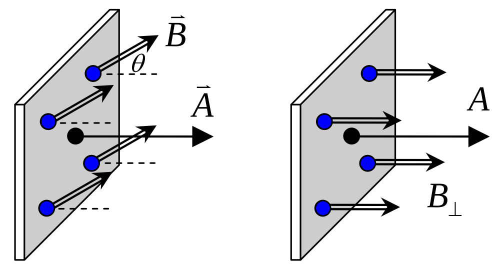
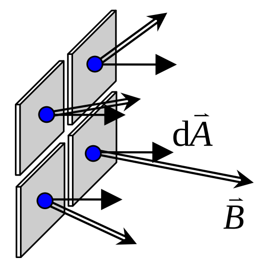
Chapitre 5.2 – La loi de Faraday

Le flux magnétique

Le flux magnétique Φ_m est un scalaire correspondant au module du champ magnétique perpendiculaire $B_\perp$ évalué sur une surface qui est multiplié par l'aire A de la surface. Puisque le champ magnétique $\vec{B}$ est vectoriel, il faut définir la surface $\vec{A}$ vectoriellement à l'aide d'une normale à la surface afin d'effectuer un produit scalaire transformant ainsi le produit du champ magnétique $\vec{B}$ avec la surface $\vec{A}$ en scalaire :

Flux magnétique Φ_m lorsque le champ magnétique $\vec{B}$ est **constant** sur la surface $\vec{A}$	Flux magnétique Φ_m lorsque le champ magnétique $\vec{B}$ est **arbitraire** sur la surface infinitésimale $d\vec{A}$
$\Phi_m = \vec{B}\cdot\vec{A} = \pm B_\perp A$	$\Phi_m = \iint \mathrm{d}\Phi_m = \iint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$
	

où Φ_m : Le flux magnétique en weber ($1\,\mathrm{Wb} = 1\,\mathrm{T}\cdot\mathrm{m}^2$)

$\mathrm{d}\Phi_m$: Flux magnétique infinitésimal évalué sur une surface infinitésimale (Wb)

$\vec{B}$: Champ magnétique évalué sur la surface $\vec{A}$ ou $\mathrm{d}\vec{A}$ (T)

$B_\perp$: Module du champ magnétique perpendiculaire à la surface $\vec{A}$ (T) ($B_\perp = B\cos(\theta)$)

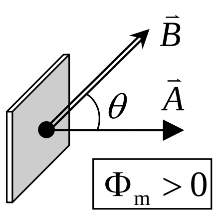
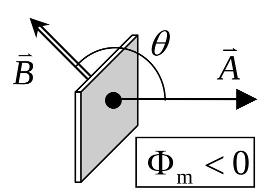
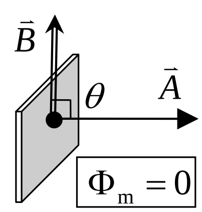
$\vec{A}$: Surface sur laquelle le flux magnétique est évalué (m^2)

A : Aire de la surface sur laquelle le flux magnétique est évalué (m^2)

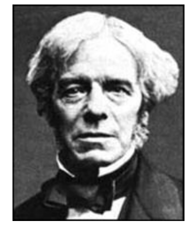
$\mathrm{d}\vec{A}$: Élément de surface infinitésimal sur laquelle on évalue le flux magnétique (m^2)

θ : Angle entre le champ magnétique $\vec{B}$ et le vecteur surface $\vec{A}$

Conventions :

Flux magnétique positif	**Flux magnétique négatif**	**Flux magnétique nul**
$\Phi_m = \vec{B}\cdot\vec{A} > 0 \quad \Rightarrow \quad \theta < 90°$	$\Phi_m = \vec{B}\cdot\vec{A} < 0 \quad \Rightarrow \quad \theta > 90°$	$\Phi_m = \vec{B}\cdot\vec{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 90°$
		

La loi de Faraday



Michael Faraday
(1791-1867)

