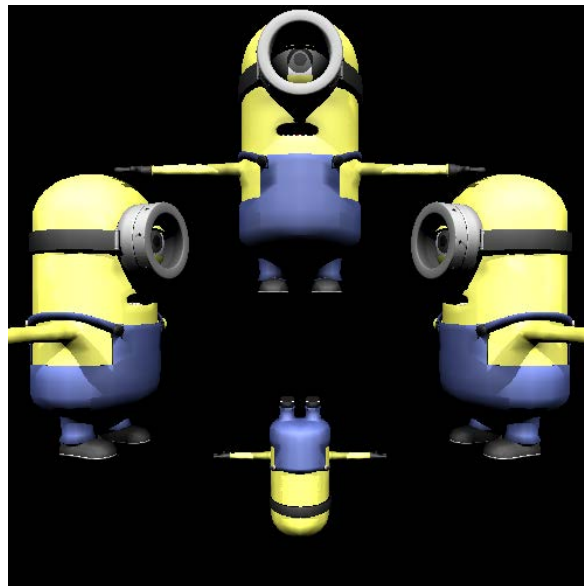
Sphère unitaire déformée en  $x$  et  $z$  et déplacée en  $x$  et  $z$ .



Cylindre unitaire déformée en  $x$ ,  $y$  et  $z$ , tourné de  $90^\circ$  selon l'axe  $y$  et déplacé en  $x$ .

De plus, un artiste peut réaliser un modèle 3d comportant un très grand nombre de points regroupés afin de former plusieurs triangles et l'usage des matrices de transformation permettra de copier le modèles 3d à différents endroits, de les tourner et de les déformer sans avoir à modifier la définition du modèle.

C'est un avantage considérable quand on pense qu'un modèle complexe peut être composé de plus de 25 000 triangles et qu'il requière plusieurs heures de travail à un artiste.



Le modèle 3d comprenant 29 014 triangles a été transformé à quatre reprises.

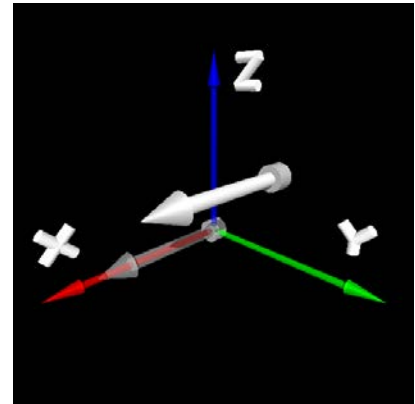
## La matrice de translation

La matrice de translation  $Tr$  est la matrice de transformation affine permettant de déplacer un point dans un système d'axe  $xyz$ . Appliquée à une forme géométrique, elle sera alors déplacée tout en conservant son orientation.

En coordonnée cartésienne  $xyz$ , les paramètres de translation  $tr_x$ ,  $tr_y$  et  $tr_z$  se retrouvent dans la 4<sup>ième</sup> colonne de la matrice et elle est construite de la façon suivante :

$$Tr = Tr(tr_x, tr_y, tr_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & tr_x \\ 0 & 1 & 0 & tr_y \\ 0 & 0 & 1 & tr_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où  $Tr$  : Matrice de translation.  $tr_x$  : Translation selon l'axe  $x$ .  
 $tr_y$  : Translation selon l'axe  $y$ .  $tr_z$  : Translation selon l'axe  $z$ .



La flèche a subi une translation en  $+y$  et  $+z$  tout en préservant son orientation

### Preuve :

À partir d'un vecteur position  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ , effectuons une translation à l'aide d'un produit matriciel avec la matrice  $Tr$  et identifions la position des paramètres  $tr_x$ ,  $tr_y$  et  $tr_z$  dans la matrice  $Tr$  afin de former un vecteur position  $\vec{r}_{trans} = (x + tr_x)\vec{i} + (y + tr_y)\vec{j} + (z + tr_z)\vec{k}$  qui correspond à la définition de notre translation du vecteur  $\vec{r}$  :

$$\vec{r}_{trans} = Tr \vec{r} \Rightarrow \begin{pmatrix} x + tr_x \\ y + tr_y \\ z + tr_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{Remplacer } \vec{r}, \vec{r}_{trans} \text{ et } Tr)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x + tr_x \\ y + tr_y \\ z + tr_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{00}x + m_{01}y + m_{02}z + m_{03} \\ m_{10}x + m_{11}y + m_{12}z + m_{13} \\ m_{20}x + m_{21}y + m_{22}z + m_{23} \\ m_{30} + m_{31} + m_{32} + m_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{Produit entre } Tr \text{ et } \vec{r})$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x + tr_x \\ y + tr_y \\ z + tr_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{00}x + m_{01}y + m_{02}z + m_{03} \\ m_{10}x + m_{11}y + m_{12}z + m_{13} \\ m_{20}x + m_{21}y + m_{22}z + m_{23} \\ m_{30} + m_{31} + m_{32} + m_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{Identifier les termes inutiles})$$

$$\Rightarrow Tr = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & tr_x \\ 0 & 1 & 0 & tr_y \\ 0 & 0 & 1 & tr_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \left\{ \begin{array}{l} m_{00} = m_{11} = m_{22} = m_{33} = 1 \\ m_{03} = tr_x, m_{13} = tr_y, m_{23} = tr_z \\ \text{autre} = 0 \end{array} \right\} \quad \blacksquare$$

**Situation A : La translation d'une sphère.** Une sphère de rayon  $R = 1$  est située à la position  $\vec{r}_{S0} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 0\vec{k}$  et subit une translation définie par le vecteur  $\vec{s} = -5\vec{i} - 2\vec{j}$ . Évaluez la position de la sphère  $\vec{r}_S$  après la translation en utilisant la matrice de translation pour effectuer le calcul.

À partir du vecteur  $\vec{s}$ , nous pouvons définir les paramètres de la matrice de translation :

$$\vec{s} = -5\vec{i} - 2\vec{j}$$

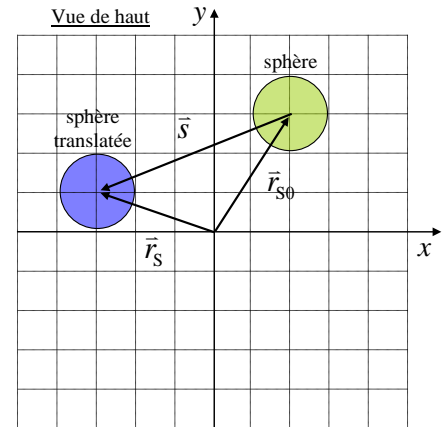
donc  $tr_x = -5$ ,  $tr_y = -2$  et  $tr_z = 0$

Appliquons le produit du vecteur  $\vec{r}_{S0}$  à la matrice  $Tr$  en utilisant un vecteur  $\vec{r}_S$  en 4 dimensions :

$$\vec{r}_S = Tr \vec{r}_{S0}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_S = \begin{pmatrix} 2+0+0-5 \\ 3+0+0-2 \\ 0+0+0+0 \\ 0+0+0+1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{r}_S = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{r}_S = -3\vec{i} + \vec{j}}$$



Représentation graphique de la translation de la sphère.

## La matrice de translation appliquée à un vecteur orientation

Lorsque l'on transforme un **vecteur orientation**  $\vec{v}$  avec une matrice de translation  $Tr$ , il est important de **préserver** son **orientation** et son **module**. Puisqu'un vecteur orientation  $\vec{v}$  est toujours défini à l'aide de deux points dont l'un est l'origine, il faudra :

- 1) Transformer l'origine tel que  $\vec{r}_{Otrans} = Tr \vec{r}_O$  et  $\vec{r}_O = 0$ .

Ce calcul donne le résultat

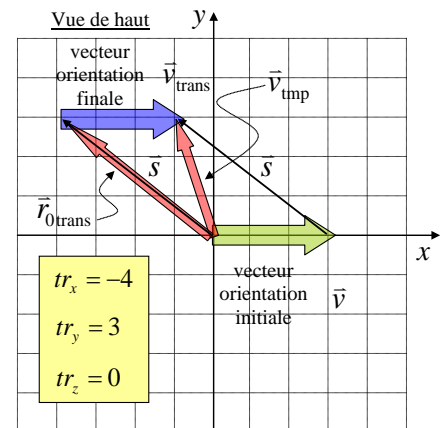
$$\vec{r}_{Otrans} = tr_x \vec{i} + tr_y \vec{j} + tr_z \vec{k} .$$

- 2) Transformer l'orientation initiale  $\vec{v}$  du vecteur orientation en vecteur temporaire tel que

$$\vec{v}_{tmp} = Tr \vec{v} .$$

- 3) L'orientation du vecteur transformé  $\vec{v}_{trans}$  sera égale à l'expression  $\vec{v}_{trans} = \vec{v}_{tmp} - \vec{r}_{Otrans}$  ce qui correspond au calcul

$$\vec{v}_{trans} = Tr \vec{v} - Tr \vec{r}_O .$$



Représentation d'un vecteur orientation en vert traduit et représenté en bleu (deux points) dont la construction nécessite la présence d'un vecteur orientation temporaire et d'un origine traduit représenté en rouge.

# La matrice d'homothétie

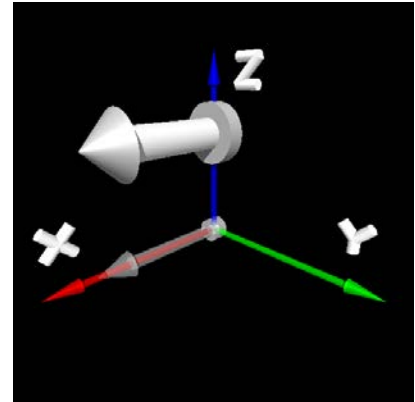
La matrice d'homothétie  $Sc$  est la matrice de transformation linéaire permettant de déformer les dimensions d'un système d'axe. Appliquée à une forme géométrique, elle sera agrandie ou rétrécie.

En coordonnées cartésiennes  $xyz$ , les paramètres de déformation  $sc_x$ ,  $sc_y$  et  $sc_z$  se retrouvent sur la diagonale de la matrice  $Sc$  et elle est construite de la façon suivante :

$$Sc = Sc(sc_x, sc_y, sc_z) = \begin{pmatrix} sc_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sc_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sc_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où  $Sc$  : Matrice d'homothétie.  
 $sc_y$  : Déformation selon l'axe  $y$ .

$sc_x$  : Déformation selon l'axe  $x$ .  
 $sc_z$  : Déformation selon l'axe  $z$ .



La flèche a subi un agrandissement en  $y$  et  $z$  suivit d'une translation en  $z$ .

## Preuve :

À partir d'un vecteur position  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ , effectuons une homothétie à l'aide d'un produit matriciel avec la matrice  $Sc$  et identifions la position des paramètres  $sc_x$ ,  $sc_y$  et  $sc_z$  dans la matrice  $Sc$  afin de former un vecteur position  $\vec{r}_{\text{homo}} = (sc_x x)\vec{i} + (sc_y y)\vec{j} + (sc_z z)\vec{k}$  qui correspond à la définition de notre homothétie du vecteur  $\vec{r}$  :

$$\vec{r}_{\text{homo}} = Sc \vec{r} \Rightarrow \begin{pmatrix} sc_x x \\ sc_y y \\ sc_z z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{Remplacer } \vec{r}, \vec{r}_{\text{homo}} \text{ et } Sc)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} sc_x x \\ sc_y y \\ sc_z z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{00}x + m_{01}y + m_{02}z + m_{03} \\ m_{10}x + m_{11}y + m_{12}z + m_{13} \\ m_{20}x + m_{21}y + m_{22}z + m_{23} \\ m_{30} + m_{31} + m_{32} + m_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{Produit entre } Sc \text{ et } \vec{r})$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} sc_x x \\ sc_y y \\ sc_z z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{00}x + \cancel{m_{01}y} + \cancel{m_{02}z} + \cancel{m_{03}} \\ \cancel{m_{10}x} + m_{11}y + \cancel{m_{12}z} + \cancel{m_{13}} \\ \cancel{m_{20}x} + \cancel{m_{21}y} + m_{22}z + \cancel{m_{23}} \\ \cancel{m_{30}} + \cancel{m_{31}} + \cancel{m_{32}} + m_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{Identifier les termes inutiles})$$

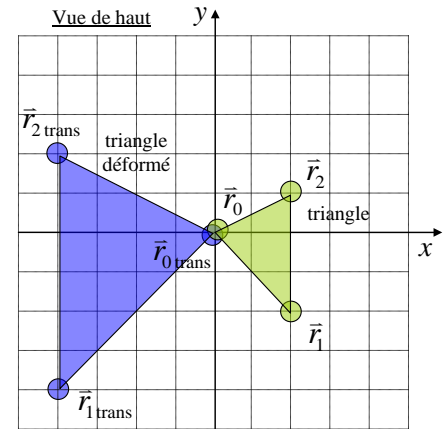
$$\Rightarrow Sc = \begin{pmatrix} sc_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sc_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sc_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \left\{ \begin{array}{l} m_{00} = sc_x, m_{11} = sc_y, m_{22} = sc_z \\ m_{33} = 1 \\ \text{autre} = 0 \end{array} \right\} \quad \blacksquare$$

**Situation B : L'homothétie sur un triangle.** Un triangle est construit à l'aides des trois vecteurs positions  $\vec{r}_0 = 0$ ,  $\vec{r}_1 = 2\vec{i} - 2\vec{j}$  et  $\vec{r}_2 = 2\vec{i} + 1\vec{j}$ . Évaluez la forme du triangle après avoir subit une homothétie définie par  $sc_x = -2$ ,  $sc_y = 2$  et  $sc_z = 1$ .

