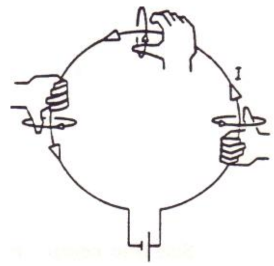
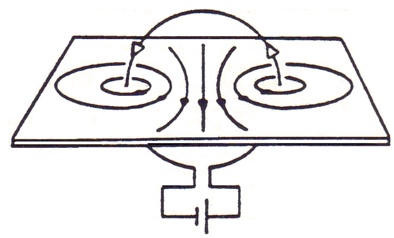
Chapitre 4.7 – Le champ magnétique généré par une boucle de courant et par un solénoïde

Champ d'une spire

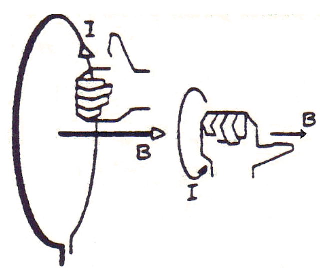
Si l'on courbe notre ligne de courant en cercle, on peut définir l'orientation du champ magnétique à l'aide de la règle de la main droite.

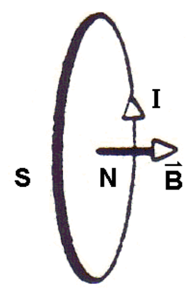


Si l'on étudie le champ magnétique dans un plan perpendiculaire à la spire, on retrouve la situation de deux courants parallèles de sens contraire.



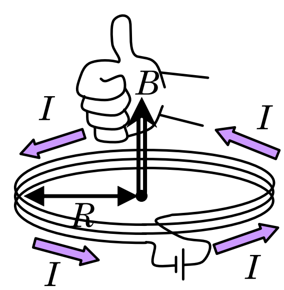
Très souvent, c'est le champ magnétique au centre de la boucle qui va nous intéresser. Avec la règle de la main droite, il est évident d'en deviner le sens.





Champ magnétique au centre d'une bobine

Une bobine est un regroupement de spire que l'on peut approximer comme étant superposé les uns sur les autres. Le module du champ magnétique produit au centre d'une bobine parcourue par un courant I est défini à l'aide de l'équation suivante :



$$B = N\frac{\mu_0 I}{2R}$$

où B : Champ magnétique produit au centre de la bobine en tesla (T)

N : Le nombre de spire dans la bobine, $N \in \Re > 0$

I : Courant électrique en ampère (A)

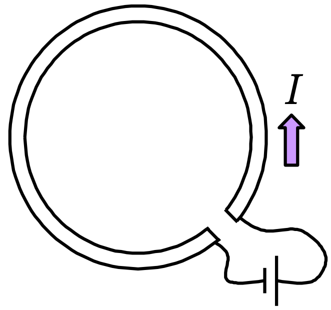
R : Le rayon de la bobine en mètre (m)

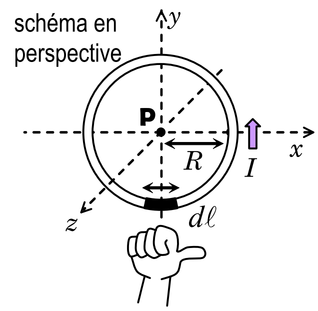
μ_0 : Constante magnétique, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{Ns^2/C^2}$

Preuve :

Considérons une spire dans le plan *xy* parcourue par un courant I où l'on veut évaluer le champ magnétique au centre de celle-ci en un point **P**.

On réalise que chaque petit bout de fil $\mathrm{d}\ell$ génère un petit élément de champ magnétique $\mathrm{d}\vec{B}$ au point **P** de la forme suivante :





$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\ell}{r^2}\sin(\theta)\ \hat{n}$$

où $\theta = 90°$: Angle entre $\mathrm{d}\vec{\ell}$ et $\hat{r}$.

$r = R$: Distance constante entre tous les $\mathrm{d}\vec{\ell}$ et le point **P**.

$\hat{n} = \vec{k}$: Direction de tous les champs magnétiques infinitésimaux $\mathrm{d}\vec{B}$.