En 1831, le physicien et chimiste anglais Michael Faraday découvre expérimentalement le phénomène de l'induction électromagnétique. Il réalise qu'une variation du flux magnétique Φ_m dans le temps évaluez sur une surface A induit une électromotance ε_ind. Lorsque la surface fermée est délimitée par un circuit électrique fermé, l'électromotance induite affect l'électromance totale du circuit ce qui modifie la circulation des courants électriques. C'est la loi de Lenz (1843) qui déterminera le sens de l'électromotance induite :

$$\varepsilon_\text{ind} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_\text{m}}{\mathrm{d}t}$$

où ε_ind : Électromotance induite (V)

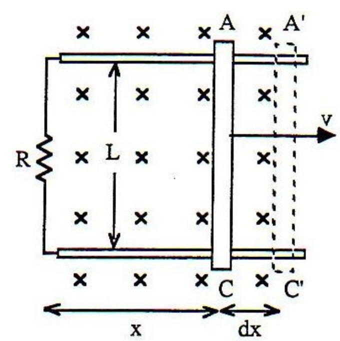
Φ_m : Flux magnétique sur la surface délimitée par le circuit fermé (Wb)

t : Temps (s)

Signe négatif : Le signe négatif dans la loi de Faraday est justifié par la loi de Lenz. Elle stipule que si l'électromomance induite ε_ind produit un courant qui génère un champ magnétique et par le fait même un flux magnétique, celui-ci doit s'opposer à la variation qui le génère.

Justification : (générateur linéaire)

Analysons la production d'une électromotance induite ε_ind par un générateur linéaire à partir de la notion de flux magnétique. Regardons comment varie le flux inclus dans la surface représentée par le circuit électrique. Calculons en premier le flux magnétique initial :



$$\Phi_\text{m} = \vec{B}\cdot\vec{A} \quad \Rightarrow \quad \Phi_\text{m} = B\,(Lx)\cos(0°)$$

$$\Rightarrow \quad \Phi_\text{m} = B\;L\;x$$

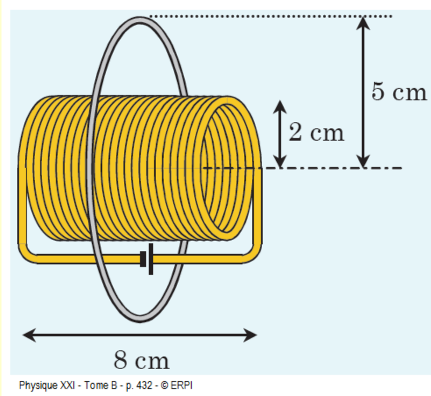
Le barreau se déplace dans le temps ce qui fait augmenter le flux dans le temps. Évaluons l'expression de la variation du flux magnétique dans le temps sachant que c'est uniquement la position du barreau qui varie dans le temps. Par la suite, introduisons l'expression de l'électromotance induite ε_ind généré par un générateur linéaire :

$$\frac{\mathrm{d}\Phi_\text{m}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(B\;L\;x\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\Phi_\text{m}}{\mathrm{d}t} = BL\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$ (Factoriser constantes)

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\Phi_\text{m}}{\mathrm{d}t} = B\,L\,v_x$$ (Définition de la vitesse : $v_x = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_\text{ind} = \frac{\mathrm{d}\Phi_\text{m}}{\mathrm{d}t} \quad \blacksquare$$ (Électrotance induite : $\varepsilon_\text{ind} = B\;L\,v_x$)

Situation 2 : *L'électromotance induite dans un anneau.* Un solénoïde de 8 cm de longueur et de 2 cm de rayon comporte 24 tours de fil : sa résistance est de 5 Ω. Un anneau conducteur dont le rayon est de 5 cm et dont la résistance est de 0,01 Ω entoure le solénoïde : l'anneau et le solénoïde partagent le même axe. On fait varier l'électromotance de la pile qui alimente le solénoïde à un rythme constant : en 0,5 s, elle passe de 10 V à 15 V. On désire déterminer le courant induit dans l'anneau pendant qu'on fait varier l'électromotance de la pile.