À partir de nos paramètres décrivant la matrice d'homothétie, nous obtenons la matrice

$$Sc = \begin{pmatrix} sc_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sc_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sc_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Appliquons le produit des vecteurs  $\vec{r}_0$ ,  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  à la matrice  $Sc$  en utilisant des vecteurs à 4 dimensions :



$$\bullet \quad \vec{r}_{0\text{trans}} = Sr \vec{r}_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_{0\text{trans}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_{0\text{trans}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{r}_{1\text{trans}} = Sr \vec{r}_1 \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_{1\text{trans}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_{1\text{trans}} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{r}_{2\text{trans}} = Sr \vec{r}_2 \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_{2\text{trans}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_{2\text{trans}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

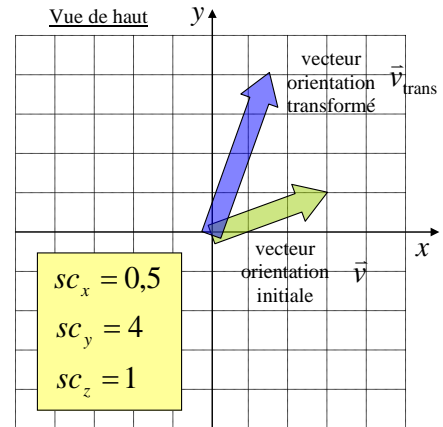
## La matrice d'homothétie appliquée à un vecteur orientation

Lorsque l'on transforme un **vecteur orientation**  $\vec{v}$  avec une matrice de d'homothétie  $Sc$ , **l'orientation** ainsi que son **module** seront **changés**. Bien qu'un vecteur orientation soit constitué de deux points dont un situé à l'origine, l'homothétie n'a pas d'effet sur un point à l'origine car

$$\vec{r}_O = Sc \vec{r}_O \text{ si } \vec{r}_O = 0.$$

Ainsi, le résultat de la transformation du vecteur orientation  $\vec{v}$  est directement égal au calcul

$$\vec{v}_{\text{trans}} = Sc \vec{v} .$$



Représentation d'un vecteur orientation vert ayant subi une transformation d'homothétie représenté en bleu.

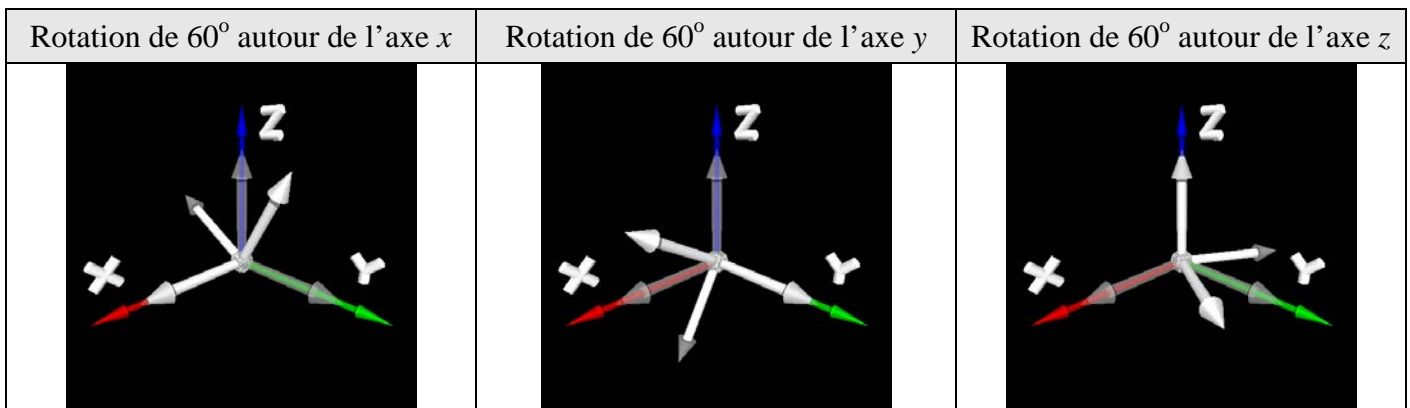
## La rotation autour d'un axe x, y et z

Pour définir des matrices de rotation autour des axes  $x$ ,  $y$  et  $z$ , nous devons utiliser trois angles de rotation  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  et  $\theta_z$ . La construction de ces matrices de rotation  $R$  nécessite les fonctions trigonométriques cosinus et sinus. Afin d'alléger l'écriture, nous allons utiliser les expressions suivantes :

Rotation autour de l'axe $x$ avec un angle $\theta_x$	Autour de l'axe $y$ avec un angle $\theta_y$	Autour de l'axe $z$ avec un angle $\theta_z$
$c_x = \cos(\theta_x)$	$c_y = \cos(\theta_y)$	$c_z = \cos(\theta_z)$
$s_x = \sin(\theta_x)$	$s_y = \sin(\theta_y)$	$s_z = \sin(\theta_z)$

## La matrice de rotation autour de l'axe x, y et z

Les matrices de rotation  $R_x$ ,  $R_y$  et  $R_z$  autour des axes  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont des matrices de transformation linéaire permettant de tourner un vecteur position ou une forme géométrique autour des axes d'un système d'axe  $xyz$ .



Les paramètres  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  et  $\theta_z$  caractérisent successivement les matrices de rotations  $R_x$ ,  $R_y$  et  $R_z$  et déterminent les angles de rotation autour des axes. Un angle  $\theta = 360^\circ$  (ou  $2\pi$  radians) ne procure aucun changement :

Axe de rotation	Matrice de rotation (forme détaillée)	Matrice de rotation (forme compacte)
$x$ (plan $yz$ )	$R_x = R_x(\theta_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_x) & -\sin(\theta_x) & 0 \\ 0 & \sin(\theta_x) & \cos(\theta_x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$R_x = R_x(\theta_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_x & -s_x & 0 \\ 0 & s_x & c_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$y$ (plan $xz$ )	$R_y = R_y(\theta_y) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_y) & 0 & \sin(\theta_y) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta_y) & 0 & \cos(\theta_y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$R_y = R_y(\theta_y) = \begin{pmatrix} c_y & 0 & s_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_y & 0 & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$z$ (plan $xy$ )	$R_z = R_z(\theta_z) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_z) & -\sin(\theta_z) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_z) & \cos(\theta_z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$R_z = R_z(\theta_z) = \begin{pmatrix} c_z & -s_z & 0 & 0 \\ s_z & c_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Preuve : (selon l'axe  $z$ )

À partir d'un vecteur position  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ , réécrivons le sous une forme polaire dans le plan  $xy$  tel que

$$\vec{r} = R \cos(\theta_0)\vec{i} + R \sin(\theta_0)\vec{j} + z\vec{k} \quad \text{où} \quad R = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \theta_0 = \arctan(y/x).$$

Si on fait tourner ce vecteur d'un angle  $\theta_z$  autour de l'axe  $z$  afin de satisfaire notre définition de rotation autour de l'axe  $z$ , nous obtenons alors le vecteur

$$\vec{r}_{\text{rot } z} = R \cos(\theta_0 + \theta_z)\vec{i} + R \sin(\theta_0 + \theta_z)\vec{j} + z\vec{k}.$$

Avec les identités trigonométriques

$$\cos(\theta + \phi) = \cos(\theta) \cdot \cos(\phi) - \sin(\theta) \cdot \sin(\phi) \quad \text{et} \quad \sin(\theta + \phi) = \sin(\theta) \cdot \cos(\phi) + \cos(\theta) \cdot \sin(\phi),$$

nous pouvons réécrire notre vecteur  $\vec{r}_{\text{rot } z}$  sous la forme compacte suivante :

$$\vec{r}_{\text{rot } z} = \begin{pmatrix} R \cos(\theta_0 + \theta_z) \\ R \sin(\theta_0 + \theta_z) \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(\cos(\theta_0) \cdot \cos(\theta_z) - \sin(\theta_0) \cdot \sin(\theta_z)) \\ R(\sin(\theta_0) \cdot \cos(\theta_z) + \cos(\theta_0) \cdot \sin(\theta_z)) \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(c_0 c_z - s_0 s_z) \\ R(s_0 c_z + c_0 s_z) \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$



À partir du vecteur position  $\vec{r}$ , effectuons une rotation autour de l'axe  $z$  (dans le plan  $xy$ ) à l'aide d'un produit matriciel avec la matrice  $R_z$  et identifions la position des paramètres  $\theta_z$  sous la forme des équations trigonométriques  $c_z = \cos(\theta_z)$  et  $s_z = \sin(\theta_z)$  dans la matrice  $R_z$  afin de former le vecteur position  $\vec{r}_{\text{rot } z}$  qui correspond à la définition de notre rotation du vecteur  $\vec{r}$  :

$$\begin{aligned} \vec{r}_{\text{rot } z} = R_z \vec{r} &\Rightarrow \begin{pmatrix} R(c_0 c_z - s_0 s_z) \\ R(s_0 c_z + c_0 s_z) \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} R(c_0 c_z - s_0 s_z) \\ R(s_0 c_z + c_0 s_z) \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{00}x + m_{01}y + m_{02}z + m_{03} \\ m_{10}x + m_{11}y + m_{12}z + m_{13} \\ m_{20}x + m_{21}y + m_{22}z + m_{23} \\ m_{30} + m_{31} + m_{32} + m_{33} \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} R c_0 c_z - R s_0 s_z \\ R s_0 c_z + R c_0 s_z \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{00}R c_0 + m_{01}R s_0 + m_{02}z + m_{03} \\ m_{10}R c_0 + m_{11}R s_0 + m_{12}z + m_{13} \\ m_{20}R c_0 + m_{21}R s_0 + m_{22}z + m_{23} \\ m_{30} + m_{31} + m_{32} + m_{33} \end{pmatrix} \quad \left( \begin{array}{l} x = R \cos(\theta_0) = R c_0 \\ y = R \sin(\theta_0) = R s_0 \end{array} \right) \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} R c_0 c_z - R s_0 s_z \\ R s_0 c_z + R c_0 s_z \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{00}R c_0 + m_{01}R s_0 + \cancel{m_{02}z} + \cancel{m_{03}} \\ m_{10}R c_0 + m_{11}R s_0 + \cancel{m_{12}z} + \cancel{m_{13}} \\ \cancel{m_{20}}R c_0 + \cancel{m_{21}}R s_0 + m_{22}z + \cancel{m_{23}} \\ \cancel{m_{30}} + \cancel{m_{31}} + \cancel{m_{32}} + m_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{Iden. les termes inutiles}) \\ &\Rightarrow R_z = R_z(\theta_z) = \begin{pmatrix} c_z & -s_z & 0 & 0 \\ s_z & c_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \left\{ \begin{array}{l} m_{00} = c_z, m_{01} = -s_z \\ m_{10} = s_z, m_{11} = c_z \\ m_{22} = m_{33} = 1 \\ \text{autre} = 0 \end{array} \right. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

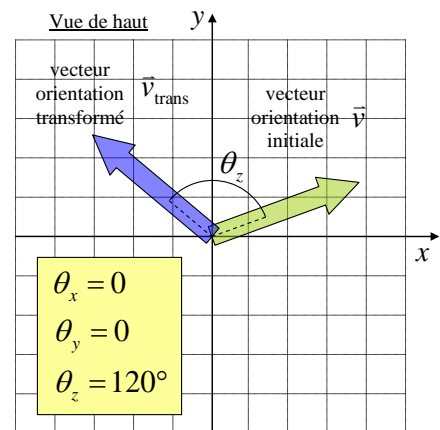
## La matrice de rotation appliquée à un vecteur orientation

Lorsque l'on transforme un **vecteur orientation**  $\vec{v}$  avec une matrice de rotation  $R$  selon  $x$ ,  $y$  ou  $z$ , seule **l'orientation** sera **changée**. (pas le module). Bien qu'un vecteur orientation soit constitué de deux points dont un situé à l'origine, la rotation n'a pas d'effet sur un point à l'origine car

$$\vec{r}_O = R \vec{r}_O \quad \text{si} \quad \vec{r}_O = 0 \quad .$$

Ainsi, le résultat de la transformation du vecteur orientation  $\vec{v}$  est directement égal aux calculs suivant :

$$\vec{v}_{\text{trans}} = R \vec{v} \quad .$$



Représentation d'un vecteur orientation vert ayant subi une rotation selon l'axe  $z$  et représenté en bleu.

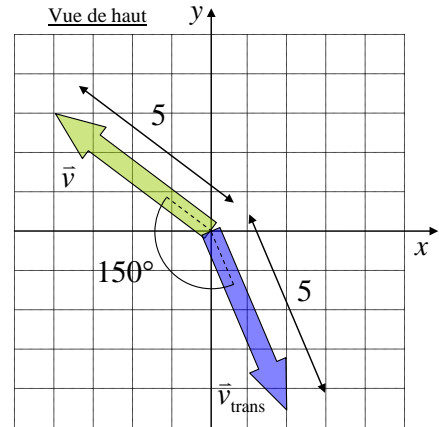
**Situation C : La rotation d'un vecteur orientation autour de l'axe z.** Un vecteur orientation  $\vec{v} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$  subit une rotation autour de l'axe z de  $150^\circ$ . Évaluez (a) le vecteur orientation transformé  $\vec{v}_{\text{trans}}$ , (b) vérifiez que le module du vecteur demeure inchangé et (c) vérifiez que l'angle entre  $\vec{v}$  et  $\vec{v}_{\text{trans}}$  est bien de  $150^\circ$ .