Puisque le fil possède une longueur connue ($C = 2\pi R$), on peut réaliser l'addition de tous les champs magnétiques infinitésimaux $\mathrm{d}\vec{B}$:

$$\vec{B} = \int \mathrm{d}\vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \int \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\ell}{r^2}\sin(\theta)\hat{n} \qquad \text{(Remplacer } \mathrm{d}\vec{B}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{B} = \int \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\ell}{R^2}\sin(90°)\vec{k} \qquad \text{(Remplacer } r \text{ et } \theta\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\int \mathrm{d}\ell\,\vec{k} \qquad \text{(Factoriser les constantes)}$$

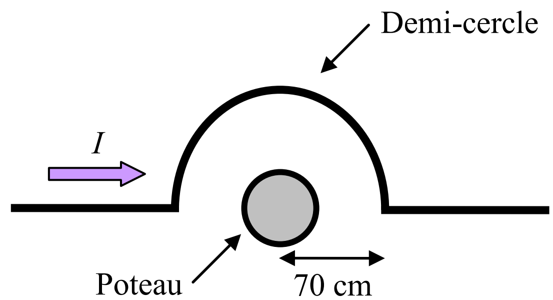
$$\Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}(2\pi R)\vec{k} \qquad \text{(Évaluer l'intégrale: } \int \mathrm{d}\ell = 2\pi R\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R}\vec{k} \qquad \text{(Simplifier)}$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad \blacksquare \qquad \text{(Évaluer le module de } B\text{)}$$

Situation A : *Poteau évité à l'aide d'un demi-cercle.* Un électricien applique au sol un fil électrique très long en ligne droite. Afin d'éviter un poteau qui représente un obstacle pour la trajectoire rectiligne du fil, l'électricien contourne l'obstacle en courbant son fil sur un demi-cercle de 70 cm de rayon. Le centre de courbure du fil coïncide avec le centre du poteau. On désire évaluer le module du champ magnétique produit par le fil électrique au centre du poteau sachant qu'un courant de 2 A circule dans le fil.

Voici une représentation graphique de la situation :



Nous pouvons découper notre long fil en trois parties :

- Fil semi-infini gauche (1) : $B = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi R}\left|\sin(\alpha_1) - \sin(\alpha_2)\right| = 0$ car $\alpha_1 = \alpha_2$.

- Demi-cercle (2) : $B = N\dfrac{\mu_0 I}{2R}$

- Fil semi-infini droit (3) : $B = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi R}\left|\sin(\alpha_1) - \sin(\alpha_2)\right| = 0$ car $\alpha_1 = \alpha_2$.

Ainsi, le champ magnétique total sera produit uniquement par le demi-cercle :

$B = N\dfrac{\mu_0 I}{2R} \quad \Rightarrow \quad B = \left(\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\mu_0 I}{2R}$ (Il y a ½ spire de courant)

$\Rightarrow \quad B = \left(\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\left(4\pi\times 10^{-7}\right)(2)}{2(0,70)}$ (Remplacer valeurs numériques)

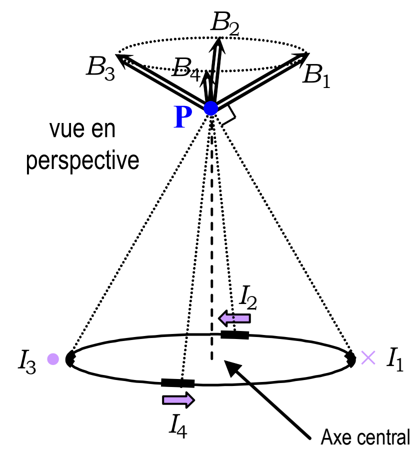
$\Rightarrow \quad \boxed{B = 8,97\times 10^{-7}\ \mathrm{T}}$ (Module du champ magnétique)

Champ sur l'axe central d'une spire

Nous pouvons également évaluer le champ magnétique sur l'axe central d'une spire.

En découpant la spire en petits éléments de fil fini, on réalise que l'ensemble des petits champs magnétiques produits forme un cône. L'addition vectorielle de tous ces champs magnétiques donne un champ magnétique résultant parallèle à l'axe central de la spire.

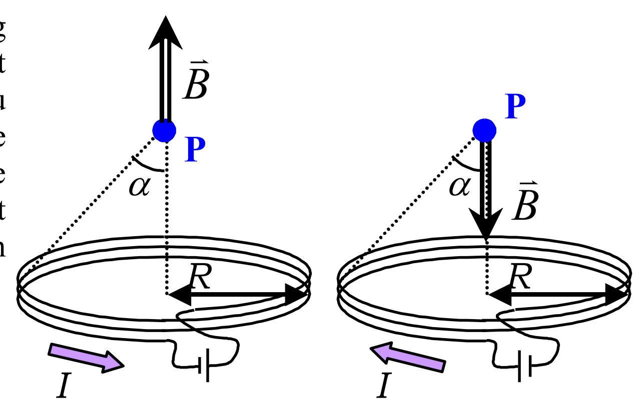
Ainsi, le champ magnétique le long de l'axe central d'une spire est perpendiculaire à la spire et orienté selon le sens du courant.



