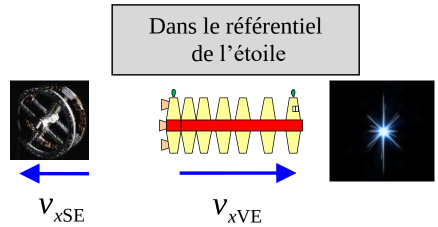
Ondes et physique moderne

Pré requis : Section 4.7

Vidange spatiale

Un vaisseau vidange se dirige à une vitesse égale à 0,6 c vers une étoile selon le référentiel de l'étoile pour y détruire des déchets dangereux accumulés par une civilisation depuis des centaines d'année. D'après le référentiel de l'étoile, le vaisseau vidange possède une longueur de 12 km. Une station orbitale s'éloignant de l'étoile à une vitesse égale à 0,2 c par rapport à l'étoile observe le scénario.



Lorsque le nez du vaisseau vidange commence à pénétrer dans l'étoile, un signal lumineux de 500 nm (selon le référentiel du vaisseau) est émis à l'avant du vaisseau dans toutes les directions à l'extérieur du vaisseau. En même temps, un signal lumineux voyageant dans une fibre optique à une vitesse $v_{(\mathrm{V})} = c / n_\mathrm{V}$ est envoyé vers l'arrière du vaisseau. L'indice de réfraction de la fibre optique est $n_\mathrm{V} = 1,25$ (selon le vaisseau).

Lorsque l'arrière du vaisseau capte le signal de la fibre optique, un nouveau signal lumineux de 500 nm (selon le référentiel du vaisseau) est émis à l'arrière du vaisseau dans toutes les directions à l'extérieur du vaisseau.

a) Dans le référentiel de la station orbitale, quelle est la longueur d'onde des deux signaux lumineux se dirigeant vers la station orbitale.
b) Dans le référentiel de la station orbitale, quelle est la distance qui sépare les deux signaux lumineux se dirigeant vers la station orbitale après l'émission de ceux-ci.

<u>Remarque :</u>

L'indice de réfraction de la fibre optique <u>n'est pas un invariant</u>. La vitesse

$$v_{(\mathrm{S})} = c / n_\mathrm{S}$$

n'est pas aussi directe, car la transformation n_V vers n_S n'a pas été démontrée. Ainsi, la vitesse du signal dans la fibre optique se doit d'être transformée comme une vitesse si l'on désire la représenter dans un autre référentiel.

Pré requis : Section 4.7

Solution :

Soulignons la présence de trois référentiels :

Référentiel **S** : Station orbitale
Référentiel **V**: Vaisseau vidange
Référentiel **E** : Étoile

Soulignons la présence de deux événements :

E1 : Signal lumineux envoyé par le nez du vaisseau et transmission du signal électrique.
E2 : Réception du signal électrique et émission d'un nouveau signal lumineux.

Voici les informations sur les vitesses :

1) Vitesse relative de **V** par rapport à **E** : $v_{x\mathrm{VE}} = 0{,}6c$

2) Vitesse relative de **S** par rapport à **E** : $v_{x\mathrm{SE}} = -0{,}2c$

Évaluons la vitesse relative du vaisseau vidange par rapport à la station orbitale :

$$v_{x\mathrm{VS}} = \frac{v_{x\mathrm{VE}} + v_{x\mathrm{ES}}}{1 + \left(\frac{v_{x\mathrm{VE}}}{c}\right)\left(\frac{v_{x\mathrm{ES}}}{c}\right)} \quad \Rightarrow \quad v_{x\mathrm{VS}} = \frac{v_{x\mathrm{VE}} + \left(-v_{x\mathrm{SE}}\right)}{1 + \left(\frac{v_{x\mathrm{VE}}}{c}\right)\left(\frac{\left(-v_{x\mathrm{SE}}\right)}{c}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad v_{x\mathrm{VS}} = \frac{(0{,}6c) + (--0{,}2c)}{1 + \left(\frac{0{,}6c}{c}\right)\left(\frac{(--0{,}2c)}{c}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad v_{x\mathrm{VS}} = \frac{0{,}8c}{1 + 0{,}12}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_{x\mathrm{VS}} = 0{,}7143c}$$