À partir de nos paramètres décrivant la matrice de rotation autour de l'axe z, nous obtenons la matrice

$$R_z = R_z(\theta_z) = \begin{pmatrix} c_z & -s_z & 0 & 0 \\ s_z & c_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,866 & -0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & -0,866 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

car  $c_z = \cos(\theta_z) = \cos(150^\circ) = -0,866$

$s_z = \sin(\theta_z) = \sin(150^\circ) = 0,5$



a) Appliquons notre matrice de rotation à notre vecteur  $\vec{v}$  afin d'évaluer  $\vec{v}_{\text{trans}}$  :

$$\vec{v}_{\text{trans}} = R_z \vec{v} \Rightarrow \vec{v}_{\text{trans}} = \begin{pmatrix} -0,866 & -0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & -0,866 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{\text{trans}} = \begin{pmatrix} (-4)(-0,866) + (-0,5)(3) + (0)(0) + (0)(1) \\ (0,5)(-4) + (-0,866)(3) + (0)(0) + (0)(1) \\ (0)(-4) + (0)(3) + (1)(0) + (0)(1) \\ (0)(-4) + (0)(3) + (0)(0) + (1)(1) \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_{\text{trans}} = \begin{pmatrix} 1,964 \\ -4,598 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Évaluons le module de nos deux vecteurs orientations et vérifions qu'ils sont égaux :

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{(-4)^2 + (3)^2 + (0)^2} \Rightarrow |\vec{v}| = 5$$

$$|\vec{v}_{\text{trans}}| = \sqrt{v_{x\text{trans}}^2 + v_{y\text{trans}}^2 + v_{z\text{trans}}^2} \Rightarrow |\vec{v}_{\text{trans}}| = \sqrt{(1,964)^2 + (-4,598)^2 + (0)^2} \Rightarrow |\vec{v}_{\text{trans}}| = 5$$

c) Vérifions que l'angle entre nos deux vecteurs est de  $150^\circ$  à l'aide du produit scalaire et de la représentation de nos vecteurs en trois dimensions :

$$\vec{v} \cdot \vec{v}_{\text{trans}} = |\vec{v}| |\vec{v}_{\text{trans}}| \cos(\theta) \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}_{\text{trans}}}{|\vec{v}| |\vec{v}_{\text{trans}}|}$$

$$\Rightarrow \cos(\theta) = \frac{v_x v_{x\text{trans}} + v_y v_{y\text{trans}} + v_z v_{z\text{trans}}}{|\vec{v}| |\vec{v}_{\text{trans}}|}$$

$$\Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{(-4)(1,964) + (3)(-4,598) + (0)(0)}{(5)(5)}\right) \Rightarrow \theta = 150^\circ$$

## Les matrices de transformation inverse

Toutes les matrices de transformation  $M$  possèdent une matrice de transformation inverse  $M^{-1}$  permettant de retrouver les positions des vecteurs et les formes des géométries d'origine. Leur définition respect la propriété tel que

$$M M^{-1} = M^{-1} M = 1 \quad \text{où} \quad 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ est la matrice identité.}$$

En raison de leur forme, on peut toujours construire une matrice de transformation linéaire inverse  $M^{-1}$  à partir de la matrice de transformation linéaire  $M$  en changeant judicieusement les paramètres de la matrice  $M$ .

Matrice de transformation	Matrice de transformation inverse
$Tr = Tr(tr_x, tr_y, tr_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & tr_x \\ 0 & 1 & 0 & tr_y \\ 0 & 0 & 1 & tr_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$Tr^{-1} = Tr(-tr_x, -tr_y, -tr_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -tr_x \\ 0 & 1 & 0 & -tr_y \\ 0 & 0 & 1 & -tr_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$Sc = Sc(sc_x, sc_y, sc_z) = \begin{pmatrix} sc_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sc_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sc_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$Sc^{-1} = Sc\left(\frac{1}{sc_x}, \frac{1}{sc_y}, \frac{1}{sc_z}\right) = \begin{pmatrix} 1/sc_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/sc_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/sc_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$R_x = R_x(\theta_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_x) & -\sin(\theta_x) & 0 \\ 0 & \sin(\theta_x) & \cos(\theta_x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$R_x^{-1} = R_x(-\theta_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\theta_x) & -\sin(-\theta_x) & 0 \\ 0 & \sin(-\theta_x) & \cos(-\theta_x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$R_y = R_y(\theta_y) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_y) & 0 & \sin(\theta_y) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta_y) & 0 & \cos(\theta_y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$R_y^{-1} = R_y(-\theta_y) = \begin{pmatrix} \cos(-\theta_y) & 0 & \sin(-\theta_y) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-\theta_y) & 0 & \cos(-\theta_y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$R_z = R_z(\theta_z) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_z) & -\sin(\theta_z) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_z) & \cos(\theta_z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$R_z^{-1} = R_z(-\theta_z) = \begin{pmatrix} \cos(-\theta_z) & -\sin(-\theta_z) & 0 & 0 \\ \sin(-\theta_z) & \cos(-\theta_z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Preuve : Les preuves sont laissées en exercice au lecteur.













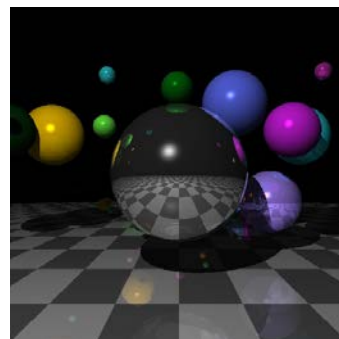
# Chapitre 6.6 – Les transformations dans le *ray tracer*

## L'espace monde et l'espace objet

L'**espace monde** est l'espace dans lequel la scène est définie. Ceci comprend la position et l'orientation de la **caméra** ainsi que la position et la forme des **géométries**. Une géométrie définie dans un autre espace devra être transformée préalablement vers l'espace monde avant qu'elle puisse être adéquatement visualisée.

En infographie, un artiste réalise toujours la construction d'un **modèle 3d** (ensemble de géométries) dans un espace propre au modèle. Cet espace porte le nom d'**espace objet**. Habituellement, le modèle est représenté dans le plan  $xy$  et il est centré avec l'origine.

Puisque les dimensions choisies par l'artiste ne coïncident pas toujours avec les dimensions requises en espace monde, il est important de transformer le modèle adéquatement. C'est pour cette raison que l'on applique des matrices de transformation comme l'**homothétie** (agrandir ou rétrécir), la **rotation** (tourner adéquatement) et la **translation** (positionnement adéquat) aux modèles 3d.



<http://mike.newgrounds.com/news/>

Scène comprenant plusieurs sphères unitaires transformées permettant à celles-ci d'être visualisées à différentes positions avec des rayons différents.



<http://www.deskeng.com/de/seeing-ray-tracing-in-a-different-light/>

Logiciel permettant à un artiste de construire un modèle 3d dans un espace objet.

## La transformation de l'espace objet vers l'espace monde

Puisque le produit matriciel n'est pas commutatif, il est important de choisir un ordre dans lequel nous allons transformer nos géométries. Puisque nos transformations linéaires sont définies par rapport à l'origine, nous allons choisir l'ordre<sup>1</sup> suivant :

1	2	3	4	5
Homothétie $Sc$	Rotation $R_x$	Rotation $R_y$	Rotation $R_z$	Translation $Tr$

En raison de notre convention<sup>2</sup> de notre produit entre nos matrices et nos vecteurs, nous devons transformer un vecteur  $\vec{r}_o$  dans l'espace objet en un vecteur  $\vec{r}_m$  dans l'espace monde à l'aide de l'expression

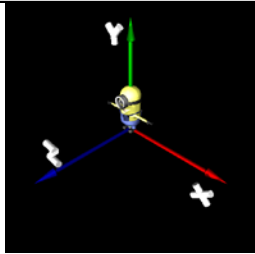
$$\vec{r}_m = M_{o \rightarrow m} \vec{r}_o \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_m = Tr \cdot R_z \cdot R_y \cdot R_x \cdot Sc \vec{r}_o$$

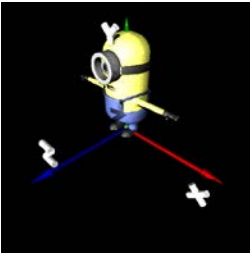
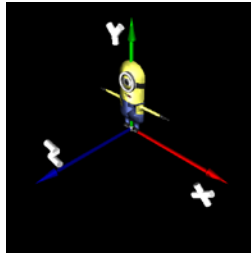
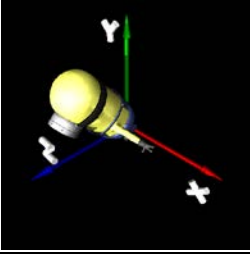
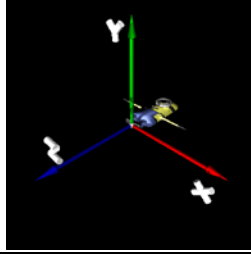
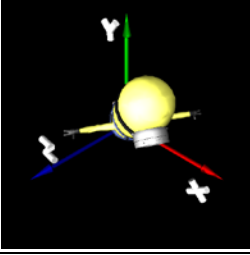
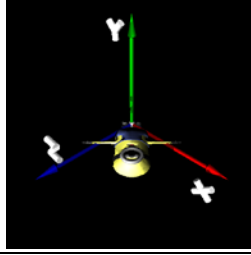
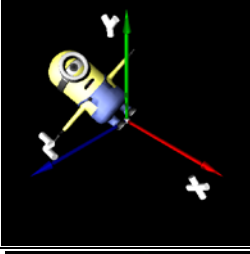
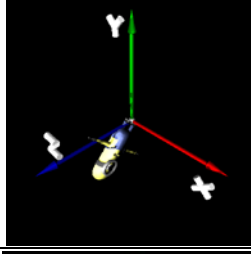
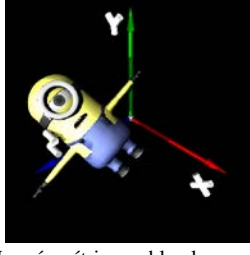
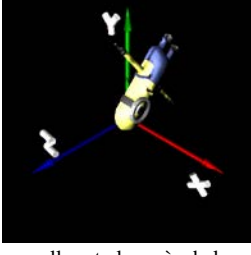
où  $M_{o \rightarrow m} = Tr \cdot R_z \cdot R_y \cdot R_x \cdot Sc$  est la matrice de transformation de l'espace objet vers l'espace monde.

<sup>1</sup> Cet ordre est traditionnel, mais il est possible de changer l'ordre des matrices de rotation.

<sup>2</sup> Convention droite-gauche :  $\vec{v} = M \vec{u}$

Exemple :

Dans l'espace monde		
<p>Caméra en position :</p> $\vec{r}_{\text{cam}} = 15\vec{i} + 15\vec{j} + 15\vec{k}$	<p>Position de l'observation :</p> $\vec{r}_{\text{regard}} = 0 \text{ (origine)}$	 <p>Géométrie unitaire visualisée dans l'espace monde sans transformation.</p>

Matrices de transformation		Visualisation dans l'espace monde après l'application des transformations	
1	<p>Homothétie <math>Sc</math></p> <p>Exemple de gauche : <math>Sc = (2,2,2)</math></p> <p>Exemple de droite : <math>Sc = (1.5, 1.5, 0.5)</math></p>		
2	<p>Rotation <math>R_x</math></p> <p>Exemple de gauche : <math>\theta_x = 45^\circ</math></p> <p>Exemple de droite : <math>\theta_x = -90^\circ</math></p>		
3	<p>Rotation <math>R_y</math></p> <p>Exemple de gauche : <math>\theta_y = 60^\circ</math></p> <p>Exemple de droite : <math>\theta_y = -135</math></p>		
4	<p>Rotation <math>R_z</math></p> <p>Exemple de gauche : <math>\theta_z = 90^\circ</math></p> <p>Exemple de droite : <math>\theta_z = -90^\circ</math></p>		
5	<p>Translation <math>Tr</math></p> <p>Exemple de gauche : <math>Tr = (5, 0, 5)</math></p> <p>Exemple de droite : <math>Tr = (5, 10, 0)</math></p>		

P.S. La géométrie semble plus grosse, car elle est plus près de la caméra.

## La transformation de l'espace monde vers l'espace objet

En raison de l'ordre précédent dans la transformation de l'espace objet vers l'espace monde, nous pouvons réaliser une transformation inverse afin de passer de l'espace monde vers l'espace objet si l'on respecte l'ordre de matrice suivante avec les valeurs numériques appropriées :

1	2	3	4	5
Translation $Tr^{-1}$	Rotation $R_z^{-1}$	Rotation $R_y^{-1}$	Rotation $R_x^{-1}$	Homothétie $Sc^{-1}$

Avec cette transformation, nous pouvons transformer un vecteur  $\vec{r}_m$  dans l'espace monde en un vecteur  $\vec{r}_o$  dans l'espace objet à l'aide de l'expression

$$\vec{r}_o = M_{m \rightarrow o} \vec{r}_m \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_o = Sc^{-1} \cdot R_x^{-1} \cdot R_y^{-1} \cdot R_z^{-1} \cdot Tr^{-1} \vec{r}_m$$

où  $M_{m \rightarrow o} = Sc^{-1} \cdot R_x^{-1} \cdot R_y^{-1} \cdot R_z^{-1} \cdot Tr^{-1}$  est la matrice de transformation de l'espace monde vers l'espace objet.

## L'algorithme du calcul de l'intersection dans un ray tracer avec l'usage des matrices de transformation

Dans le ray tracer, on utilise les matrices de transformations pour déformer des géométries de base (sphère, cylindre, cône), mais réaliser le calcul de l'intersection sur ces nouvelles géométries devient théoriquement très difficile. Ainsi, on utilise la transformation monde vers objet pour transformer un rayon afin de réaliser un calcul d'intersection dans l'espace objet ce qui a été préalablement implémenté. Cette transformation permet de contourner une difficulté théorique.