Pour simplifier, on considère que le module du champ magnétique partout à l'intérieur du solénoïde est donné par l'équation $B = \mu_0 n I$ et que le champ magnétique à l'extérieur du solénoïde est nul (approximation du solénoïde infini). On néglige également le phénomène d'auto-induction du solénoïde (voir **chapitre 5.6**).

Évaluons l'expression du champ magnétique constant B à l'intérieur du solénoïde avec l'approximation du solénoïde infini :

$$B = \mu_0 n I \quad \Rightarrow \quad B = \mu_0 \left(\frac{N}{L}\right) I_S \qquad \text{(Remplacer } n = N/L\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 N}{L}\left(\frac{\varepsilon}{R_S}\right) \qquad (\Delta V = RI \text{ et } \Delta V = \varepsilon)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{B_{\text{int}} = \frac{\mu_0 N \varepsilon}{R_S L}} \text{ et } \boxed{B_{\text{ext}} = 0} \qquad (B_{\text{int}} = B,\ B_{\text{ext}} = 0)$$

Évaluons l'électromotance induite :

$$\varepsilon_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_m}{dt} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{\text{ind}} = -\frac{d(\Phi_{\text{ext}} + \Phi_{\text{int}})}{dt} \qquad (\Phi_m = \Phi_{\text{ext}} + \Phi_{\text{int}})$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{\text{ind}} = -\frac{d(\vec{B}_{\text{ext}} \cdot \vec{A}_{\text{ext}} + \vec{B}_{\text{int}} \cdot \vec{A}_{\text{int}})}{dt} \qquad \text{(Remplacer } \Phi_m = \vec{B} \cdot \vec{A}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{\text{ind}} = -\frac{d(\vec{B}_{\text{int}} \cdot \vec{A}_{\text{int}})}{dt} \qquad (\vec{B}_{\text{ext}} = 0)$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{\text{ind}} = -\frac{d(B_{\text{int}} A_{\text{int}} \cos(\theta))}{dt} \qquad (\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \cos(\theta))$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{\text{ind}} = -\frac{d(B_{\text{int}} A_{\text{int}})}{dt} \qquad \text{(Supposons } \theta = 0°\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{\text{ind}} = -A_{\text{int}} \frac{dB_{\text{int}}}{dt} \qquad \text{(Factoriser constante)}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{\text{ind}} = -(\pi r_S^2) \frac{dB_{\text{int}}}{dt} \qquad \text{(Remplacer } A_{\text{int}} = \pi r_S^2\text{)}$$

Développons l'expression de la dérivée en remplaçant l'expression du champ magnétique :

$$\varepsilon_{\text{ind}} = -\left(\pi r_{\text{S}}^{2}\right)\frac{\mathrm{d}B_{\text{int}}}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{\text{ind}} = -\pi r_{\text{S}}^{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mu_0 N\varepsilon}{R_{\text{S}}L}\right) \qquad \text{(Remplacer } B_{\text{int}} = \frac{\mu_0 N\varepsilon}{R_{\text{S}}L}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{\text{ind}} = -\frac{\mu_0 N\pi r_{\text{S}}^{2}}{R_{\text{S}}L}\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(Factoriser constante)}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{\text{ind}} = -\frac{\mu_0 N\pi r_{\text{S}}^{2}}{R_{\text{S}}L}\left(\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta t}\right) \qquad \text{(Variation linéaire : } \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} \rightarrow \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta t}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{\text{ind}} = -\frac{\mu_0 N\pi r_{\text{S}}^{2}}{R_{\text{S}}L}\frac{\left(\varepsilon_f - \varepsilon_i\right)}{\Delta t} \qquad \text{(Remplacer } \Delta\varepsilon = \varepsilon_f - \varepsilon_i\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{\text{ind}} = -\frac{\left(4\pi\times10^{-7}\right)(24)\pi\left(2\times10^{-2}\right)^{2}}{(5)\left(8\times10^{-2}\right)}\frac{(15)-(10)}{(0,5)} \qquad \text{(Remplacer valeurs num.)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\left|\varepsilon_{\text{ind}}\right| = 9{,}475\times10^{-7}\ \text{V}} \qquad \text{(Évaluer } \left|\varepsilon_{\text{ind}}\right|\text{)}$$