Ondes et physique moderne

Pré requis : Section 4.7

Évaluons la longueur d'onde la lumière observée par la station orbitale dans le référentiel de la station orbitale à partir de l'effet Doppler lumineux :

$$f_S = \frac{\sqrt{c \pm v_{x\mathrm{VS}}}}{\sqrt{c \mp v_{x\mathrm{VS}}}} f_V \quad \Rightarrow \quad f_S = \frac{\sqrt{c - v_{x\mathrm{VS}}}}{\sqrt{c + v_{x\mathrm{VS}}}} f_V \qquad \text{(Éloignement)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{c}{\lambda_S} = \frac{\sqrt{c - v_{x\mathrm{VS}}}}{\sqrt{c + v_{x\mathrm{VS}}}} \frac{c}{\lambda_V} \qquad \left(\text{Remplacer } \lambda = cT = \frac{c}{f}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_S = \lambda_V \frac{\sqrt{c + v_{x\mathrm{VS}}}}{\sqrt{c - v_{x\mathrm{VS}}}} \qquad (\text{Isoler } \lambda_S)$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_S = \lambda_V \frac{\sqrt{c + (0{,}7143c)}}{\sqrt{c - (0{,}7143c)}}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_S = (500\,\mathrm{nm})(2{,}4496)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\lambda_S = 1225 \ \mathrm{nm}} \qquad \textbf{(a)}$$

Évaluons la longueur vaisseau vidange dans son référentiel (longueur propre) :

$$\gamma_{\mathrm{VE}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Rightarrow \quad \gamma_{\mathrm{VE}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{0{,}6c}{c}\right)^2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\gamma_{\mathrm{VE}} = 1{,}25}$$

$$L_E = \frac{L_V}{\gamma_{\mathrm{VE}}} \quad \Rightarrow \quad (12\,\mathrm{km}) = \frac{L_V}{(1{,}25)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{L_V = 15 \ \mathrm{km}}$$

Évaluons la vitesse de la lumière voyageant dans la fibre optique dans le référentiel du vaisseau **V** :

$$v = \frac{c}{n} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{c}{(1{,}25)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = 0{,}8c}$$

Évaluons le temps de voyagement du signal dans la fibre optique dans le référentiel du vaisseau vidange sachant que le signal recule sur une distance L_V à vitesse $v = c/n$:

$$\Delta x_V = v \Delta t_V \quad \Rightarrow \quad (-L_V) = (-0{,}8c)\Delta t_V$$

$$\Rightarrow \quad (-15\,000) = -0{,}8\left(3\times 10^8\right)\Delta t_V$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta t_V = 62{,}5 \ \mu\mathrm{s}}$$

Ondes et physique moderne

Pré requis : Section 4.7

Voici les mesures de nos deux événements d'après le référentiel du vaisseau **V** :

Référentiel V	**Événement 1**	**Événement 2**
Position	$x_{V(1)} = 0$	$x_{V(2)} = -15 \text{ km}$
Temps	$t_{V(1)} = 0$	$t_{V(2)} = 62{,}5 \ \mu\text{s}$

À l'aide des transformations de Lorentz, évaluons nos deux événements : $(v_{xVS} = 0{,}7143c)$

$$\gamma_{VS} = \frac{1}{\sqrt{1 - {v_{xVS}}^2 / c^2}} \quad \Rightarrow \quad \gamma_{VS} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0{,}7143c)^2 / c^2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\gamma = 1{,}429}$$

Référentiel S	**Événement 1**	**Événement 2**
Position	$x_{S(1)} = 0 \text{ m}$	$x_{S(2)} = \gamma_{VS}\left(x_{V(2)} + v_{xVS}\, t_{V(2)}\right)$ $= (1{,}429)\left((-15000) + (0{,}7143c)(62{,}5\times10^{-6})\right)$ $= -2296 \text{ m}$
Temps	$t_{S(1)} = 0 \text{ s}$	$t_{S(2)} = \gamma_{VS}\left(t_{V(2)} + \dfrac{x_{V(2)} v_{xVS}}{c^2}\right)$ $= (1{,}429)\left((62{,}5\times10^{-6}) + \dfrac{(-15000)(0{,}7143c)}{c^2}\right)$ $= 3{,}828\times10^{-5} \text{ s}$ $= 38{,}28 \ \mu\text{s}$