Voici ce qui est connu avant de réaliser les calculs appropriés :

Espace monde	Espace objet
$\vec{o}$ : Origine de l'espace monde ( $\vec{o} = 0$ ). $\vec{r}_0$ : Position initiale du rayon dans l'espace monde. $\vec{v}$ : Orientation du rayon dans l'espace monde. $M_{m \rightarrow o}$ : Transformation de l'espace monde à l'espace objet.	$\vec{o}$ : Origine de l'espace objet ( $\vec{o} = 0$ ). $M_{o \rightarrow m}$ : Transformation de l'espace objet à l'espace monde.
➤ Rayon : $\vec{r}_{ray} = \vec{r}_0 + \vec{v} t$ ➤ Calcul de l'intersection : non implémenté	➤ Rayon : $\vec{r}_{ray(o)}$ à obtenir par transformation ➤ Calcul de l'intersection : implémenté

Voici ce que l'on désire déterminer :

- $t_{int}$  : Temps afin que le rayon réalise l'intersection avec la géométrie (invariant).
- $\vec{n}_{int}$  : Normale à la surface de la géométrie à l'endroit de l'intersection dans l'espace monde.

Voici un algorithme de calcul d'intersection entre un rayon  $\vec{r}_{\text{ray}}$  et une géométrie en utilisant les matrices de transformation :

**Étape #1** : Transformation du rayon  $\vec{r}_{\text{ray}} = \vec{r}_0 + \vec{v} t$  de l'espace monde vers l'espace objet

a) Transformer de l'origine du rayon  $\vec{r}_0$  de l'espace monde vers l'espace objet :

$$\vec{r}_{0o} = M_{m \rightarrow o} \vec{r}_0$$

b) Transformer de l'orientation du rayon  $\vec{v}$  de l'espace monde vers l'espace objet :

$$\vec{o}_{m \rightarrow o} = M_{m \rightarrow o} \vec{o} \quad (\text{origine})$$

$$\vec{v}_{m \rightarrow o} = M_{m \rightarrow o} \vec{v} \quad (\text{direction à transformer})$$

$$\vec{v}_o = \vec{v}_{m \rightarrow o} - \vec{o}_{m \rightarrow o} \quad (\text{nouvelle direction})$$

**P.S.** Il est important **de ne pas normaliser**  $\vec{v}_o$ , car c'est ce qui permet d'avoir  $t$  comme invariant.

**Étape #2** : Réalisation du test de l'intersection

a) Construire le rayon transformé  $\vec{r}_{\text{ray}(o)} = \vec{r}_{0o} + \vec{v}_o t$ .

b) Tester l'intersection entre le rayon transformé  $\vec{r}_{\text{ray}(o)}$  et la géométrie dans l'espace objet.

c) Obtenir le temps d'intersection approprié  $t = t_{\text{int}}$ .

d) S'il y a eu intersection, évaluer la normale à la surface  $\vec{n}$  à l'endroit de l'intersection. Sinon, il n'y a pas eu d'intersection.

**Étape #3** : Transformation de la normale à la surface

a) Transformer la normale à la surface  $\vec{n}$  de l'espace objet vers l'espace monde :

$$\vec{o}_{o \rightarrow m} = M_{o \rightarrow m} \vec{o} \quad (\text{origine})$$

$$\vec{n}_{o \rightarrow m} = M_{o \rightarrow m} \vec{n} \quad (\text{direction à transformer})$$

$$\vec{n}_m = \vec{n}_{o \rightarrow m} - \vec{o}_{o \rightarrow m} \quad (\text{nouvelle direction})$$

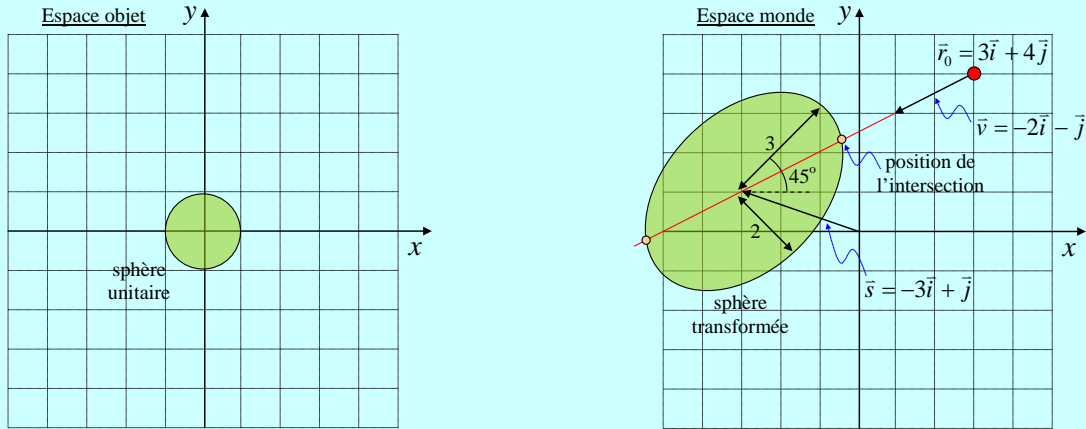
b) Normaliser la normale à la surface :

$$\vec{n}_{\text{int}} = \frac{\vec{n}_m}{|\vec{n}_m|}$$

**Conclusion :**

Nous obtenons le temps d'intersection  $t_{\text{int}}$  dans les deux espaces avec une normale à la surface  $\vec{n}_{\text{int}}$  dans l'espace monde.

**Situation A : L'intersection d'une sphère transformée.** Une sphère unitaire possède un rayon égal à 1 et est centré à l'origine de son espace objet. On désire faire l'intersection de cette sphère dans un espace monde après avoir effectué une transformation d'homothétie  $Sc = (3, 2, 1)$ , une rotation autour de l'axe  $z$  tel que  $\theta_z = 45^\circ$  et une translation  $Tr = (-3, 1, 0)$ . Le rayon qui réalisera l'intersection aura une origine  $\vec{r}_0 = 3\vec{i} + 4\vec{j}$  et une orientation  $\vec{v} = -2\vec{i} - \vec{j}$ .



On désire (a) évaluer la matrice de transformation de l'espace objet-monde et la matrice de transformation monde-objet, (b) évaluer le temps  $t_{\text{int}}$  requis pour réaliser l'intersection et (c) vérifier que le temps  $t_{\text{int}}$  est un invariant dans les deux espaces.

Évaluons les expressions  $c_z(\theta_z)$ ,  $s_z(\theta_z)$  pour la matrice de rotation  $R_z$  selon  $z$  ainsi que  $c_z(-\theta_z)$  et  $s_z(-\theta_z)$  pour la matrice de rotation inverse  $R_z^{-1}$  selon  $z$  :

- $c_z(\theta_z) = \cos(\theta_z) \Rightarrow c_z(\theta_z) = \cos(45^\circ) \Rightarrow c_z(\theta_z) = \sqrt{2}/2$
- $s_z(\theta_z) = \sin(\theta_z) \Rightarrow s_z(\theta_z) = \sin(45^\circ) \Rightarrow s_z(\theta_z) = \sqrt{2}/2$
- $c_z(-\theta_z) = \cos(-\theta_z) \Rightarrow c_z(-\theta_z) = \cos(-45^\circ) \Rightarrow c_z(-\theta_z) = \sqrt{2}/2$
- $s_z(-\theta_z) = \sin(-\theta_z) \Rightarrow s_z(-\theta_z) = \sin(-45^\circ) \Rightarrow s_z(-\theta_z) = -\sqrt{2}/2$

Évaluons la matrice de transformation  $M_{o \rightarrow m}$  de l'espace objet à l'espace monde :

$$M_{o \rightarrow m} = Tr \cdot R_z \cdot Sc$$

$$\Rightarrow M_{o \rightarrow m} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & tr_x \\ 0 & 1 & 0 & tr_y \\ 0 & 0 & 1 & tr_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_z(\theta_z) & -s_z(\theta_z) & 0 & 0 \\ s_z(\theta_z) & c_z(\theta_z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sc_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sc_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sc_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_{o \rightarrow m} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_{o \rightarrow m} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 3\sqrt{2}/2 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_{o \rightarrow m} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2} & 0 & -3 \\ 3\sqrt{2}/2 & \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(a) partie 1}$$

En utilisant les expressions des matrices inverses tel que

$$Sc^{-1} = Sc(1/sc_x, 1/sc_y, 1/sc_z) \quad , \quad R_z^{-1} = R_z(-\theta_z) \quad \text{et} \quad Tr^{-1} = Tr(-tr_x, -tr_y, -tr_z) \quad ,$$

évaluons la matrice de transformation  $M_{m \rightarrow o}$  de l'espace monde à l'espace objet :

$$M_{m \rightarrow o} = Sc^{-1} \cdot R_z^{-1} \cdot Tr^{-1}$$

$$\Rightarrow M_{m \rightarrow o} = \begin{pmatrix} 1/sc_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/sc_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/sc_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_z(-\theta_z) & -s_z(-\theta_z) & 0 & 0 \\ s_z(-\theta_z) & c_z(-\theta_z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -tr_x \\ 0 & 1 & 0 & -tr_y \\ 0 & 0 & 1 & -tr_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_{m \rightarrow o} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_{m \rightarrow o} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 3\sqrt{2}/2 - \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & -3\sqrt{2}/2 - \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_{m \rightarrow o} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_{m \rightarrow o} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/6 & \sqrt{2}/6 & 0 & \sqrt{2}/3 \\ -\sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/4 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(a) partie 2}$$

Représentons le rayon  $\vec{r}_{\text{ray(o)}}$  dans l'espace objet en transformant l'origine  $\vec{r}_0 = 3\vec{i} + 4\vec{j}$  du rayon ainsi que son orientation  $\vec{v} = -2\vec{i} - \vec{j}$  :

Transformation de l'origine du rayon :

$$\begin{aligned} \vec{r}_{0o} &= M_{m \rightarrow o} \vec{r}_0 \\ \Rightarrow \vec{r}_{0o} &= \begin{pmatrix} \sqrt{2}/6 & \sqrt{2}/6 & 0 & \sqrt{2}/3 \\ -\sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/4 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 + 2\sqrt{2}/3 + 0 + \sqrt{2}/3 \\ -3\sqrt{2}/4 + \sqrt{2} + 0 - \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \vec{r}_{0o} &= \begin{pmatrix} 3\sqrt{2}/2 \\ -3\sqrt{2}/4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ce qui donne} \quad \vec{r}_{0o} = \begin{pmatrix} 2,121 \\ -1,061 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Transformation de l'orientation :

$$\begin{aligned} \vec{o}_{m \rightarrow o} &= M_{m \rightarrow o} \vec{o}_m \\ \Rightarrow \vec{o}_{m \rightarrow o} &= \begin{pmatrix} \sqrt{2}/6 & \sqrt{2}/6 & 0 & \sqrt{2}/3 \\ -\sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/4 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \vec{o}_{m \rightarrow o} &= \begin{pmatrix} \sqrt{2}/3 \\ -\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ce qui donne} \quad \vec{o}_{m \rightarrow o} = \begin{pmatrix} 0,471 \\ -1,414 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_{m \rightarrow o} &= M_{m \rightarrow o} \vec{v} \\ \Rightarrow \vec{v}_{m \rightarrow o} &= \begin{pmatrix} \sqrt{2}/6 & \sqrt{2}/6 & 0 & \sqrt{2}/3 \\ -\sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/4 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2}/6 - \sqrt{2}/6 + 0 + \sqrt{2}/3 \\ 2\sqrt{2}/4 - \sqrt{2}/4 + 0 - \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \vec{v}_{m \rightarrow o} &= \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/6 \\ -3\sqrt{2}/4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ce qui donne} \quad \vec{v}_{m \rightarrow o} = \begin{pmatrix} -0,2357 \\ -1,0607 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

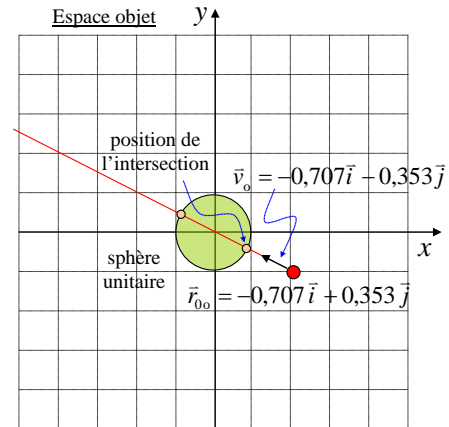
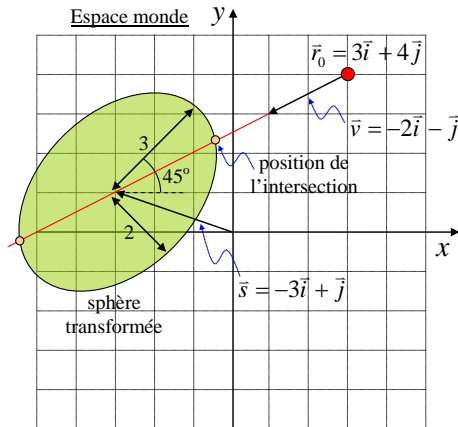
Pour obtenir la direction transformée :

$$\vec{v}_o = \vec{v}_{m \rightarrow o} - \vec{o}_{m \rightarrow o} \quad (\text{nouvelle direction})$$

$$\Rightarrow \vec{v}_o = (-0,2357\vec{i} - 1,0607\vec{j}) - (0,471\vec{i} - 1,414\vec{j})$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_o = -0,707\vec{i} + 0,353\vec{j}}$$

Voici une représentation de la transformation du rayon  $\vec{r}_{\text{ray}}$  dans l'espace monde en rayon  $\vec{r}_{\text{ray}(o)}$  dans l'espace objet :



Évaluons le temps de l'intersection  $t_{\text{int}}$  à l'aide de l'équation de l'intersection de la sphère :

$$At^2 + Bt + C = 0 \quad \text{où} \quad A = \vec{v} \cdot \vec{v} \quad , \quad B = 2\vec{r}_{s0} \cdot \vec{v} \quad \text{et} \quad C = \vec{r}_{s0} \cdot \vec{r}_{s0} - R^2 \quad \text{où} \quad \vec{r}_{s0} = \vec{r}_0 - \vec{r}_s$$

Voici les valeurs particulières de notre calcul dans un contexte de calcul d'intersection dans l'espace objet de la sphère :