Champ magnétique sur l'axe central d'une bobine

Le module du champ magnétique B généré le long d'un axe passant par le central de la bobine et étant perpendiculaire au plan de la bobine dépend du courant I circulant dans la bobine, du nombre de spires N, du rayon R de la bobine et de la distance entre le point P où le champ magnétique est évalué et le centre de la bobine exprimée sous la forme d'un angle α :

$$B = N \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3(\alpha)$$



où B : Champ magnétique produit sur l'axe centrale de la bobine en tesla (T)

N : Le nombre de spire dans la bobine, $N \in Z > 0$

I : Courant électrique en ampère (A)

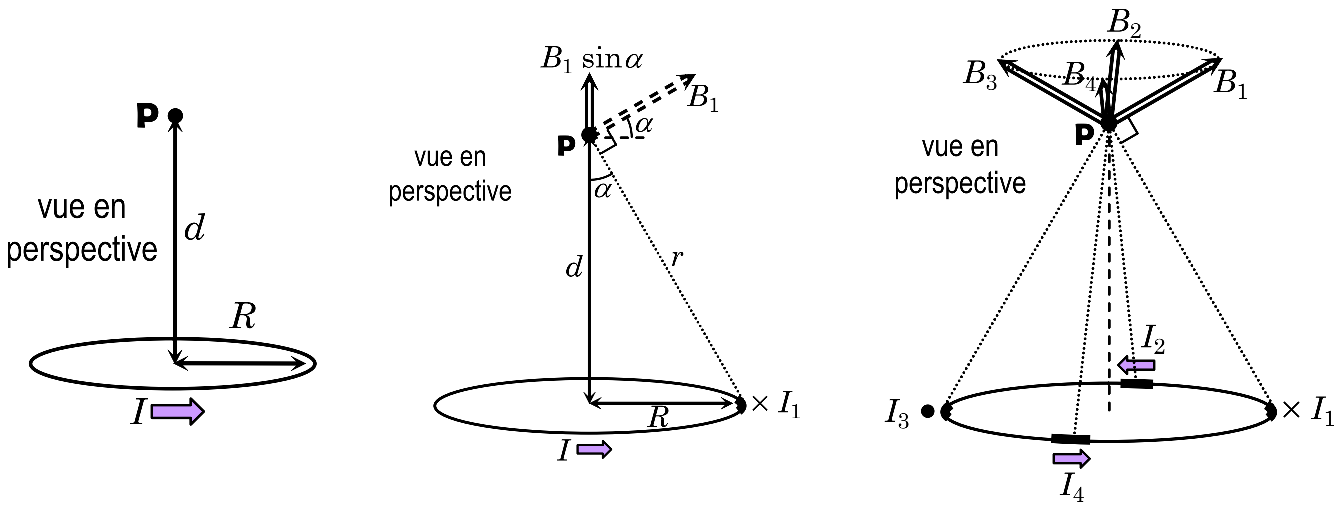
R : Le rayon de la bobine en mètre (m)

α : Angle pour positionner le point **P**

μ_0 : Constante magnétique, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{Ns^2/C^2}$

Preuve :

Évaluons le champ magnétique sur l'axe central d'une spire :



On réalise que :

- B_1, B_2, B_3 et B_4 sont tous de même module.
- Le champ magnétique résultant est purement vers le haut.
- Nous avons la relation géométrique suivante : $\sin\alpha = \dfrac{R}{r}$.

On réalise que chaque petit bout de fil $d\ell$ génère un champ magnétique au point **P** de la forme suivante :

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\ell}{r^2}\sin(\theta)\ \hat{n}$$

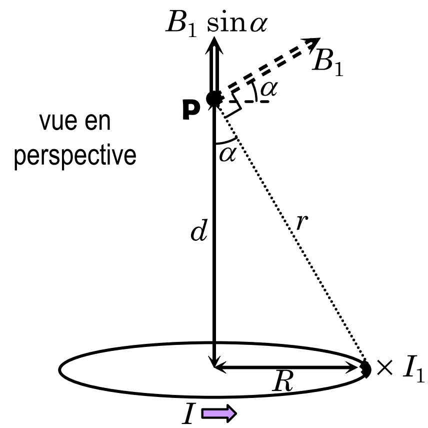
où $\theta = 90°$: Angle constant entre $\mathrm{d}\vec{\ell}$ et $\hat{r}$.

$r = \sqrt{R^2 + d^2}$: Distance constante entre tous les $\mathrm{d}\vec{\ell}$ et le point **P**.

$\hat{n}$: Direction particulière pour chacun des $\mathrm{d}\vec{B}$.

Le champ magnétique selon l'axe y aura la forme

$$\mathrm{d}B_y = \mathrm{d}B \sin(\alpha)$$



que l'on peut réécrire à l'aide de la loi de Biot-Savart sous la forme

$$\mathrm{d}B_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\,\mathrm{d}\ell}{r^2} \sin(\theta)\sin(\alpha)$$

où l'expression $\sin(\alpha)$ correspond à la projection du champ magnétique sur l'axe y.

