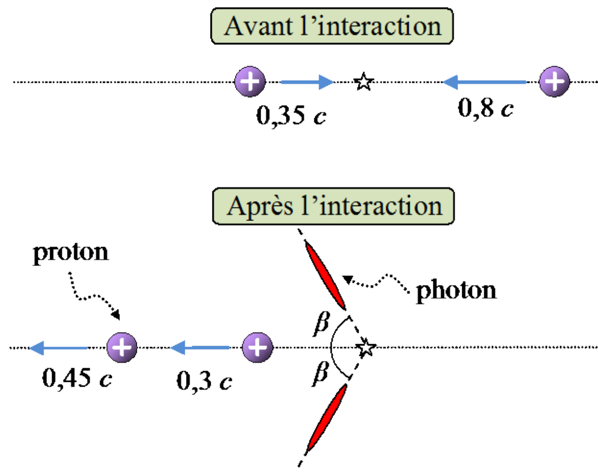
Ondes et physique moderne

Pré requis : Section 4.9

La collision de deux protons relativistes

Deux protons relativistes initialement très éloignés foncent l'un vers l'autre avec une vitesse de $0{,}35c$ et de $0{,}8c$ selon le référentiel d'un laboratoire. Après leur interaction, on observe que les protons se déplacent dans le même sens à une vitesse de $0{,}45c$ et de $0{,}3c$ tel qu'illustré sur le schéma ci-contre.

Cependant, l'interaction nucléaire entre les protons a fait jaillir deux particules sans masse portant le nom de photon. Elles se déplacent à la vitesse de la lumière selon une orientation symétrique par rapport à l'axe du déplacement des protons.



a) Quelle est l'énergie transportée par <u>un photon</u> **en GeV**.

b) Établissez une expression permettant de relier l'énergie d'un photon à sa quantité de mouvement même si celle-ci ne possède pas de masse.

c) Dans quelle direction β (angle par rapport à l'axe de déplacement des protons) les deux photons sont-ils diffusés.

Solution :

Selon le référentiel du laboratoire, évaluons les facteurs de Lorentz des protons de gauche et de droite avant et après l'interaction à l'aide de l'équation

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad \text{avec} \quad c = 3\times 10^8 \text{ m/s}.$$

Interaction	Proton de gauche		Proton de droite	
	Vitesse	Facteur Lorentz	Vitesse	Facteur Lorentz
Avant	$v_{x\mathrm{G}i} = 0{,}35c$	$\gamma_{\mathrm{G}i} = 1{,}0675$	$v_{x\mathrm{D}i} = -0{,}8c$	$\gamma_{\mathrm{D}i} = 1{,}6667$
Après	$v_{x\mathrm{G}f} = -0{,}45c$	$\gamma_{\mathrm{G}f} = 1{,}1198$	$v_{x\mathrm{D}f} = -0{,}3c$	$\gamma_{\mathrm{D}f} = 1{,}0483$

Ondes et physique moderne

Pré requis : Section 4.9

Évaluons l'énergie des protons avant et après l'interaction avec l'expression relativiste

$$E = \gamma mc^2 \quad \text{avec} \quad m = m_\mathrm{p} = 1{,}67\times10^{-27}\ \mathrm{kg}\ \text{ et }\ c = 3\times10^8\ \mathrm{m/s}$$

Interaction	Proton de gauche	Proton de droite
Avant	$E_{\mathrm{G}i} = 1{,}6045\times10^{-10}\ \mathrm{J}$	$E_{\mathrm{D}i} = 2{,}5050\times10^{-10}\ \mathrm{J}$
Après	$E_{\mathrm{G}f} = 1{,}6830\times10^{-10}\ \mathrm{J}$	$E_{\mathrm{D}f} = 1{,}5756\times10^{-10}\ \mathrm{J}$