Orientation du rayon ( $\vec{v} = \vec{v}_o$ )	Origine du rayon ( $\vec{r}_0 = \vec{r}_{0o}$ )	Origine de la sphère ( $\vec{r}_s$ )	$\vec{r}_{s0} = \vec{r}_0 - \vec{r}_s$
$\vec{v} = -0,707\vec{i} + 0,353\vec{j}$	$\vec{r}_0 = 2,121\vec{i} - 1,061\vec{j}$	$\vec{r}_s = 0$	$\vec{r}_{s0} = 2,121\vec{i} - 1,061\vec{j}$

Évaluons nos paramètres  $A$ ,  $B$  et  $C$  :

$$A = \vec{v} \cdot \vec{v} \quad \Rightarrow \quad A = (-0,707\vec{i} + 0,353\vec{j}) \cdot (-0,707\vec{i} + 0,353\vec{j})$$

$$\Rightarrow \quad A = (-0,707)(-0,707) + (0,353)(0,353)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A = 0,6245}$$

$$B = 2\vec{r}_{s0} \cdot \vec{v} \quad \Rightarrow \quad B = 2(2,121\vec{i} - 1,061\vec{j}) \cdot (-0,707\vec{i} + 0,353\vec{j})$$

$$\Rightarrow \quad B = 2((2,121)(-0,707) + (-1,061)(0,353))$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{B = -3,7482}$$



$$\begin{aligned}
C = \vec{r}_{S_0} \cdot \vec{r}_{S_0} - R^2 &\Rightarrow C = ((2,121\vec{i} - 1,061\vec{j}) \cdot (2,121\vec{i} - 1,061\vec{j})) - (1)^2 \\
&\Rightarrow C = ((2,121)(2,121) + (-1,061)(-1,061)) - (1)^2 \\
&\Rightarrow \boxed{C = 4,6244}
\end{aligned}$$

Nous pouvons évaluer le temps  $t$  où il y aura une intersection (nommé  $t_{\text{int}}$ ) en résolvant notre polynôme du 2<sup>ième</sup> degré  $At^2 + Bt + C = 0$ :

$$\begin{aligned}
t_{\text{int}} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} &\Rightarrow t_{\text{int}} = \frac{-(-3,748) \pm \sqrt{(-3,748)^2 - 4(0,6245)(4,6244)}}{2(0,6245)} \\
&\Rightarrow t_{\text{int}} = \frac{3,748 \pm \sqrt{2,4957}}{1,249} \\
&\Rightarrow t_{\text{int}} = \{1,7360, 4,2656\} \\
&\Rightarrow \boxed{t_{\text{int}} = 1,7360} \quad \text{(b)}
\end{aligned}$$

Afin de vérifier que le temps  $t_{\text{int}}$  est un invariant dans nos deux espaces, évaluer la position de l'intersection dans les deux espaces et vérifions qu'elles sont égales après une transformation.

Débutons en évaluant la position de l'intersection  $\vec{r}_{\text{int}(o)}$  dans l'espace objet :

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{\text{int}(o)} = \vec{r}_{o_0} + \vec{v}_o t_{\text{int}} &\Rightarrow \vec{r}_{\text{int}(o)} = (2,121\vec{i} - 1,061\vec{j}) + (-0,707\vec{i} + 0,353\vec{j})(1,7360) \\
&\Rightarrow \boxed{\vec{r}_{\text{int}(o)} = 0,8906\vec{i} - 0,4482\vec{j}}
\end{aligned}$$

Transformons la position de l'intersection  $\vec{r}_{\text{int}(o)}$  vers l'espace monde :

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{\text{int}} &= M_{o \rightarrow m} \vec{r}_{\text{int}(o)} \\
\Rightarrow \vec{r}_{\text{int}} &= \begin{pmatrix} 3\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2} & 0 & -3 \\ 3\sqrt{2}/2 & \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8906 \\ -0,4482 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,8892 + 0,6339 + 0 - 3 \\ 1,8892 - 0,6339 + 0 + 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \vec{r}_{\text{int}} &= \begin{pmatrix} -0,4769 \\ 2,2553 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ce qui donne} \quad \boxed{\vec{r}_{\text{int}} = -0,477\vec{i} + 2,26\vec{j}}
\end{aligned}$$

Évaluons la position de l'intersection dans l'espace monde avec le temps de l'intersection  $t_{\text{int}}$  :

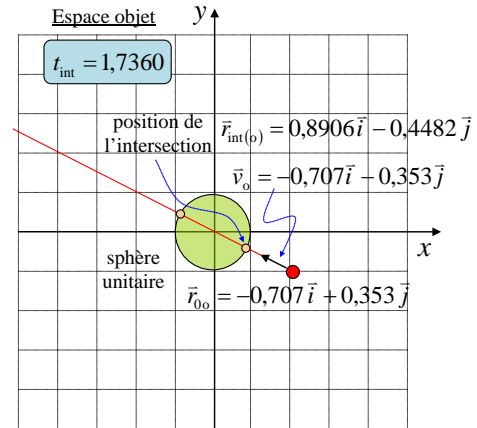
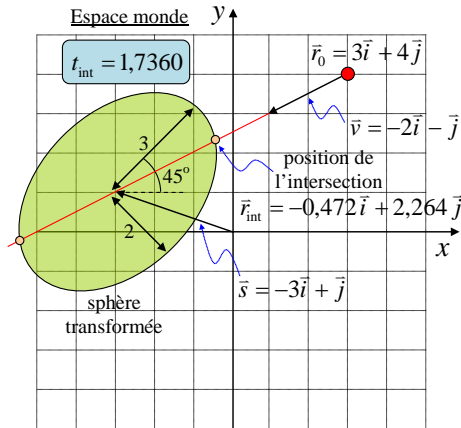
$$\begin{aligned} \vec{r}_{\text{int}} &= \vec{r}_0 + \vec{v}t_{\text{int}} &\Rightarrow & \vec{r}_{\text{int}} = (3\vec{i} + 4\vec{j}) + (-2\vec{i} - \vec{j})(1,7360) \\ & &\Rightarrow & \boxed{\vec{r}_{\text{int}} = -0,472\vec{i} + 2,264\vec{j}} \end{aligned}$$

En raison des précisions numériques, nous obtenons des coordonnées pour l'intersection une légère différence :

$$\begin{array}{ccc} \vec{r}_{\text{int}} = -0,477\vec{i} + 2,26\vec{j} & \text{versus} & \vec{r}_{\text{int}} = -0,472\vec{i} + 2,264\vec{j} \\ \text{(par transformation objet-monde)} & & \text{(par évaluation de temps dans l'espace monde)} \end{array}$$

Cependant, nous pouvons affirmer que le **temps pour réaliser l'intersection**  $t_{\text{int}}$  est **un invariant** dans les deux espaces puisque nos deux positions peuvent être calculées à l'aide de la même valeur de  $t_{\text{int}}$  dans les deux espaces.

Voici une représentation de la position de l'intersection dans les deux espaces :

















# Chapitre 6.7 – Les textures dans le ray tracer

## La texture et le texel

Une texture est une grille de valeurs dont chaque élément de la grille porte le nom de **texel**. Une texture est habituellement représentée en deux dimensions dont chaque texel est accessible par une coordonnée

$$(T_x, T_y) \text{ tel que } T_x \in [0, T_L - 1], T_y \in [0, T_H - 1]$$

où  $T_L$  correspond au nombre de texels en largeur (*width*) et  $T_H$  correspond au nombre de texels en hauteur (*height*). Selon l'interprétation de la texture, l'origine peut être localisée dans le coin supérieur gauche (selon *DirectX*) ou dans le coin inférieur gauche (selon *OpenGL*)

On utilise les textures pour emmagasiner des informations comme des couleurs (texture de couleur) et des déformations de normale à la surface (*bump map*) afin de les appliquer sur des formes géométriques (*texture mapping*).

## La coordonnée de texture $uv$

Une coordonnée de texture  $\ddot{C}_{uv}$  est un doublet représentant deux coordonnées exprimées en nombre réel qui permettent de localiser un **texel**  $(T_x, T_y)$  dans une texture :

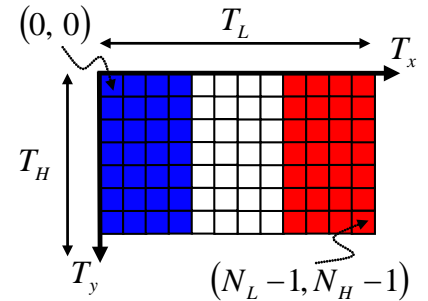
$$\ddot{C}_{uv} = (u, v) \text{ tel que } u, v \in [0, 1]$$

où  $\ddot{C}_{uv}$  : Coordonnée de texture.

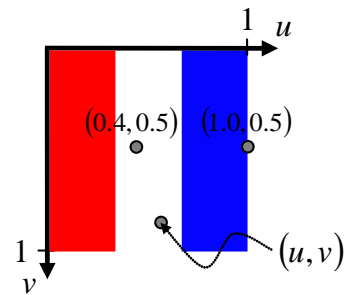
$u$  : Coordonnée  $u$  de la texture.  $u \in [0, 1]$

$v$  : Coordonnée  $v$  de la texture.  $v \in [0, 1]$

Cette approche est nécessaire afin de permettre aux géométries appliquées de texture de subir des transformations d'homothétie ce qui permet de déformer adéquatement la texture lors de son application sur la géométrie.



Texture de couleur (drapeau de la France) en espace image où l'origine est dans le coin supérieur gauche de la grille.



Texture de couleur (drapeau de la France) en espace  $uv$  où l'origine est dans le coin supérieur gauche.

## L'équation de correspondance entre coordonnée $uv$ et texel

Une coordonnée  $uv$  peut cependant être à l'extérieur de l'intervalle  $[0, 1]$ . Dans ce cas, il faut recadrer la coordonnée  $uv$  entre 0 et 1. Pour ce faire, il existe deux méthodes : (soit  $x \in [0, 1]$ )

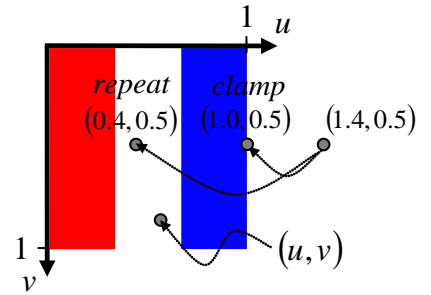
- La coupure (*clamp*) :  $u = 1 + x \rightarrow u = 1$ ,  $u = -1 + x \rightarrow u = 0$
- La répétition (*repeat*) :  $u = 1 + x \rightarrow u = x$ ,  $u = -1 + x \rightarrow u = 1 - x$

Pour faire la correspondance entre une coordonnée  $uv$   $(u, v)$  et une coordonnée de texel  $(T_x, T_y)$ , on utilise la règle<sup>1</sup> suivante :

$$(u, v) \rightarrow (T_x, T_y)$$

tel que

$$T_x = \lfloor u(N_L - 1) \rfloor \text{ et } T_y = \lfloor v(N_H - 1) \rfloor .$$



Texture de couleur (drapeau de la France) en espace  $uv$  où l'origine est dans le coin supérieur gauche. Un exemple de recadrément est également disponible pour illustrer la méthode par coupure et par répétition.

## L'application d'une texture (*texture mapping*)

Lorsqu'un artiste décide d'utiliser une texture pour attribuer plusieurs couleurs différentes sur une même surface géométrique, il utilise des textures de couleurs. Le rôle de l'artiste sera de faire correspondre des coordonnées  $(x, y, z)$  de l'espace objet de son modèle 3D en coordonnées  $(u, v)$  de texture tel que

$$(x, y, z) \rightarrow (u, v)$$

afin d'associer une couleur appropriée à appliquer sur chaque surface du modèle 3D.



Rendu sans texture d'un modèle 3D.



Rendu avec texture de couleur d'un modèle 3D.



Texture en espace image utilisée pour attribuer différentes couleurs sur les différents triangles du modèle 3D ci-haut.