Par symétrie, on réalise que l'addition de tous les $\mathrm{d}\vec{B}$ génère uniquement un champ magnétique dans la direction $\vec{j}$. Effectuons notre intégrale afin d'évaluer le module du champ magnétique sur l'axe de la bobine :

$\vec{B} = \int \mathrm{d}\vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \int \mathrm{d}B\, \hat{n}$ (Décomposer module et orientation)

$\Rightarrow \quad \vec{B} = \int \mathrm{d}B_y \; \vec{j}$ (Appliquer principe de superposition)

$\Rightarrow \quad \vec{B} = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\,\mathrm{d}\ell}{r^2} \sin(\theta)\sin(\alpha) \; \vec{j}$ (Remplacer $\mathrm{d}B_y$)

$\Rightarrow \quad \vec{B} = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\,\mathrm{d}\ell}{r^2} \sin(90°)\sin(\alpha) \; \vec{j}$ (Remplacer θ)

$\Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sin(\alpha) \int \mathrm{d}\ell \; \vec{j}$ (Factoriser les constants)

$\Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sin(\alpha)(2\pi R) \; \vec{j}$ (Évaluer l'intégrale: $\int \mathrm{d}\ell = 2\pi R$)

$\Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I R}{2 r^2} \sin(\alpha) \vec{j}$ (Simplifier)

$\Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I R}{2(R/\sin(\alpha))^2} \sin(\alpha) \vec{j}$ (Remplacer $\sin\alpha = R/r \;\; \Rightarrow r = R/\sin\alpha$)

$\Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3(\alpha) \vec{j}$ (Simplifier)

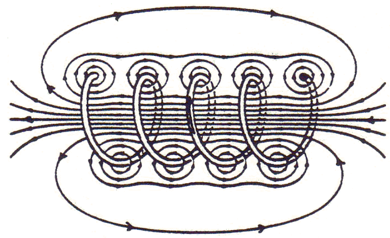
$\Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3(\alpha) \quad ■$ (Évaluer le module du champ B)

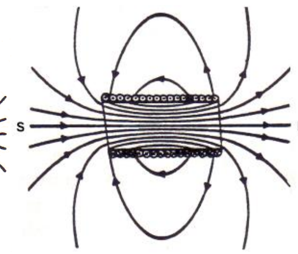
Le champ d'un solénoïde

Un **solénoïde** est un enroulement d'un fil conducteur formant plusieurs spires parallèles étalées dans l'espace contrairement à la **bobine** où l'ensemble de ses spires sont tous superposés dans un même plan. Le solénoïde représente ainsi une suite de bobines en série.

Si l'enroulement n'est pas trop serré, on retrouve la forme d'un champ magnétique produits par deux spires tel que décrit à la section précédente.

Si l'enroulement est très compact, le champ magnétique autour de chaque fil devient nul puisque les courants sont très près les uns des autres. L'addition vectorielle du champ magnétique autour de chaque fil est donc nulle.

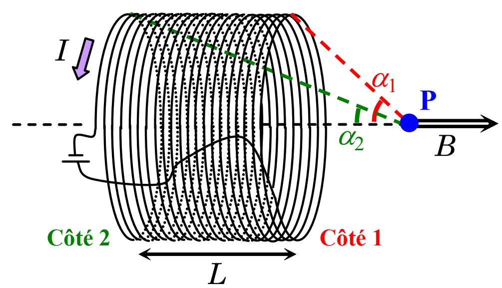




On remarque ici que le **solénoïde parcouru d'un courant** produit un **champ magnétique** de la même forme qu'un **aimant** (avec pôle nord et pôle sud). Ainsi, le solénoïde devient un **électro-aimant**.

Champ magnétique sur l'axe central d'un solénoïde

Le module du champ magnétique généré sur l'axe central d'un solénoïde dépend du courant I circulant dans le solénoïde et de la densité de spires n. De plus, le module dépend de la distance entre le point **P** et le solénoïde et la taille du solénoïde le tout représenté à l'aide de deux angle α_1 et α_2 :



$$B = \frac{\mu_0 n I}{2} \left| \cos(\alpha_2) - \cos(\alpha_1) \right|$$

où B : Champ magnétique sur l'axe centrale au point **P** (T)

n : Nombre de spires par unité de longueur ($n = N / L$)

I : Courant électrique (A)

α_1 : Angle pour positionner **Côté 1** par rapport au point **P**

α_2 : Angle pour positionner **Côté 2** par rapport au point **P**

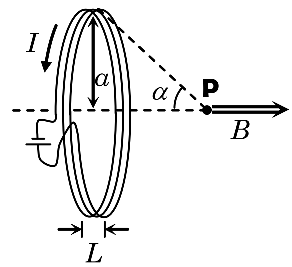
μ_0 : Constante magnétique, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{Ns^2 / C^2}$