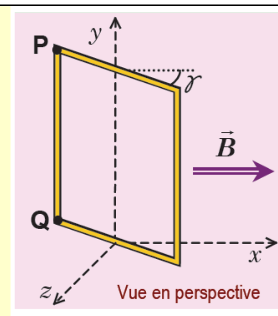
Évaluons le courant qui circule dans l'anneau à partir de la loi d'Ohm :

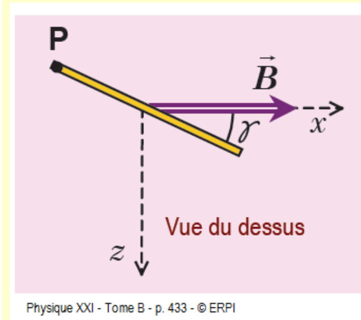
$$\Delta V = RI \quad \Rightarrow \quad \left(\varepsilon_{\text{ind}}\right) = R_{\text{A}} I_{\text{A}} \qquad \text{(Remplacer } \varepsilon_{\text{int}} = \Delta V\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \left(9{,}475\times10^{-7}\right) = (0{,}01) I_{\text{A}} \qquad \text{(Remplacer valeurs num.)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I_{\text{A}} = 9{,}475\times10^{-5}\ \text{A}} \qquad \text{(Évaluer } I_{\text{A}}\text{)}$$

Situation 3 : *L'électromotance moyenne induite dans un cadre qui pivote.* Un cadre conducteur carré mesurant L = 60 cm de côté est plongé dans un champ magnétique uniforme B = 0,2 T orienté dans le sens positif de l'axe x (voir schéma ci-contre). Le cadre pivote autour de l'axe y : en 0,01 s, l'angle γ (gamma) entre le plan du cadre et l'axe x passe de 30° à 20°.





On désire déterminer **(a)** la valeur moyenne de l'électromotance induite pendant cet intervalle de temps. On désire également **(b)** déterminer si le courant induit dans le segment **PQ** circule de **P** vers **Q** ou de **Q** vers **P**.

Évaluons l'expression du flux magnétique dans le cadre généré par le champ magnétique externe au cadre en considérant que l'orientation de la normale à la surface du plan est partiellement dans le sens du champ magnétique :

$$\Phi_{\text{m}} = \vec{B}\cdot\vec{A} \quad \Rightarrow \quad \Phi_{\text{m}} = BA\cos(\theta) \qquad \left(\vec{A}\cdot\vec{B} = \left\|\vec{A}\right\|\left\|\vec{B}\right\|\cos(\theta)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \Phi_{\text{m}} = B\left(L^{2}\right)\cos\left(90° - \gamma\right) \qquad \left(A = L^{2} \text{ et } \theta = 90° - \gamma\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Phi_{\text{m}} = BL^{2}\sin(\gamma)} \qquad \left(\cos\left(90° - \gamma\right) = \sin(\gamma)\right)$$

Évaluons l'électromotance induite moyenne $\bar{\varepsilon}_{\text{ind}}$ dans le cadre durant l'intervalle de temps de 0,01 s :

$$\varepsilon_{\text{ind}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\text{m}}}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{\text{ind}} = -\frac{\mathrm{d}\left(BL^2\sin(\gamma)\right)}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(Remplacer } \Phi_{\text{m}} = BL^2\sin(\gamma)\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{\text{ind}} = -BL^2\frac{\mathrm{d}\sin(\gamma)}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(Factoriser les constantes)}$$

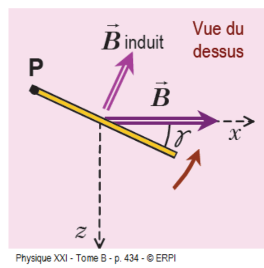
$$\Rightarrow \quad \bar{\varepsilon}_{\text{ind}} = -BL^2\frac{\Delta\sin(\gamma)}{\Delta t} \qquad \text{(Relaxer la dérivée)}$$