<sup>1</sup> En informatique, on utilise la fonction planché (*floor*) pour transformer  $(T_x, T_y)$  en entier :

$$T_x = \lfloor u(N_L - 1) \rfloor = \text{floor}(u(N_L - 1)) \text{ et } T_y = \lfloor v(N_H - 1) \rfloor = \text{floor}(v(N_H - 1))$$

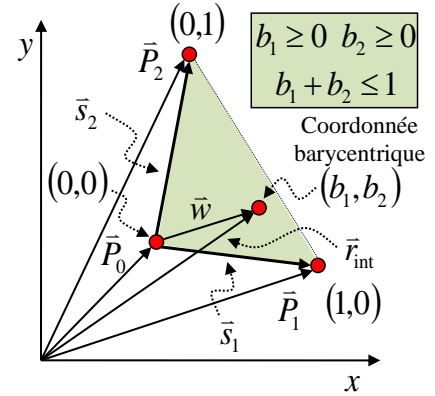
# L'interpolation des coordonnées de texture dans un triangle barycentrique

Pour un triangle en coordonnée barycentrique, on peut calculer pour une coordonnée

$$\vec{r}_{\text{int}} = \vec{r}_0 + \vec{v} t_{\text{int}}$$

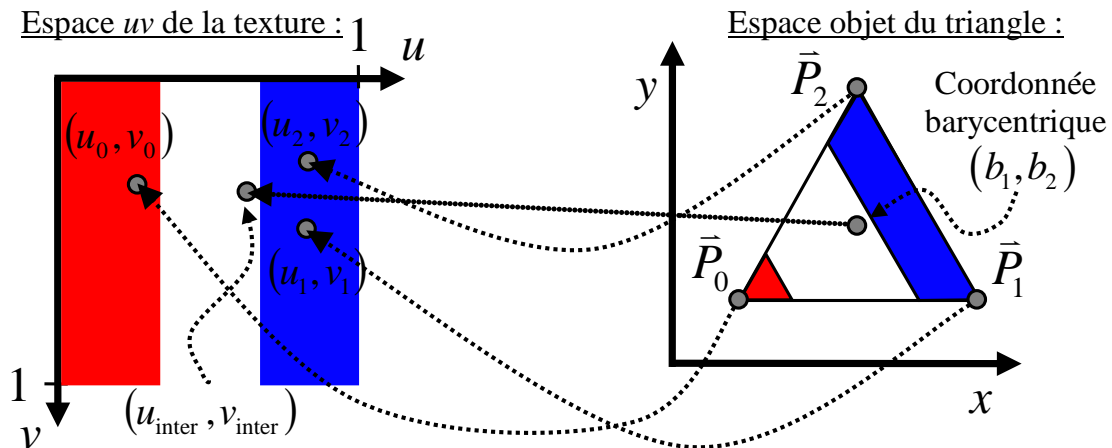
d'un rayon ayant intersecté un triangle et d'obtenir une coordonnée barycentrique  $(b_1, b_2)$  associée à la coordonnée  $(x, y, z)$  de l'intersection de position  $\vec{r}_{\text{int}}$ . En définissant une coordonnée  $uv$  pour chaque sommet du triangle ( $\ddot{C}_{uv0}, \ddot{C}_{uv1}$  et  $\ddot{C}_{uv2}$ ), nous pouvons évaluer par interpolation linéaire une coordonnée  $uv$   $\ddot{C}_{uv(\text{inter})}$  associé à la position  $(b_1, b_2)$  de l'intersection du triangle grâce à l'équation suivante :

$$\ddot{C}_{uv(\text{inter})} = (1 - b_1 - b_2) \ddot{C}_{uv0} + b_1 \ddot{C}_{uv1} + b_2 \ddot{C}_{uv2}$$



Représentation d'un point dans le plan d'un triangle en coordonnée barycentrique.

- où  $\ddot{C}_{uv(\text{inter})}$  : Coordonnée  $uv$  interpolée en coordonnée  $(t_1, t_2)$  du triangle.  $\ddot{C}_{uv(\text{inter})} = (u_{\text{inter}}, v_{\text{inter}})$   
 $\ddot{C}_{uv0}$  : Coordonnée de texture  $uv$  au sommet  $\vec{P}_0$  du triangle.  $\ddot{C}_{uv0} = (u_0, v_0)$   
 $\ddot{C}_{uv1}$  : Coordonnée de texture  $uv$  au sommet  $\vec{P}_1$  du triangle.  $\ddot{C}_{uv1} = (u_1, v_1)$   
 $\ddot{C}_{uv2}$  : Coordonnée de texture  $uv$  au sommet  $\vec{P}_2$  du triangle.  $\ddot{C}_{uv2} = (u_2, v_2)$   
 $(b_1, b_2)$  : Coordonnée barycentrique du point dans le triangle où la coordonnée  $uv$  est localisée.



Application d'une texture de couleur (drapeau de la France) en coordonnée  $uv$  sur un triangle dans un espace objet.

# L'application d'une texture sur une géométrie

Afin d'automatiser l'association d'une coordonnée  $uv$  à une coordonnée d'espace, il est possible de calculer une association  $(x, y, z) \rightarrow (u, v)$  selon la forme géométrique sur laquelle on désire appliquer la texture.

Voici quelques exemples d'associations de coordonnée  $uv$  (*uv mapping*) :

Sphère<sup>2</sup> : (sphère de rayon  $R$ )

$$u = 0.5 + \frac{\arctan 2(d_z, d_x)}{2\pi}$$

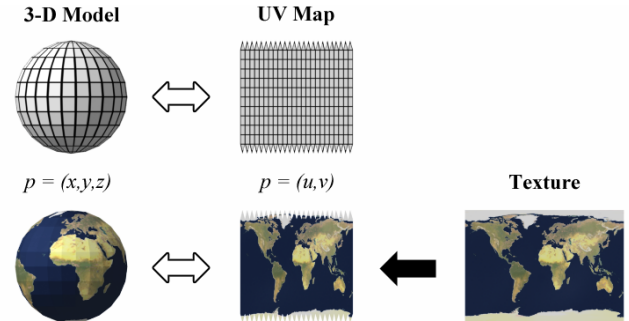
et

$$v = 0.5 - \frac{\arcsin(d_y / R)}{\pi}$$

avec

$$\vec{d} = \vec{P} - \vec{r}_{\text{sphère}}$$

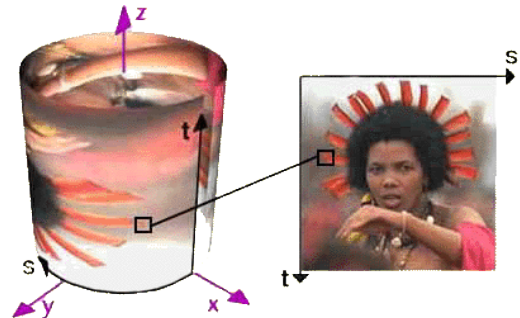
où  $\vec{d}$  est la distance entre la position du centre de la sphère  $\vec{r}_{\text{sphère}}$  et le point  $\vec{P}$  sur la sphère (site de l'intersection dans le *ray tracing*) où la coordonnée de texture est évaluée.



[https://en.wikipedia.org/wiki/UV\\_mapping#/media/File:UVMapping.png](https://en.wikipedia.org/wiki/UV_mapping#/media/File:UVMapping.png)

Cylindre : (base circulaire dans le plan  $xy$  et parallèle à l'axe  $z$  dans le sens positif d'une hauteur  $H$ )

- $\theta = \arctan 2(y, x)$  (angle par rapport à  $x$ )
- $u = \frac{\theta}{2\pi}$  (indépendant du rayon)
- $v = \frac{z}{H}$  ( $z < H$ )



[http://www.fundza.com/rman\\_shaders/surface/](http://www.fundza.com/rman_shaders/surface/)

<sup>2</sup> Puisque la fonction arctan génère toujours deux solutions principales, la fonction arctan2 prend deux paramètres et détermine le bon choix d'arc de cercle généré par la fonction arctan en comparant les signes des deux paramètres.











# Chapitre 6.X1 – Autres applications des matrices dans le *ray tracer*

## La matrice de rotation selon l'axe $x$ , $y$ et $z$

La matrice de rotation  $R_{zyx}$  effectuant dans l'ordre<sup>1</sup> une rotation autour de l'axe  $x$ , l'axe  $y$  et l'axe  $z$  correspond au produit des trois matrices  $R_x$ ,  $R_y$  et  $R_z$  dans l'ordre tel que

$$R_{zyx} = R_z \cdot R_y \cdot R_x$$

que l'on peut résoudre algébriquement afin d'obtenir le résultat

$$R_{zyx} = \begin{pmatrix} c_y c_z & s_x s_y c_z - c_x s_z & c_x s_y c_z + s_x s_z & 0 \\ c_y s_z & s_x s_y s_z + c_x c_z & c_x s_y s_z - s_x c_z & 0 \\ -s_y & s_x c_y & c_x c_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où

$$c_x = \cos(\theta_x), \quad s_x = \sin(\theta_x), \quad c_y = \cos(\theta_y), \quad s_y = \sin(\theta_y), \quad c_z = \cos(\theta_z) \quad \text{et} \quad s_z = \sin(\theta_z) .$$

Preuve :

Développons l'expression  $R_{zyx} = R_z \cdot R_y \cdot R_x$  en réalisant algébriquement le produit des matrices :

$$R_{zyx} = R_z \cdot R_y \cdot R_x \quad \text{(Calcul à effectuer)}$$

$$\Rightarrow R_{zyx} = \begin{pmatrix} c_z & -s_z & 0 & 0 \\ s_z & c_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_y & 0 & s_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_y & 0 & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_x & -s_x & 0 \\ 0 & s_x & c_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(Remplacer } R_z, R_y \text{ et } R_x)$$

$$\Rightarrow R_{zyx} = \begin{pmatrix} c_z & -s_z & 0 & 0 \\ s_z & c_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_y & s_x s_y & c_x s_y & 0 \\ 0 & c_x & -s_x & 0 \\ -s_y & s_x c_y & c_x c_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(Calcul de } R_{yx} = R_y \cdot R_x)$$

$$\Rightarrow R_{zyx} = \begin{pmatrix} c_y c_z & s_x s_y c_z - c_x s_z & c_x s_y c_z + s_x s_z & 0 \\ c_y s_z & s_x s_y s_z + c_x c_z & c_x s_y s_z - s_x c_z & 0 \\ -s_y & s_x c_y & c_x c_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \blacksquare \quad \text{(Calcul de } R_{zyx} = R_z \cdot R_{yx})$$

<sup>1</sup> Ceci est valide en raison de la convention droite gauche des multiplications  $\vec{v} = M \vec{u}$

## La matrice de rotation selon l'axe z, y et x

La matrice de rotation  $R_{xyz}$  effectuant dans l'ordre<sup>2</sup> une rotation autour de l'axe z l'axe y et l'axe x correspond au produit des trois matrices  $R_z$ ,  $R_y$  et  $R_x$  dans l'ordre tel que

$$R_{xyz} = R_x \cdot R_y \cdot R_z$$

que l'on peut résoudre algébriquement afin d'obtenir le résultat

$$R_{xyz} = \begin{pmatrix} c_y c_z & -c_y s_z & s_y & 0 \\ c_x s_z + s_x s_y c_z & c_x c_z - s_x s_y s_z & -s_x c_y & 0 \\ s_x s_z - c_x s_y c_z & s_x c_z + c_x s_y s_z & c_x c_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où

$$c_x = \cos(\theta_x), \quad s_x = \sin(\theta_x), \quad c_y = \cos(\theta_y), \quad s_y = \sin(\theta_y), \quad c_z = \cos(\theta_z) \quad \text{et} \quad s_z = \sin(\theta_z) .$$

Preuve :

Développons l'expression  $R_{xyz} = R_x \cdot R_y \cdot R_z$  en réalisant algébriquement le produit des matrices :

$$R_{xyz} = R_x \cdot R_y \cdot R_z \quad \text{(Calcul à effectuer)}$$

$$\Rightarrow R_{xyz} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_x & -s_x & 0 \\ 0 & s_x & c_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_y & 0 & s_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_y & 0 & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_z & -s_z & 0 & 0 \\ s_z & c_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(Remplacer } R_x, R_y \text{ et } R_z)$$

$$\Rightarrow R_{xyz} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_x & -s_x & 0 \\ 0 & s_x & c_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_y c_z & -c_y s_z & s_y & 0 \\ s_z & c_z & 0 & 0 \\ -s_y c_z & s_y s_z & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(Calcul de } R_{yz} = R_y \cdot R_z)$$

$$\Rightarrow R_{xyz} = \begin{pmatrix} c_y c_z & -c_y s_z & s_y & 0 \\ c_x s_z + s_x s_y c_z & c_x c_z - s_x s_y s_z & -s_x c_y & 0 \\ s_x s_z - c_x s_y c_z & s_x c_z + c_x s_y s_z & c_x c_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \blacksquare \quad \text{(Calcul de } R_{xya} = R_x \cdot R_{yz})$$

<sup>2</sup> Ceci est valide en raison de la convention droite gauche des multiplications  $\vec{v} = M \vec{u}$

## Déterminer les coefficients de rotation $R_{zyx}$

Pour déterminer les coefficients de rotation  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  et  $\theta_z$  pour ma matrice  $R_{zyx}$  que l'on doit utiliser pour faire tourner un vecteur initial  $\vec{u}$  dans une nouvelle orientation  $\vec{v}$ , il faut :

- Définir l'orientation de départ  $\vec{u}$  et l'orientation finale  $\vec{v}$  en vecteur unitaire.
- Choisir l'ordre de l'application des matrices de rotations comme  $R_{zyx}$ .
- Définir deux autres vecteurs en lien avec  $\vec{u}$  pour former une base complète dans  $\mathfrak{R}^3$ .
- Connaître l'expression mathématique des deux autres vecteurs après la rotation.
- Résoudre un système d'équations couplées non linéaires regroupés dans des matrices.