Preuve :

Afin d'évaluer le champ magnétique généré par un solénoïde, utilisons la solution du champ magnétique généré par une bobine de largeur L:

$$B = N\frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3(\alpha)$$

(Champ magnétique généré par une bobine)



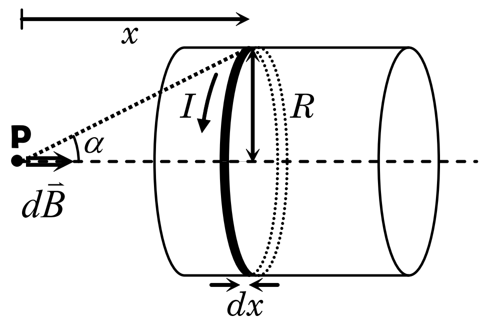
Puisqu'un solénoïde est un regroupement de plusieurs bobines placé côte à côte, nous allons découper notre solénoïde en plusieurs petites tranches de largeur dx comprenant une densité de spires n. Ces tranches représentent des bobines formées à l'aide d'un nombre infinitésimal de spires $dN = n\,dx$. On pourra remplacer dans notre formule précédente le N par dN :

Champ magnétique infinitésimal :

$$d\vec{B} = dN\ \frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3(\alpha)\ \hat{n}$$

et $\quad dN = n\,dx$

$\hat{n} = \vec{i}$ (Règle main droite)



Puisque l'angle α est une fonction de x, évaluons l'intégrale sur l'angle α (car la solution est exprimée en fonction de α_1 et α_2) ce qui nous oblige à introduire des relations trigonométriques entre x et α :

$$\tan(\alpha) = \frac{R}{x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{R}{\tan(\alpha)} \qquad \text{(Isoler } x\text{)}$$

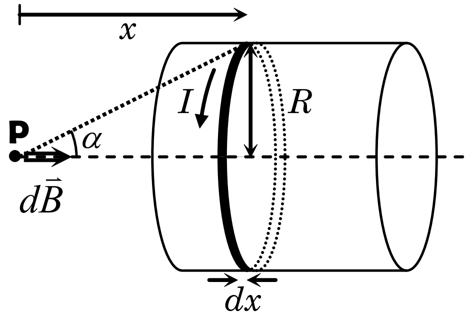
$$\Rightarrow \quad dx = \frac{-R\sec^2(\alpha)}{\tan^2(\alpha)}d\alpha \qquad \left(\text{Dérivée : } \frac{d}{dx}(1/\tan(x)) = -\frac{\sec^2(x)}{\tan^2(x)}\right)$$

$$\Rightarrow \quad dx = \frac{-R\left(1/\cos^2(\alpha)\right)}{\left(\sin^2(\alpha)/\cos^2(\alpha)\right)}d\alpha \qquad (\sec(x) = 1/\cos(x),\ \tan(x) = \sin(x)/\cos(x))$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{dx = \frac{-R\,d\alpha}{\sin^2(\alpha)}} \qquad \text{(Simplifier)}$$

Évaluons à l'aide d'une sommation continue de champs magnétiques infinitésimaux $d\vec{B}$ le champ magnétique total au point **P** en se basant sur le schéma ci-contre :

- $dN = n\ dx$
- $dx = \dfrac{-R\,d\alpha}{\sin^2(\alpha)}$
- $\hat{n} = \vec{i}$ (Règle main droite)



$$d\vec{B} = dN\frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3(\alpha)\ \hat{n}$$

Ainsi :

$\vec{B} = \int d\vec{B}$ $\Rightarrow$ $\vec{B} = \int dN\dfrac{\mu_0 I}{2R}\sin^3(\alpha)\hat{n}$ (Remplacer $d\vec{B} = dN\dfrac{\mu_0 I}{2R}\sin^3(\alpha)\ \hat{n}$)

$\Rightarrow$ $\vec{B} = \int (n\,dx)\dfrac{\mu_0 I}{2R}\sin^3(\alpha)(\vec{i})$ (Remplacer dN et $\hat{n}$)

$\Rightarrow$ $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 n I}{2R}\int \sin^3(\alpha)dx\ \vec{i}$ (Factoriser les constantes)

$\Rightarrow$ $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 n I}{2R}\int \sin^3(\alpha)\left(-\dfrac{R d\alpha}{\sin^2(\alpha)}\right)\ \vec{i}$ (Remplacer dx)

$\Rightarrow$ $\vec{B} = -\dfrac{\mu_0 n I}{2}\int \sin(\alpha)d\alpha\ \vec{i}$ (Simplifier et factoriser les constantes)