Dans le référentiel de la station orbitale **S**, évaluons le déplacement du signal lumineux du nez du vaisseau entre l'événement 1 et l'événement 2 en considérant que celui-ci se déplace dans le sens négatif de l'axe x à la vitesse c :

$$x_S = x_{0S} + v t_S \quad \Rightarrow \quad x_S = x_{0S} + (-c)\, t_{S(2)}$$

$$\Rightarrow \quad x_S = (0) - (3\times10^8)(38{,}28\times10^{-6})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x_S = -11484 \text{ m}}$$

Pré requis : Section 4.7

Évaluons la distance entre les deux signaux au moment de la réalisation de l'événement 2 dans le référentiel de la station orbitale **S** :

$$|\Delta x_S| = |x_{S(2)} - x_S| \quad \Rightarrow \quad |\Delta x_S| = |(-2296) - (-11484)|$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{|\Delta x_S| = 9188 \text{ m}} \qquad \textbf{(b)}$$

N.B. Il est à noté que le premier signal lumineux se retrouve à l'avant du deuxième signal lumineux. Ceci s'explique par le fait que les signaux lumineux à l'extérieur du vaisseau vidange voyage plus rapidement que le signal dans la fibre optique.

Ondes et physique moderne

Pré requis : Section 4.7

Solution alternative :

Résoudre la cinématique du signal **M** dans le référentiel de la station orbitale **S**.

Évaluer la vitesse du signal selon la station par l'addition des vitesses relatives :

$$v_{x\text{MS}} = \frac{v_{x\text{MV}} + v_{x\text{VS}}}{1 + \left(\frac{v_{x\text{MV}}}{c}\right)\left(\frac{v_{x\text{VS}}}{c}\right)} \quad \Rightarrow \quad v_{x\text{MS}} = \frac{(-0{,}8c) + (0{,}7143c)}{1 + \left(\frac{(-0{,}8c)}{c}\right)\left(\frac{(0{,}7143c)}{c}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad v_{x\text{MS}} = \frac{-0{,}0857c}{1 - 0{,}57144}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_{x\text{MS}} = -0{,}2c}$$

Remarque :

Bien que le signal soit de la lumière, puisqu'elle ne voyage pas à la vitesse c, on se doit d'effectuer le calcul de l'addition des vitesses, car le résultat ne sera pas c.

Évaluer le temps requis pour le signal de passer de l'avant du vaisseau à l'arrière du vaisseau sachant que l'arrière du vaisseau se déplace à une vitesse $v_{x\text{VS}}$ selon la station orbitale S et que la longueur du vaisseau selon la station orbitale est contractée :

$$\Delta x_{\text{S}} = v_{x\text{S}} \Delta t_{\text{S}} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{L_0}{\gamma_{\text{VS}}}\right) = \left(|v_{x\text{MS}}| + |v_{x\text{VS}}|\right)\Delta t_{\text{S}}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta t_{\text{S}} = \frac{L_0}{\gamma_{\text{VS}}} / \left(|v_{x\text{MS}}| + |v_{x\text{VS}}|\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta t_{\text{S}} = 38{,}27 \ \mu\text{s}}$$

Évaluons le déplacement relatif entre le signal et la lumière voyageant à l'extérieur du vaisseau V selon le référentiel S ce qui nécessite le temps Δt_{S} afin d'évaluer la distance entre les deux signaux lumineux voyageant à l'extérieur du vaisseau (selon **S**):

$$\Delta x_{\text{S}} = (c - v_{x\text{MS}})\Delta t_{\text{S}} \quad \Rightarrow \quad \Delta x_{\text{S}} = (c - 0{,}2c)\Delta t_{\text{S}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta x_{\text{S}} = 9185 \ \text{m}}$$