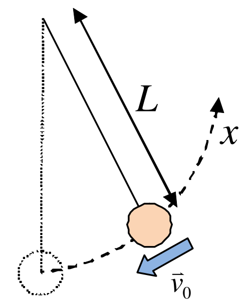
Ondes et physique moderne

Pré requis : Section 1.5

Oscillation du pendule lancé

Une boule de 1,2 kg est reliée à une corde de 80 cm afin de former un pendule. On fixe l'extrémité de la corde à 85 cm du sol à un support et on maintient la boule au repos. Par la suite, on élève la boule à une hauteur de 7 cm par rapport au sol tout en la déplaçant vers la droite afin de garder la corde tendue. À $t = 0$, on lance la boule avec une vitesse de 0,4 m/s tangentiellement à la trajectoire naturelle du pendule vers le bas tel qu'illustré sur le schéma ci-contre. On considère que la position initiale de la boule est du côté positif de l'axe x.



Écrivez l'équation de la position $x(t)$ de la boule en mètres en fonction du temps le long de sa trajectoire circulaire à l'aide d'une fonction sinus en prenant $x = 0$ comme étant la position d'équilibre (le point le plus bas du pendule).

Solution :

Évaluons la fréquence angulaire du pendule :

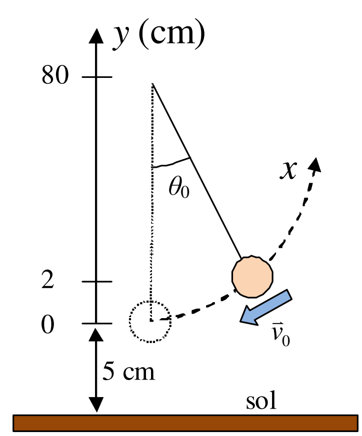
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{(9{,}8)}{(0{,}8)}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_0 = 3{,}5 \ \text{rad/s}}$$

Évaluons l'angle d'inclinaison initiale θ_0 du pendule à l'aide de la trigonométrie :

$$y_0 = L(1 - \cos(\theta_0)) \quad \Rightarrow \quad \cos(\theta_0) = 1 - \frac{y_0}{L}$$

$$\Rightarrow \quad \cos(\theta_0) = 1 - \frac{(0{,}02)}{(0{,}80)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\theta_0 = 12{,}84°}$$



Évaluons la position initiale x_0 de la boule en mètres selon l'axe x :

$$x_0 = L\theta_0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = (0{,}8)\left(\frac{12{,}84°}{360°} 2\pi\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x_0 = 0{,}1793 \ \text{m}}$$

Ondes et physique moderne

Pré requis : Section 1.5

Évaluons l'énergie initiale E du pendule en définissant $y = 0$ au point d'équilibre :

$$E = K + U_g \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{2}(1,2)(0,4)^2 + (1,2)(9,8)(0,02)$$

$$\Rightarrow \quad E = (0,096) + (0,2352)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E = 0,3312 \text{ J}}$$

Évaluons l'amplitude A des oscillations à partir de la relation énergie-amplitude appropriée :

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \quad \Rightarrow \quad (0,3312) = \frac{1}{2}(1,2)(3,5)^2 A^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A = 0,2123 \text{ m}}$$

Évaluons l'angle maximal $\theta_{\max}$ en degré afin de valider l'approximation des petits angles :

$$A = L\theta_{\max} \quad \Rightarrow \quad (0,2123) = (0,8)\theta_{\max}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\theta_{\max} = 0,2654 \text{ rad} = 15,20°}$$

<u>Remarque :</u> Cet angle maximal est à la <u>limite acceptable</u> de l'approximation des petits angles.

Évaluons l'expression de l'équation $x(t)$ du pendule :

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \phi) \quad \Rightarrow \quad x(t) = A\sin((3,5)t + \phi) \qquad \text{(Remplacer } \omega_0 = 3,5 \text{ rad/s)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x(t) = 0,2123\sin(3,5t + \phi)} \qquad \text{(Remplacer } A = 0,2123 \text{ m)}$$

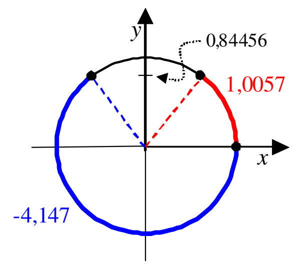
Pour évaluer notre constante de phase ϕ, simplifions notre équation de la position avec la condition initiale pour $t = 0$ qui est $x_0 = 0,1793$ m et $v_{x0} = -0,4$ m/s (signe en raison du sens) :

$$x(t) = 0,2123\sin(3,5t + \phi) \quad \Rightarrow \quad (0,1793) = 0,2123\sin(3,5(0) + \phi) \qquad \text{(Remplacer pour } t = 0\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{0,84456 = \sin(\phi)} \qquad \text{(Simplification)}$$

Pré requis : Section 1.5

Obtenons les constantes de phase admissibles :



$$0{,}84456 = \sin(\phi) \quad \Rightarrow \quad \phi = \arcsin(0{,}84456)$$

$$\Rightarrow \quad \phi = \{\ldots, -4{,}147,\ 1{,}0057,\ 2{,}136,\ \ldots\}$$

<u>P.S.</u> Calculatrice : $\phi = 1{,}0057\ \text{rad}$

Évaluons la vitesse v_x à $t = 0$ avec les deux constantes de phase à solution distincte :

$$v_x = A\omega\cos(\omega t + \phi) \quad \Rightarrow \quad v_x = (0{,}2123)(3{,}5)\cos((3{,}5)(0) + (1{,}0057)) \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_x = 0{,}3979\ \text{m/s}}$$

$$v_x = (0{,}2123)(3{,}5)\cos((3{,}5)(0) + (2{,}136)) \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_x = -0{,}3980\ \text{m/s}}$$

Puisque le pendule est lancé dans le <u>sens négatif de l'axe x</u> ($v_{x0} = -0{,}4\ \text{m/s}$), nous choisissons la constante de phase suivante :

$$\phi = 2{,}136\ \text{rad}$$

Ainsi, nous obtenons l'équation du mouvement du pendule $x(t)$ suivante :

$$x(t) = 0{,}2123\sin(3{,}5t + 2{,}136)$$