$\Rightarrow$ $\vec{B} = -\dfrac{\mu_0 n I}{2}\displaystyle\int_{\alpha=\alpha_1}^{\alpha_2}\sin(\alpha)d\alpha\ \vec{i}$ (Borne : $\alpha = \alpha_1 \to \alpha_2$)

$\Rightarrow$ $\vec{B} = -\dfrac{\mu_0 n I}{2}\left[-\cos(\alpha)\right]_{\alpha_1}^{\alpha_2}\vec{i}$ (Résoudre l'intégrale : $\int \sin(x)dx = -\cos(x)$)

$\Rightarrow$ $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 n I}{2}\left[\cos(\alpha)\right]_{\alpha_1}^{\alpha_2}\vec{i}$ (Factoriser signe négatif)

$\Rightarrow$ $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 n I}{2}\left(\cos(\alpha_2) - \cos(\alpha_1)\right)\ \vec{i}$ (Évaluer l'intégrale)

$\Rightarrow$ $\boxed{B = \dfrac{\mu_0 n I}{2}\left|\cos(\alpha_2) - \cos(\alpha_1)\right|}$ (Évaluer seulement le module du champ B)

Situation A : *Dans un solénoïde.* Un solénoïde de 10 000 tours possède une longueur de 20 cm et un rayon de 5 cm. La résistance totale du fil utilisé pour produire l'enroulement est de 2 Ω. On branche ce solénoïde à une pile de 0,5 V. On désire évaluer le module du champ magnétique produit à 5 cm du centre du solénoïde.

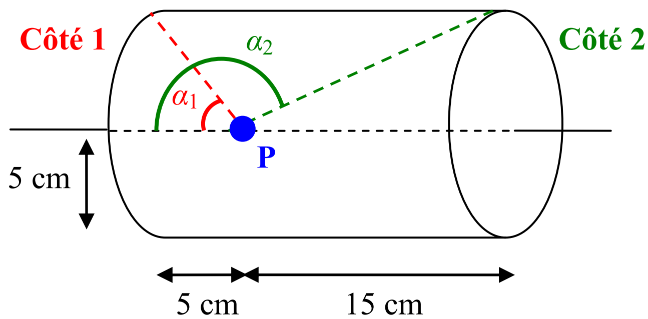
Évaluons le courant électrique qui circule dans le solénoïde : (Loi d'Ohm)

$$\Delta V = R\,I \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\Delta V}{R}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{(0{,}5)}{(2)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I = 0{,}25\ \text{A}}$$

Schéma des mesures des angles :



Nous avons les informations suivantes selon la géométrie du problème :

- Courant circulant dans le fil : $I = 0{,}25\ \text{A}$
- Densité de spire : $n = \dfrac{N}{L} = \dfrac{(10000)}{(0{,}20)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{n = 50000\ \text{m}^{-1}}$
- Angle α_1 : $\tan(\alpha_1) = \dfrac{(5)}{(5)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_1 = 45°}$
- Angle α_2 : $\tan(\alpha) = \dfrac{(5)}{(15)} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 18{,}43°$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\alpha_2 = 161{,}6°}$$

Évaluons le module du champ magnétique au point **P** :

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2}\left|\cos(\alpha_2) - \cos(\alpha_1)\right| \quad \Rightarrow \quad B = \frac{(4\pi \times 10^{-7})(50000)(0{,}25)}{2}\left|\cos(161{,}6°) - \cos(45°)\right|$$

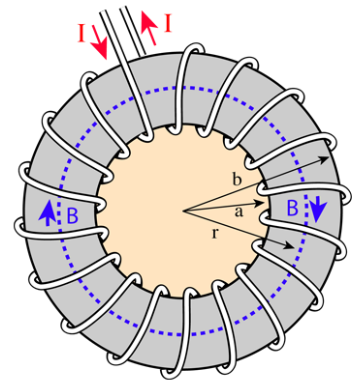
$$\Rightarrow \quad B = 7{,}85 \times 10^{-3}\left|-1{,}656\right|$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{B = 1{,}30 \times 10^{-2}\,\text{T}}$$

Le champ magnétique d'un tore

Un tore est une géométrie de forme cylindrique dont les deux extrémités sont refermées l'une sur l'autre dans une courbure circulaire pour former un « beigne ». Lorsqu'un fil parcouru par une courant I est enroulé de façon régulière sur la forme d'un tore pour former N spires, alors le champ magnétique généré est égal aux expressions suivantes :

