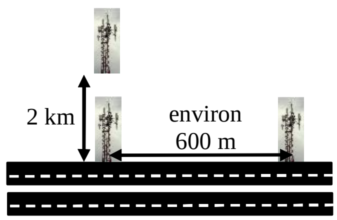
Près de deux antennes radio

Deux antennes radio espacées de 2 km sont alignées perpendiculairement à une autoroute rectiligne dont l'une d'elle est située en bordure de l'autoroute (distance négligeable, voir schéma ci-contre). Ces deux antennes sont munies d'émetteurs à micro-ondes en phase de 2,5 MHz.



https://projetsnordiques.com/fr/blog/2014/12/15/tour-de-communication-abitibi-temiscamingue/

Pour capter le signal amplifié par interférence à environ 600 mètres de l'antenne située en bordure de l'autoroute, on y installe une antenne réceptrice.

Évaluez la position exacte de l'antenne réceptrice. Votre réponse se doit d'être <u>le plus près possible de 600 m de distance</u> tout en respectant l'exigence de l'amplification.

<u>Solution :</u>

Évaluons la longueur d'onde du signal :

$$\lambda = vT \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{v}{f} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{(3\times 10^8)}{(2{,}5\times 10^6)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda = 120\ \text{m}}$$

Voici l'expression des distances entre les deux tours et la tour à relais :

- $r_1 = x$ (tour en bordure de l'autoroute)
- $r_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ où $y = 2\ \text{km}$ (tour éloignée de l'autoroute)

Appliquons le critère de <u>l'interférence constructive</u> $\delta = m\lambda$ afin d'évaluer une relation entre la distance x recherchée et le nombre m de longueurs d'ondes introduites dans la différence de marche :

$$\delta = m\lambda \quad \Rightarrow \quad r_2 - r_1 = m\lambda$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{x^2 + y^2} - x = m\lambda$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{x^2 + y^2} = m\lambda + x$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = (m\lambda + x)^2$$

Ondes et physique moderne

Pré requis : Section 3.1

Isolons la coordonnée *x* de notre équation :

$$x^2 + y^2 = (m\lambda + x)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = m^2\lambda^2 + 2m\lambda x + x^2$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = m^2\lambda^2 + 2m\lambda x$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{y^2 - m^2\lambda^2}{2m\lambda}}$$

Évaluons l'expression de m si $x = 600\ \text{m}$ afin d'évaluer la distance *x* la plus près de 600 m pour un *m* entier. Utilisons $y = 2\ \text{km}$ comme la distance entre les deux tours :

$$y^2 = m^2\lambda^2 + 2m\lambda x \qquad \text{(Équation précédente)}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2\ m^2 + 2\lambda x\ m - y^2 = 0 \qquad \text{(Forme } Ax^2 + Bx + C = 0\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{-2\lambda x \pm \sqrt{(2\lambda x)^2 - 4(\lambda^2)(-y^2)}}{2(\lambda^2)} \qquad \left(\text{Solution : } x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}\right)$$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{-2(120\,\text{m})(600\,\text{m}) \pm \sqrt{\left(2(120\,\text{m})(600\,\text{m})\right)^2 - 4(120\,\text{m})^2\left(-(2000\,\text{m})^2\right)}}{2(120\,\text{m})^2}$$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{-2(120)(600) \pm \sqrt{\left(2(120)(600)\right)^2 - 4(120)^2\left(-(2000)^2\right)}}{2(120)^2} \qquad \text{(Simplifier les unités)}$$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{-1{,}44\times10^5 \pm \sqrt{2{,}5114\times10^{11}}}{2{,}88\times10^4} \qquad \text{(Calculer)}$$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{-1{,}44\times10^5 + 5{,}0114\times10^5}{2{,}88\times10^4} \qquad \text{(Garder la solution positive)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{m = 12{,}40} \qquad \text{(Évaluer } m\text{)}$$

Pour avoir la distance la plus près de 600 m, nous allons exploiter notre équation

$$x = \frac{y^2 - m^2\lambda^2}{2m\lambda}$$

Autour des deux entiers les plus près de $m = 12{,}40$.

Pré requis : Section 3.1

Pour $\lfloor m \rfloor = 12$:

$$x = \frac{y^2 - m^2\lambda^2}{2m\lambda} \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{(2000\,\mathrm{m})^2 - (12)^2(120\,\mathrm{m})^2}{2(12)(120\,\mathrm{m})}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{x = 688{,}9\ \mathrm{m}}$$

Pour $\lceil m \rceil = 13$:

$$x = \frac{y^2 - m^2\lambda^2}{2m\lambda} \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{(2000\,\mathrm{m})^2 - (13)^2(120\,\mathrm{m})^2}{2(13)(120\,\mathrm{m})}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{x = 502{,}05\ \mathrm{m}}$$

Puisque l'entier la distance la plus près de 600 m est $x = 688{,}9\ \mathrm{m}$, nous allons retenir cette position.

<u>La réponse :</u> $x = 688{,}9\ \mathrm{m}$.