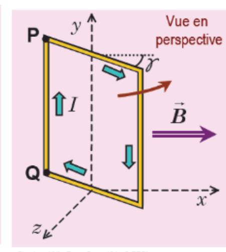
$$\Rightarrow \quad \bar{\varepsilon}_{\text{ind}} = -BL^2\frac{\sin(\gamma_f)-\sin(\gamma_i)}{\Delta t} \qquad \text{(Développer } \Delta\sin(\gamma)\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{\varepsilon}_{\text{ind}} = -(0,2\,\text{T})(0,6\,\text{m})^2\frac{\sin(20°)-\sin(30°)}{(0,01\,\text{s})} \qquad \text{(Remplacer val. num.)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\bar{\varepsilon}_{\text{ind}} = 1{,}137\ \text{V}} \quad \textbf{(a)} \qquad \text{(Évaluer } \bar{\varepsilon}_{\text{ind}}\text{)}$$

Pour déterminer l'orientation du courant induit, nous pouvons exploiter la Loi de Lenz. Dans ce mouvement de rotation, le flux magnétique diminue. Ainsi, le courant induit doit s'opposer à cette variation en augmentant le flux magnétique induit. Pour ce faire, **(b)** le courant devra circule de **Q vers P** afin que l'orientation du champ magnétique induit soit dans l'orientation tel qu'illustré sur le schéma ci-contre.





Situation 4 : ***Un générateur de courant alternatif.*** On fait tourner le cadre de la **situation 3** à un rythme constant de 2 tours par seconde (f = 2 Hz). On désire déterminer l'équation qui décrit l'électromotance induite dans le cadre en fonction du temps lorsque $\gamma = 0$ à $t = 0$.

Pour décrire l'équation de l'état de rotation du cadre en fonction du temps, nous pouvons la fonction suivante :

$$\gamma(t) = \gamma_0 + \omega t \quad \Rightarrow \quad \gamma(t) = \gamma_0 + 2\pi f\, t$$

où f est le nombre de tour par seconde (fréquence en Hz) et γ est l'angle de rotation en radian.

Évaluons l'électromotance induite instantané à partir d'une équation obtenue précédemment :

$$\varepsilon_{\text{ind}} = -BL^2\frac{\mathrm{d}\sin(\gamma)}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(Équation précédente)}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{\text{ind}} = -BL^2\cos(\gamma)\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}\cos(f(x))}{\mathrm{d}x} = \sin(f(x))\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{\text{ind}} = -BL^2\cos(\gamma_0 + 2\pi f\, t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma_0 + 2\pi f\, t) \qquad (\gamma(t) = \gamma_0 + 2\pi f\, t)$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{\text{ind}} = -2\pi f\, BL^2\cos(\gamma_0 + 2\pi f\, t) \qquad \text{(Dériver } \gamma(t)\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{\text{ind}} = -2\pi(2\,\text{Hz})(0,2\,\text{T})(0,6\,\text{m})^2\cos\left((0\,\text{rad}) + 2\pi(2\,\text{Hz})t\right) \qquad \text{(Remplacer val. num.)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_{\text{ind}} = -0,9048\cos(4\pi t)} \qquad \text{(Évaluer } \varepsilon_{\text{ind}}\text{)}$$

Exercices

Référence : Note Science Santé – Chapitre 8 – Question 1

Le plan d'une spire circulaire de rayon de 6 cm fait un angle de 30° avec un champ magnétique de 0,25 T. Quel est le flux magnétique au travers de la spire ?

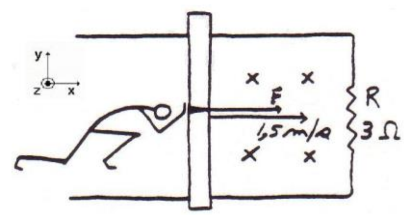
Référence : Note Science Santé – Chapitre 8 – Question 2

Une bobine circulaire plane comporte 80 spires de 20 cm de diamètre et de résistance totale de 40 Ω. Le plan de la bobine est perpendiculaire à un champ magnétique uniforme. Quel doit être le taux de variation du champ pour que la puissance dissipée par la bobine soit égale à 2 W ?