Évaluons l'énergie de chacun des photons à l'aide de la conservation de l'énergie en considérant qu'il n'y a pas de travail non conservatif : ($W_\mathrm{nc} = 0$)

$$E_f = E_i + W_\mathrm{nc}$$

$$\Rightarrow \quad \left(E_{\mathrm{G}f} + E_{\mathrm{D}f} + 2E_\gamma\right) = \left(E_{\mathrm{G}i} + E_{\mathrm{D}i}\right) + (0)$$

$$\Rightarrow \quad \left(1{,}6830\times10^{-10}\right) + \left(1{,}5756\times10^{-10}\right) + 2E_\gamma = \left(1{,}6045\times10^{-10}\right) + \left(2{,}5050\times10^{-10}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E_\gamma = 4{,}2544\times10^{-11}\ \mathrm{J}}$$

$$\Rightarrow \quad E_\gamma = 4{,}2544\times10^{-11}\ \mathrm{J}\times\frac{\mathrm{G}}{1\times10^9}\times\frac{1\mathrm{eV}}{1{,}6\times10^{-19}\ \mathrm{J}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E_\gamma = 0{,}2659\ \ \mathrm{GeV}} \quad \textbf{(a)}$$

À partir de l'énergie relativiste d'une particule libre

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

qui représente une version alternative de l'équation

$$E = \gamma mc^2\ ,$$

établissons une relation énergie-quantité de mouvement pour le photon de <u>masse nulle</u> :

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \quad \Rightarrow \quad \left(E_\gamma\right)^2 = p^2c^2 \qquad (m = 0)$$

$$\Rightarrow \quad E_\gamma = pc \quad \textbf{(b)} \qquad \text{(Appliquer la racine carrée)}$$

<u>Remarque :</u>

Il est important de réaliser que cette relation en lien l'énergie du photon et le module de sa quantité de mouvement ($p = \sqrt{{p_x}^2 + {p_y}^2 + {p_z}^2}$).

Pré requis : Section 4.9

Évaluons les quantités de mouvement des protons avant et après l'interaction selon l'axe x avec l'expression

$$p_x = \gamma m v_x \quad \text{où} \quad m = m_\mathrm{p} = 1{,}67\times10^{-27}\ \mathrm{kg}\,.$$

Interaction	Proton de gauche	Proton de droite
Avant	$p_{x\mathrm{G}i} = 1{,}8719\times10^{-19}\ \mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$	$p_{x\mathrm{D}i} = -6{,}6800\times10^{-19}\ \mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$
Après	$p_{x\mathrm{G}f} = -2{,}5246\times10^{-19}\ \mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$	$p_{x\mathrm{D}f} = -1{,}5756\times10^{-19}\ \mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$

Évaluons la quantité de mouvement transportée par chaque photon par conservation de la quantité de mouvement selon l'axe du mouvement étant l'axe x :

$$\sum p_{xf} = \sum p_{xi}$$

$$\Rightarrow \quad \left(p_{x\mathrm{D}i} + p_{x\mathrm{G}i} + 2p_{x\gamma}\right) = \left(p_{x\mathrm{D}i} + p_{x\mathrm{G}i}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \left(-2{,}5246\times10^{-19}\right) + \left(-1{,}5756\times10^{-19}\right) + 2p_{x\gamma} = \left(1{,}8719\times10^{-19}\right) + \left(-6{,}6800\times10^{-19}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{p_{x\gamma} = -3{,}5399\times10^{-20}\ \mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}}$$

Évaluons le module de la quantité de mouvement transporté par un photon à l'aide de sa relation énergie-quantité de mouvement :

$$E_\gamma = p_\gamma c \quad \Rightarrow \quad \left(4{,}2544\times10^{-11}\right) = p_\gamma\left(3\times10^{-8}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{p_\gamma = 1{,}4181\times10^{-19}\ \mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}}$$

Évaluons l'angle de diffusion θ à partir de la décomposition du module de la quantité de mouvement d'un photon selon l'axe x :

$$p_{x\gamma} = p_\gamma \cos(\theta) \quad \Rightarrow \quad \left(-3{,}5399\times10^{-20}\right) = \left(1{,}4181\times10^{-19}\right)\cos(\theta)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\theta = 104{,}45^\circ} \quad \text{(par rapport à l'axe } x\text{)}$$

Traduisons cet angle selon l'axe $-x$ correspondant au sens du mouvement des protons après l'interaction :

$$\beta = 180^\circ - \theta \quad \Rightarrow \quad \beta = 180^\circ - \left(104{,}45^\circ\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\beta = 75{,}55^\circ} \quad \textbf{(c)}$$