Champ intérieur ($a < r < b$)	Champ extérieur ($r < a$ ou $r > b$)
$B = N \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$	$B = 0$



http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/magnetic/toroid.html

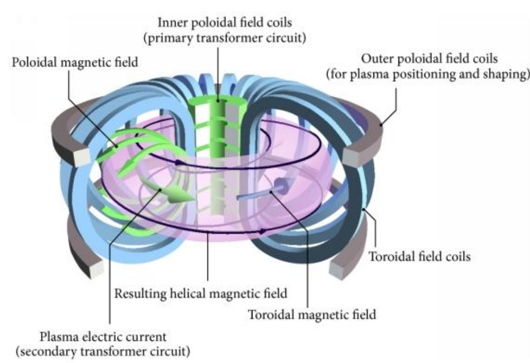
où B : Module du champ magnétique (T)
r : Distance radiale par rapport au centre du tore où $a < r < b$ (m)
a : Distance radiale intérieure au tore (m)
b : Distance radiale extérieure au tore (m)
N : Nombre de spires
I : Courant électrique (A)
μ_0 : Constante magnétique, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{Ns^2/C^2}$

Preuve :

Une preuve sera proposée dans le chapitre 4.9.

Le tokamak

Un tokamak est une structure en forme de tore (beigne) où il règne un champ magnétique très intense permettant de confiner à l'intérieur un plasma (atome ionisé). En augmentant la densité des particules tout en augmentant l'énergie cinétique de celle-ci à l'aide d'une source externe d'énergie, le tokamak est un milieu propice afin d'y réaliser de la fusion nucléaire comparable à celle réalisée dans une étoile. Par exemple le réacteur KSTAR[1] a été en mesure de maintenir une température de 100×10^6 K durant 48 secondes. Malgré cette température plus que suffisante, les tokamaks ne sont toujours pas commerciaux.



https://en.wikipedia.org/wiki/Tokamak

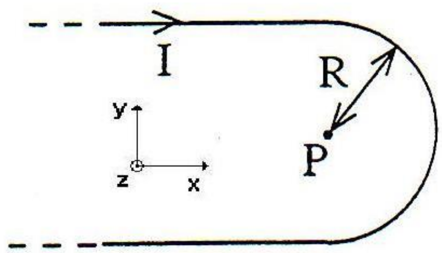
Même si la température critique est atteinte, il reste toujours des problèmes de densité du plasma à résoudre. Ainsi, le ratio énergie expulsée et injectée n'a toujours pas dépassé le « facteur 1 » ce qui rend ce dispositif toujours endothermique. En 2020[2], un ratio de 2/3 a été atteint sous la condition de 16 MW d'énergie expulsés pour 24 MW d'énergie injecté.

[1] Voir : https://en.wikipedia.org/wiki/KSTAR
[2] Selon le site suivant : https://en.wikipedia.org/wiki/Tokamak

Exercice

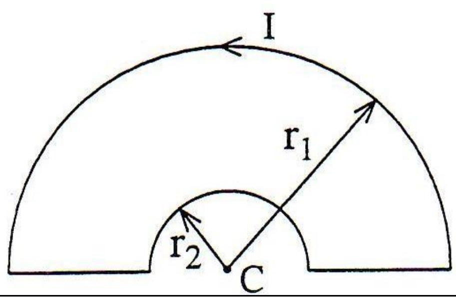
Référence : Note Science Santé – Chapitre 6 – Question 13

On replie un fil droit infini par une demi-boucle de rayon R. Calculez le champ magnétique B au centre P de la demi-boucle.

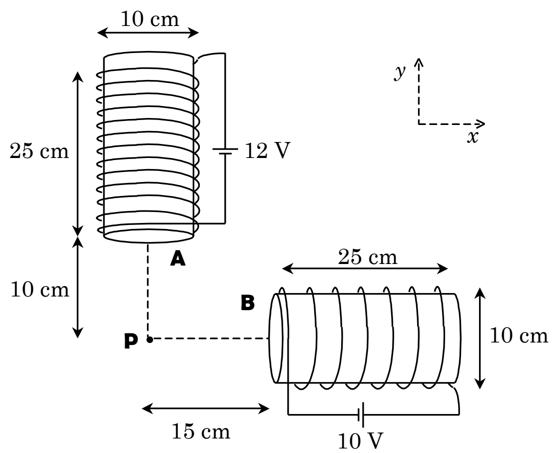


Référence : Note Science Santé – Chapitre 6 – Question 11

Un fil en forme de deux demi-cercles reliés, est parcouru par un courant I. Trouvez B au centre C des deux demi-cercles.