Si l'on désire faire tourner le vecteur  $\vec{u}_3 = (0 \ 0 \ 1 \ 1)$  en vecteur  $\vec{v}_3 = (x \ y \ z \ 1)$  à l'aide de la matrice de rotation  $R_{zyx}$ , nous aurons besoin des angles suivants :

	$\theta_x$	$\theta_y$	$\theta_z$
Condition	Si $x = \sin(\sigma_x)$ , alors $\theta_x = \sigma_x$ .  Si $x = \sin(\sigma_x + \pi)$ , alors $\theta_x = \sigma_x + \pi$ .	Si $z = \cos(\theta_x)\cos(\sigma_y)$ , alors $\theta_y = \sigma_y$ .  Si $z = \cos(\theta_x)\cos(\pi - \sigma_y)$ , alors $\theta_y = \pi - \sigma_y$ .	$\theta_z = \frac{\pi}{2}$
Outil de calcul	$\sigma_x = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{z^2 + y^2}}\right)$	$\sigma_y = \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{z^2 + y^2}}\right)$	

Cas particulier ( $\sqrt{z^2 + y^2} = 0$ )	$\vec{v} = (1 \ 0 \ 0)$	$\vec{v} = (-1 \ 0 \ 0)$
	$\theta_x = 0$ , $\theta_y = \frac{\pi}{2}$ , $\theta_z = 0$	$\theta_x = 0$ , $\theta_y = -\frac{\pi}{2}$ , $\theta_z = 0$

### Preuve :

Comment trouver les coefficients de rotation  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  et  $\theta_z$  afin de tourner un système d'axe classique  $xyz$  en un système d'axe tel que le vecteur unitaire  $z$  passe de

$$\vec{u}_3 = (0 \ 0 \ 1 \ 1) \quad \text{vers} \quad \vec{v}_3 = (x \ y \ z \ 1)$$

Avec les deux autres vecteurs

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= (1 \ 0 \ 0 \ 1) \\ \vec{u}_2 &= (0 \ 1 \ 0 \ 1) \end{aligned}$$

Que l'on veut transformer en  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  tel que

$$\vec{v}_1 \perp \vec{v}_3 \quad \text{et} \quad \vec{v}_3 = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$$

On peut également écrire les contraintes sur  $\vec{v}_2$  sous une forme isolé tel que

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_3 \times \vec{v}_1$$

Pour  $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_3$ , il y a plusieurs solutions admissibles. Si<sup>3</sup>  $\vec{v}_3 \neq \vec{u}_1 = (1 \ 0 \ 0 \ 1)$ , on pourrait prendre

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{v}_3 \times \vec{u}_1}{|\vec{v}_3 \times \vec{u}_1|}$$

Ainsi,  $\vec{v}_1$  sera dans une direction tel que  $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_3$  et  $\vec{v}_1 \perp \vec{u}_1$  qui est une solution particulière, mais il y a de toute façon plein de façon de tourner notre système d'axe pour amener  $\vec{u}_3$  à  $\vec{v}_3$ . Calculons alors  $\vec{v}_1$  :

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 = \frac{\vec{v}_3 \times \vec{u}_1}{|\vec{v}_3 \times \vec{u}_1|} &\Rightarrow \vec{v}_1 = \frac{(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \times (\vec{i})}{|\vec{v}_3 \times \vec{u}_1|} \\ &\Rightarrow \vec{v}_1 = \frac{z\vec{j} - y\vec{k}}{|\vec{v}_3 \times \vec{u}_1|} \\ &\Rightarrow \vec{v}_1 = \frac{z\vec{j} - y\vec{k}}{\sqrt{z^2 + y^2}} \end{aligned}$$

Calculons maintenant  $\vec{v}_2 = \vec{v}_3 \times \vec{v}_1$  :

$$\begin{aligned} \vec{v}_2 = \vec{v}_3 \times \vec{v}_1 &\Rightarrow \vec{v}_2 = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \times \left( \frac{z\vec{j} - y\vec{k}}{\sqrt{z^2 + y^2}} \right) \\ &\Rightarrow \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{z^2 + y^2}} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \times (z\vec{j} - y\vec{k}) \\ &\Rightarrow \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{z^2 + y^2}} [(-y^2 - z^2)\vec{i} - (-xy - z(0))\vec{j} + (xz - y(0))\vec{k}] \\ &\Rightarrow \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{z^2 + y^2}} [-(y^2 + z^2)\vec{i} + xy\vec{j} + xz\vec{k}] \\ &\Rightarrow \vec{v}_2 = -\sqrt{y^2 + z^2} \vec{i} + \frac{xy}{\sqrt{z^2 + y^2}} \vec{j} + \frac{xz}{\sqrt{z^2 + y^2}} \vec{k} \end{aligned}$$

Sous forme vectorielle regroupée en matrice, nous aurons

$$v = R_{zyx} u \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{z^2 + y^2} & x \\ \frac{z}{\sqrt{z^2 + y^2}} & \frac{xy}{\sqrt{z^2 + y^2}} & y \\ \frac{-y}{\sqrt{z^2 + y^2}} & \frac{xz}{\sqrt{z^2 + y^2}} & z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = R_{zyx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

<sup>3</sup> Le non-respect de cette contrainte correspond à notre cas particulier.

Remplaçons l'expression de la matrice  $R_{zyx}$  et effectuons le calcul  $R_{zyx}u$  :

$$v = R_{zyx}u$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{z^2 + y^2} & x \\ \frac{z}{\sqrt{z^2 + y^2}} & \frac{xy}{\sqrt{z^2 + y^2}} & y \\ \frac{-y}{\sqrt{z^2 + y^2}} & \frac{xz}{\sqrt{z^2 + y^2}} & z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_y c_z & s_x s_y c_z - c_x s_z & c_x s_y c_z + s_x s_z & 0 \\ c_y s_z & s_x s_y s_z + c_x c_z & c_x s_y s_z - s_x c_z & 0 \\ -s_y & s_x c_y & c_x c_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{z^2 + y^2} & x \\ \frac{z}{\sqrt{z^2 + y^2}} & \frac{xy}{\sqrt{z^2 + y^2}} & y \\ \frac{-y}{\sqrt{z^2 + y^2}} & \frac{xz}{\sqrt{z^2 + y^2}} & z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_y c_z & s_x s_y c_z - c_x s_z & c_x s_y c_z + s_x s_z \\ c_y s_z & s_x s_y s_z + c_x c_z & c_x s_y s_z - s_x c_z \\ -s_y & s_x c_y & c_x c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour résoudre ce système d'équations, nous devons comparer un élément de la matrice de gauche avec un élément de la matrice de droite pour en tirer des conclusions.

Débutons notre analyse en supposant que  $\sqrt{z^2 + y^2} \neq 0$  : (exclusion des cas  $\vec{v} = (\pm 1 \ 0 \ 0)$  )

- En ligne 3, colonne 1 ( $M_{20}$ ) :

$$-\frac{y}{\sqrt{z^2 + y^2}} = -s_y$$

Nous pouvons effectuer l'arcsinus et obtenir l'angle  $\theta_y$  :

$$-\frac{y}{\sqrt{z^2 + y^2}} = -s_y \quad \Rightarrow \quad \sin(\theta_y) = \frac{y}{\sqrt{z^2 + y^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \theta_y = \{\sigma_y, \pi - \sigma_y\} \quad \text{où} \quad \sigma_y = \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{z^2 + y^2}}\right)$$

- En ligne 3, colonne 2 ( $M_{21}$ ) et en ligne 3, colonne 3 ( $M_{22}$ ) :

$$\frac{xz}{\sqrt{z^2 + y^2}} = s_x c_y \quad \text{et} \quad z = c_x c_y$$

En effectuant la division de ces deux expressions, nous obtenons l'angle  $\theta_x$  :

$$\begin{aligned} \frac{\frac{xz}{\sqrt{z^2 + y^2}}}{z} &= \frac{s_x c_y}{c_x c_y} \Rightarrow \frac{\sin(\theta_x) \cos(\theta_y)}{\cos(\theta_x) \cos(\theta_y)} = \frac{xz / \sqrt{z^2 + y^2}}{z} \\ &\Rightarrow \frac{\sin(\theta_x)}{\cos(\theta_x)} = \frac{x}{\sqrt{z^2 + y^2}} \\ &\Rightarrow \boxed{\theta_x = \{\sigma_x, \pi + \sigma_x\}} \quad \text{où} \quad \boxed{\sigma_x = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{z^2 + y^2}}\right)} \end{aligned}$$

- En ligne 1, colonne 1 ( $M_{00}$ ) :

$$0 = c_y c_z$$

Puisque  $c_y$  peut prendre n'importe quelle valeur puisque  $\theta_y = \{\sigma_y, \pi - \sigma_y\}$ , cette égalité sera vérifiée uniquement si  $\theta_z = \pm \frac{\pi}{2}$ , car  $c_z = \cos(\theta_z) = \cos\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = 0$ .

Ainsi :

$$\boxed{\theta_z = \left\{ \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \right\}}$$

Maintenant que nous avons deux choix d'angle pour nos paramètres  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  et  $\theta_z$ , nous devons trouver une façon de les déterminer. Débutons par exploiter le fait que  $\theta_z = \pm \frac{\pi}{2}$  ce qui donnera des valeurs à  $c_z = 0$  et  $s_z = \pm 1$ . Remplaçons les expressions de  $c_y$  et  $s_z$  dans notre système d'équations représenté matriciellement :

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{z^2 + y^2} & x \\ z & xy & y \\ \frac{\sqrt{z^2 + y^2}}{\sqrt{z^2 + y^2}} & \frac{xy}{\sqrt{z^2 + y^2}} & y \\ -y & xz & z \\ \frac{\sqrt{z^2 + y^2}}{\sqrt{z^2 + y^2}} & \frac{xz}{\sqrt{z^2 + y^2}} & z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_y c_z & s_x s_y c_z - c_x s_z & c_x s_y c_z + s_x s_z \\ c_y s_z & s_x s_y s_z + c_x c_z & c_x s_y s_z - s_x c_z \\ -s_y & s_x c_y & c_x c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow &\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{z^2 + y^2} & x \\ z & xy & y \\ \frac{\sqrt{z^2 + y^2}}{\sqrt{z^2 + y^2}} & \frac{xy}{\sqrt{z^2 + y^2}} & y \\ -y & xz & z \\ \frac{\sqrt{z^2 + y^2}}{\sqrt{z^2 + y^2}} & \frac{xz}{\sqrt{z^2 + y^2}} & z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_y(0) & s_x s_y(0) - c_x(\pm 1) & c_x s_y(0) + s_x(\pm 1) \\ c_y(\pm 1) & s_x s_y(\pm 1) + c_x(0) & c_x s_y(\pm 1) - s_x(0) \\ -s_y & s_x c_y & c_x c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{z^2 + y^2} & x \\ \frac{z}{\sqrt{z^2 + y^2}} & \frac{xy}{\sqrt{z^2 + y^2}} & y \\ \frac{-y}{\sqrt{z^2 + y^2}} & \frac{xz}{\sqrt{z^2 + y^2}} & z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mp c_x & \pm s_x \\ \pm c_y & \pm s_x s_y & \pm c_x s_y \\ -s_y & s_x c_y & c_x c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} & -\sqrt{z^2 + y^2} & x \\ \frac{z}{\sqrt{z^2 + y^2}} & \frac{xy}{\sqrt{z^2 + y^2}} & y \\ & & z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \mp c_x & \pm s_x \\ \pm c_y & \pm s_x s_y & \pm c_x s_y \\ & & c_x c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- En ligne 1, colonne 3 ( $M_{02}$ ) :

$$x = \pm s_x$$

Imposons le choix  $\theta_z = \pm \frac{\pi}{2}$  ce qui donnera l'équation

$$x = +s_x$$

Ainsi : (avec  $\theta_z = \pm \frac{\pi}{2}$ )

- Si  $x = \sin(\sigma_x)$ , alors  $\theta_x = \sigma_x$ .
- Si  $x = \sin(\sigma_x + \pi)$ , alors  $\theta_x = \sigma_x + \pi$ .

- En ligne 3, colonne 3 ( $M_{22}$ ) :

$$z = c_x c_y$$

Puisque  $\theta_z$  a été imposé pour déterminer  $\theta_x$ , utilisons  $\theta_x$  pour déterminer  $\theta_y$ .

Ainsi :

- Si  $z = \cos(\theta_x)\cos(\sigma_y)$ , alors  $\theta_y = \sigma_y$ .
- Si  $z = \cos(\theta_x)\cos(\pi - \sigma_y)$ , alors  $\theta_y = \pi - \sigma_y$ .

Dans les deux cas particuliers où  $\vec{v} = (1 \ 0 \ 0)$  et  $\vec{v} = (-1 \ 0 \ 0)$ , le calcul de  $\sqrt{z^2 + y^2} = 0$  ce qui provoquera des divisions par zéro dans nos calculs. La détermination des dans pour ces deux cas étant trivial sont laissés à la discrétion du lecteur. ■

## La matrice de rotation selon un axe $u$

Soit un axe de rotation  $u$  normalisé tel que

$$\hat{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k} \quad \text{où} \quad \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = 1$$

dans un système d'axe  $xyz$ . La matrice de transformation permettant d'effectuer une rotation d'un angle  $\theta_u$  autour de l'axe  $\hat{u}$  passant par l'origine est

$$R_u = \hat{u} \hat{u}^T + (I - \hat{u} \hat{u}^T) \cos(\theta_u) + \begin{pmatrix} 0 & -u_z & u_y & 0 \\ u_z & 0 & -u_x & 0 \\ -u_y & u_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sin(\theta_u) .$$

Cette matrice peut être simplifiée sous la forme

$$R_u = \begin{pmatrix} u_x^2 + (1 - u_x^2) c_u & u_x u_y (1 - c_u) - u_z s_u & u_x u_z (1 - c_u) + u_y s_u & 0 \\ u_x u_y (1 - c_u) + u_z s_u & u_y^2 + (1 - u_y^2) c_u & u_y u_z (1 - c_u) - u_x s_u & 0 \\ u_x u_z (1 - c_u) - u_y s_u & u_y u_z (1 - c_u) + u_x s_u & u_z^2 + (1 - u_z^2) c_u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tel que

$$c_u = \cos(\theta_u) \quad \text{et} \quad s_u = \sin(\theta_u) .$$

Dans la littérature, cette matrice porte le nom de la matrice des cosinus directionnels (*direction cosine matrix*).

Preuve :

En construction ...