Référence : Note Science Santé – Chapitre 8 – Question 3

Un expérimentateur pousse un barreau conducteur sur deux rails métalliques distants de 2 m, à la vitesse de 1,5 m/s, dans un champ magnétique très intense de 3 T.

a) Calculez la force F que l'expérimentateur doit exercer pour garder le barreau à vitesse constante.
b) Comparez la puissance mécanique P_m développée par l'expérimentateur, et la puissance électrique P_r développée dans la résistance.



Solutions

<u>Référence :</u> Note Science Santé – Chapitre 8 – Question 1

L'angle entre le plan de la spire et le champ magnétique est 30°. Alors, l'angle entre la normale du plan de la spire et le champ magnétique est 60°

Ainsi :

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} \quad \Rightarrow \quad \Phi = B\,S\cos(\theta)$$

$$\Rightarrow \quad \Phi = (0{,}25)\pi(0{,}06)^2 \cos(60°)$$

$$\Rightarrow \quad \Phi = 0{,}0014 \ \text{Wb}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Phi = 1{,}4 \ \text{mWb}}$$

<u>Référence :</u> Note Science Santé – Chapitre 8 – Question 2

Évaluons le potentiel électrique requis pour dissiper 2 W :

$$P = \Delta V\, I \quad \Rightarrow \quad P = \Delta V\left(\frac{\Delta V}{R}\right) \qquad \text{(Loi d'Ohm : } \Delta V = R\ I\ ,\ I = \frac{\Delta V}{R}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad P = \frac{(\Delta V)^2}{R} \qquad \text{(Simplifier)}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta V = \sqrt{PR} \qquad \text{(Isoler } \Delta V\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta V = \sqrt{(2)(40)} \qquad \text{(Remplacer)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta V = 8{,}94 \ \text{V}} \qquad \text{(Évaluer } \Delta V\text{)}$$

Avec la definition de l'électromotance induite, évaluer la variation dans le temps du champ magnétique :

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{\mathrm{d}(B\ S\ N)}{\mathrm{d}t} = S\,N\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = \frac{\varepsilon}{SN} = \frac{\Delta V}{(\pi r^2)N}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = \frac{(8{,}94)}{\pi\left(\frac{0{,}2}{2}\right)^2(80)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = 3{,}56 \ \text{T/s}}$$

Référence : Note Science Santé – Chapitre 8 – Question 3

a) $\varepsilon = \left|\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right| = v\ B\ L\cos(0°) = (1{,}5)(3)(2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon = 9\ \mathrm{V}}$

Avec la loi d'Ohm :

$\Delta V = R\ I \quad \Rightarrow \quad I = \dfrac{\Delta V}{R} = \dfrac{\varepsilon}{R} = \dfrac{(9)}{(3)} = 3\ \mathrm{A}$

Loi de Lenz :

Le flux diminue $\Rightarrow$ Induction d'un courant qui va produire un champ magnétique qui va augmenter le flux magnétique

$\Rightarrow$ Le courant circule dans ce sens dans le barreau : $\uparrow$

$\Rightarrow$ Le courant dans le barreau a la valeur suivante : $\ell = +\ell\ \vec{j}$

Avec la force magnétique :

$\vec{F} = I\ \vec{\ell} \times \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = I\left(\ell\ \vec{j}\right) \times \left(-B\ \vec{k}\right) = -I\ell B\left(\vec{j} \times \vec{k}\right) = -I\ell B\,\vec{i}$

$\Rightarrow \quad \vec{F} = -(3)(2)(3)\ \vec{i} = -18\vec{i}\ \mathrm{N}$

La force mécanique qui doit être appliquée est $\vec{F}_{mécanique} = 18\vec{i}\ \mathrm{N}$ pour maintenir la tige à vitesse constante.

b) $P = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \vec{v} = \left(18\ \vec{i}\right) \cdot \left(1{,}5\ \vec{i}\right) = 27\ \mathrm{W}$

et

$P = \Delta V\ I = (9)(3) = 27\ \mathrm{W}$