## La matrice d'homothétie, rotation xyz et translation

La matrice de transformation  $M_{TrRzyxSc}$  effectuant dans l'ordre<sup>4</sup> une homothétie, une rotation autour de l'axe  $x$ , l'axe  $y$  et l'axe  $z$  et une translation correspond au produit des cinq matrices  $Sc$ ,  $R_x$ ,  $R_y$ ,  $R_z$  et  $Tr$  dans l'ordre tel que

$$M_{TrRzyxSc} = Tr \cdot R_z \cdot R_y \cdot R_x \cdot Sc$$

(l'ordre objet vers monde)

que l'on peut résoudre algébriquement afin d'obtenir le résultat

$$M_{TrRzyxSc} = \begin{pmatrix} sc_x(c_y c_z) & sc_y(s_x s_y c_z - c_x s_z) & sc_z(c_x s_y c_z + s_x s_z) & tr_x \\ sc_x(c_y s_z) & sc_y(s_x s_y s_z + c_x c_z) & sc_z(c_x s_y s_z - s_x c_z) & tr_y \\ -sc_x(s_y) & sc_y(s_x c_y) & sc_z(c_x c_y) & tr_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où

$$c_x = \cos(\theta_x), \quad s_x = \sin(\theta_x), \quad c_y = \cos(\theta_y), \quad s_y = \sin(\theta_y), \quad c_z = \cos(\theta_z) \quad \text{et} \quad s_z = \sin(\theta_z) .$$

Preuve :

Développons l'expression  $M_{TrRzyxSc} = Tr \cdot R_z \cdot R_y \cdot R_x \cdot Sc$  en réalisant algébriquement le produit des matrices :

$$M_{TrRzyxSc} = Tr \cdot R_z \cdot R_y \cdot R_x \cdot Sc$$

$$\Rightarrow M_{TrRzyxSc} = Tr \cdot R_{zyx} \cdot Sc$$

$$\Rightarrow M_{TrRzyxSc} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & tr_x \\ 0 & 1 & 0 & tr_y \\ 0 & 0 & 1 & tr_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_y c_z & s_x s_y c_z - c_x s_z & c_x s_y c_z + s_x s_z & 0 \\ c_y s_z & s_x s_y s_z + c_x c_z & c_x s_y s_z - s_x c_z & 0 \\ -s_y & s_x c_y & c_x c_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sc_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sc_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sc_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_{TrRzyxSc} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & tr_x \\ 0 & 1 & 0 & tr_y \\ 0 & 0 & 1 & tr_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sc_x(c_y c_z) & sc_y(s_x s_y c_z - c_x s_z) & sc_z(c_x s_y c_z + s_x s_z) & 0 \\ sc_x(c_y s_z) & sc_y(s_x s_y s_z + c_x c_z) & sc_z(c_x s_y s_z - s_x c_z) & 0 \\ -sc_x(s_y) & sc_y(s_x c_y) & sc_z(c_x c_y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_{TrRzyxSc} = \begin{pmatrix} sc_x(c_y c_z) & sc_y(s_x s_y c_z - c_x s_z) & sc_z(c_x s_y c_z + s_x s_z) & tr_x \\ sc_x(c_y s_z) & sc_y(s_x s_y s_z + c_x c_z) & sc_z(c_x s_y s_z - s_x c_z) & tr_y \\ -sc_x(s_y) & sc_y(s_x c_y) & sc_z(c_x c_y) & tr_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \blacksquare$$

<sup>4</sup> Ceci est valide en raison de la convention droite gauche des multiplications  $\vec{v} = M \vec{u}$

## La matrice de translation, rotation zyx et d'homothétie

La matrice de transformation  $M_{ScRxyzTr}$  effectuant dans l'ordre<sup>5</sup> une translation, une rotation autour de l'axe  $z$ , l'axe  $y$  et l'axe  $x$  et une homothétie correspond au produit des cinq matrices  $Tr$ ,  $R_z$ ,  $R_y$ ,  $R_x$  et  $Sc$  dans l'ordre tel que

$$M_{ScRxyzTr} = Sc \cdot R_x \cdot R_y \cdot R_z \cdot Tr$$

(l'ordre monde vers objet)

que l'on peut résoudre algébriquement afin d'obtenir le résultat

$$M_{ScRxyzTr} = \begin{pmatrix} sc_x(c_y c_z) & -sc_x(c_y s_z) & sc_x(s_y) & sc_x(c_y c_z tr_x - c_y s_z tr_y + s_y tr_z) \\ sc_y R_{10} & sc_y R_{11} & -sc_y(s_x c_y) & sc_y(R_{10} tr_x + R_{11} tr_y - s_x c_y tr_z) \\ sc_z R_{20} & sc_z R_{21} & sc_z c_x c_y & sc_z(R_{20} tr_x + R_{21} tr_y + c_x c_y tr_z) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où

$$R_{10} = c_x s_z + s_x s_y c_z, \quad R_{11} = c_x c_z - s_x s_y s_z, \quad R_{20} = s_x s_z - c_x s_y c_z \quad \text{et} \quad R_{21} = s_x c_z + c_x s_y s_z.$$

avec

$$c_x = \cos(\theta_x), \quad s_x = \sin(\theta_x), \quad c_y = \cos(\theta_y), \quad s_y = \sin(\theta_y), \quad c_z = \cos(\theta_z) \quad \text{et} \quad s_z = \sin(\theta_z).$$

Preuve :

Développons l'expression  $M_{ScRxyzTr} = Sc \cdot R_x \cdot R_y \cdot R_z \cdot Tr$  en réalisant algébriquement le produit des matrices :

$$M_{ScRxyzTr} = Sc \cdot R_x \cdot R_y \cdot R_z \cdot Tr$$

$$\Rightarrow M_{ScRxyzTr} = Sc \cdot R_{xyz} \cdot Tr$$

$$\Rightarrow M_{ScRxyzTr} = \begin{pmatrix} sc_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sc_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sc_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_y c_z & -c_y s_z & s_y & 0 \\ c_x s_z + s_x s_y c_z & c_x c_z - s_x s_y s_z & -s_x c_y & 0 \\ s_x s_z - c_x s_y c_z & s_x c_z + c_x s_y s_z & c_x c_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & tr_x \\ 0 & 1 & 0 & tr_y \\ 0 & 0 & 1 & tr_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Afin d'alléger la notation, introduisons les définitions

$$R_{10} = c_x s_z + s_x s_y c_z, \quad R_{11} = c_x c_z - s_x s_y s_z, \quad R_{20} = s_x s_z - c_x s_y c_z \quad \text{et} \quad R_{21} = s_x c_z + c_x s_y s_z.$$

<sup>5</sup> Ceci est valide en raison de la convention droite gauche des multiplications  $\vec{v} = M \vec{u}$

Après avoir simplifié la notation de notre expression, complétons le calcul matriciel :

$$\begin{aligned}
 M_{ScRxyzTr} &= \begin{pmatrix} sc_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sc_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sc_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_y c_z & -c_y s_z & s_y & 0 \\ R_{10} & R_{11} & -s_x c_y & 0 \\ R_{20} & R_{21} & c_x c_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & tr_x \\ 0 & 1 & 0 & tr_y \\ 0 & 0 & 1 & tr_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow M_{ScRxyzTr} &= \begin{pmatrix} sc_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sc_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sc_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_y c_z & -c_y s_z & s_y & c_y c_z tr_x - c_y s_z tr_y + s_y tr_z \\ R_{10} & R_{11} & -s_x c_y & R_{10} tr_x + R_{11} tr_y - s_x c_y tr_z \\ R_{20} & R_{21} & c_x c_y & R_{20} tr_x + R_{21} tr_y + c_x c_y tr_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow M_{ScRxyzTr} &= \begin{pmatrix} sc_x(c_y c_z) & -sc_x(c_y s_z) & sc_x(s_y) & sc_x(c_y c_z tr_x - c_y s_z tr_y + s_y tr_z) \\ sc_y R_{10} & sc_y R_{11} & -sc_y(s_x c_y) & sc_y(R_{10} tr_x + R_{11} tr_y - s_x c_y tr_z) \\ sc_z R_{20} & sc_z R_{21} & sc_z c_x c_y & sc_z(R_{20} tr_x + R_{21} tr_y + c_x c_y tr_z) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \blacksquare
 \end{aligned}$$

## La matrice de transformation objet-monde et monde-objet

La **matrice de transformation**  $M_{o \rightarrow m}$  de l'espace objet vers l'espace monde a été définie tel que

$$M_{o \rightarrow m} = Tr \cdot R_z \cdot R_y \cdot R_x \cdot Sc$$

ce qui correspond à l'expression

$$M_{o \rightarrow m} = M_{TrRzyxSc}$$

avec les paramètres

$$\begin{aligned}
 Sc &= Sc(sc_x, sc_y, sc_z), R_x = R_x(\theta_x), R_y = R_y(\theta_y), \\
 R_z &= R_z(\theta_z) \text{ et } Tr = Tr(tr_x, tr_y, tr_z).
 \end{aligned}$$

Pour ce qui est de la **matrice de transformation**  $M_{m \rightarrow o}$  de l'espace monde vers l'espace objet, il faut s'assurer que l'identité

$$I = M_{o \rightarrow m} \cdot M_{m \rightarrow o} = M_{m \rightarrow o} \cdot M_{o \rightarrow m}$$

où  $I$  est la matrice identité est belle et bien respectée.

Puisque les formes des matrices d'homothéties, de rotation et de translation sont semblables à leur inverse, nous pouvons modifier les différents paramètres de ces matrices afin de respecter notre identité et utiliser la forme de la matrice  $M_{ScRxyzTr}$  pour construire la matrice de transformation  $M_{m \rightarrow o}$ . Ceci nous permet d'affirmer que

$$M_{m \rightarrow o} = M_{ScRxyzTr}$$

avec les paramètres

$$Sc = Sc(1/sc_x, 1/sc_y, 1/sc_z), R_x = R_x(-\theta_x), R_y = R_y(-\theta_y), R_z = R_z(-\theta_z) \text{ et } Tr = Tr(-tr_x, -tr_y, -tr_z).$$

Preuve :

La preuve proposée nécessite d'effectuer le calcul

$$I = M_{o \rightarrow m} \cdot M_{m \rightarrow o} = M_{TrRzyxSc} \cdot M_{ScRxyzTr}$$

avec des paramètres

$$Sc = Sc(sc_x, sc_y, sc_z), R_x = R_x(\theta_x), R_y = R_y(\theta_y), R_z = R_z(\theta_z) \text{ et } Tr = Tr(tr_x, tr_y, tr_z)$$

pour la matrice  $M_{TrRzyxSc}$  et avec des paramètres

$$Sc = Sc(1/sc_x, 1/sc_y, 1/sc_z), R_x = R_x(-\theta_x), R_y = R_y(-\theta_y), R_z = R_z(-\theta_z) \text{ et } Tr = Tr(-tr_x, -tr_y, -tr_z)$$

pour la matrice  $M_{ScRxyzTr}$ .

Cependant, ce long calcul est laissé à la discrétion du lecteur.











# Chapitre 6.X2 – Le partitionnement de l'espace des géométries dans le *ray tracer*

## Le partitionnement linéaire

Le partitionnement linéaire de l'espace des géométries correspond à une absence d'organisation de l'espace. Pour évaluer l'intersection d'un rayon avec les géométries de l'espace, il faut itérer sur l'ensemble des géométries afin de trouver l'intersection de temps minimale (s'il y a intersection). Cette approche est extrêmement coûteuse en ressource lorsque le nombre de géométries est élevé. Cependant, elle peut être performante uniquement que lorsque l'espace des géométries contient très peu de géométries.

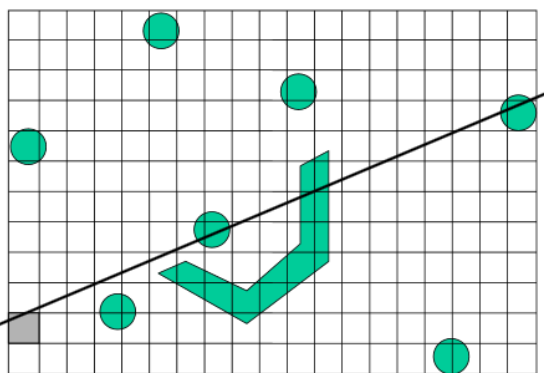
## Le partitionnement de l'espace par voxel

Un voxel est une boîte dans un grillage régulier en trois dimensions. Les coordonnées d'un voxel  $(x_v, y_v, z_v)$  sont des valeurs entières. En attribuant une largeur  $L$  à un voxel dans un espace monde où sont situés des géométries, on peut localiser un point  $(x, y, z)$  de l'espace monde dans l'espace des voxel. En englobant nos géométries à l'aide d'une boîte alignée sur les axes  $x, y$  et  $z$  de l'espace monde, on peut situer la présence des géométries dans l'espace des voxels. Une petite boîte englobante peut permettre à une géométrie d'être localisée dans un seul voxel et une grosse boîte englobante localisera la géométrie dans plusieurs voxels.

Lors d'un test d'intersection entre un rayon et les multiples géométries de l'espace des géométries, au lieu de tester l'ensemble des géométries, on localise la position initiale du rayon dans l'espace des voxels et l'on parcourt les voxels dans la direction du rayon jusqu'à obtenir une intersection valide. Seuls les géométries appartenant à un voxel sont testé lors de la recherche de la 1<sup>ière</sup> intersection ce qui réduit considérablement le nombre de tests à effectuer.

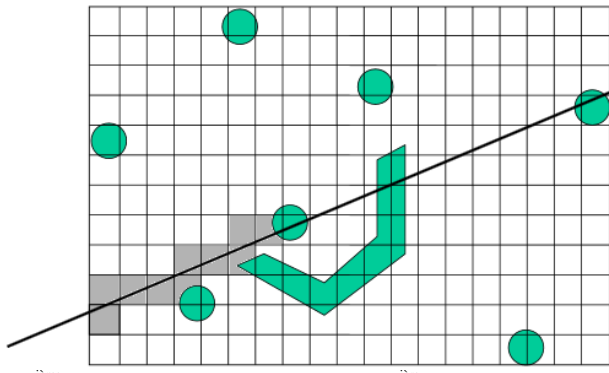
Pour qu'une intersection soit valide, il est impératif que la position de l'intersection avec une géométrie soit localisée à l'intérieur du voxel courant puisqu'une géométrie peut occuper plusieurs voxels.

Grilles



Premier voxel visité lors de la recherche de la 1<sup>ière</sup> intersection dont le point intersecté est à l'intérieur du voxel courant.

Grilles



10<sup>ième</sup> voxel visité lors de la recherche de la 1<sup>ière</sup> intersection. Le point intersecté étant dans le 10<sup>ième</sup> voxel, il est retenu comme étant la 1<sup>ière</sup> intersection.

<https://admission.umontreal.ca/cours-et-horaires/cours/IFT-3355/>