4.9.X ***La superposition des champs magnétiques de deux solénoïdes.*** Le schéma ci-dessous illustre un montage qui comporte deux solénoïdes, **A** (13 tours) et **B** (7 tours). Les fils qui forment les solénoïdes ont un rayon de 1 mm et sont faits d'un matériau dont la résistivité est égale à $2\times10^{-6}\,\Omega\cdot\text{m}$. **(a)** Calculez la résistance des fils des solénoïdes **A** et **B**. **(b)** Calculez le champ magnétique généré au point P par le montage des deux solénoïdes. *Dans tous les calculs, négligez les segments de fils qui servent de connexion entre les piles et les solénoïdes.*



Solution

Référence : Note Science Santé – Chapitre 6 – Question 13

Demi-boucle :

$$\vec{B}_{demi-boucle} = \frac{1}{2}B_{boucle}\left(-\vec{k}\right) \quad \Rightarrow \quad \vec{B}_{demi-boucle} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_0 I}{2R}\right)\vec{k}$$

$$\left(B_{boucle} = \frac{\mu_0 I}{2R}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{B}_{demi-boucle} = -\frac{\mu_0 I}{4R}\vec{k}}$$

Fil haut :

$$\vec{B}_{fil\_haut} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left|\sin(\alpha_2) - \sin(\alpha_1)\right| \left(-\vec{k}\right) \quad \Rightarrow \quad \vec{B}_{fil\_haut} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left| \sin\left(\pi/2\right) - \sin(0) \right| \left(-\vec{k}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{B}_{fil\_haut} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\vec{k}}$$

Fil bas : $\boxed{\vec{B}_{fil\_haut} = \vec{B}_{fil\_bas}}$

Champ total :

$$\vec{B} = \vec{B}_{demi-boucle} + \vec{B}_{fil\_haut} + \vec{B}_{fil\_bas} \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4R}\vec{k} - \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\vec{k}$$

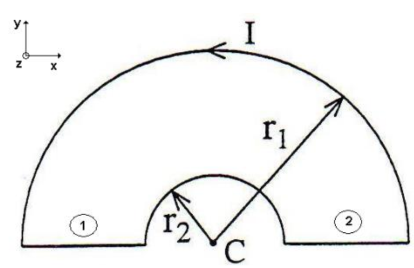
$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{B} = -\mu_0 I\left(\frac{1}{4R} + \frac{1}{2\pi R}\right)\vec{k}}$$

Référence : Note Science Santé – Chapitre 6 – Question 11

$$\vec{B}_{arc1} = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 I}{2R}\left(\vec{k}\right) = \frac{\mu_0 I}{4r_1}\vec{k}$$

$$\vec{B}_{arc2} = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 I}{2R}\left(-\vec{k}\right) = -\frac{\mu_0 I}{4r_2}\vec{k}$$

$$\vec{B}_{fil1} = 0 \qquad \text{et} \qquad \vec{B}_{fil2} = 0$$



$$\Rightarrow \quad \vec{B} = \vec{B}_{arc1} + \vec{B}_{arc2} + \vec{B}_{fil1} + \vec{B}_{fil2} = \frac{\mu_0 I}{4}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)\vec{k}$$

$\boxed{4.9.X}$ ***La superposition des champs magnétiques de deux solénoïdes.***

Évaluons les paramètres géométriques du solénoïde **A** et **B** :

Rayon fil : $R = 1 \text{ mm} = 0{,}001 \text{ m}$

Résistivité fil : $\rho = 2 \times 10^{-6}\,\Omega \cdot \text{m}$

Circonférence fil A : $C_A = \pi D_A = \pi(0{,}1) = 0{,}314 \text{ m}$

Circonférence fil B : $C_B = \pi D_B = \pi(0{,}1) = 0{,}314 \text{ m}$

Surface circulaire A et B : $A = \pi R^2 = \pi(0{,}001)^2 = 3{,}141 \times 10^{-6}\,\text{m}^2$

Supposons que la longueur du fil sur le solénoïde est comptée de la façon suivante :

$$\ell = N * C$$

Voici la longueur du fil composant le solénoïde **A** et **B** :

$N_A = 13$ spires $\qquad \ell_A = N_A * C_A = (13)(0{,}314) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ell_A = 4{,}082 \text{ m}}$

$N_B = 7$ spires $\qquad \ell_B = N_B * C_B = (7)(0{,}314) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ell_B = 2{,}198 \text{ m}}$

(a) Évaluons la résistance des fils des solénoïdes avec la formule de la résistivité :

$$R = \rho \frac{\ell}{A} \quad \Rightarrow \quad R_A = \rho \frac{\ell_A}{A} = \left(2 \times 10^{-6}\right) \frac{(4{,}082)}{\left(3{,}141 \times 10^{-6}\right)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_A = 2{,}60\ \Omega}$$

$$R_B = \rho \frac{\ell_B}{A} = \left(2 \times 10^{-6}\right) \frac{(2{,}198)}{\left(3{,}141 \times 10^{-6}\right)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_B = 1{,}40\ \Omega}$$

Évaluons les courants électriques qui circulent dans les solénoïdes **A** et **B** à partir de leur résistance et de la loi d'Ohm :

$$\Delta V = R\ I \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\Delta V}{R}$$

Pour A : $\quad I_A = \dfrac{\Delta V_A}{R_A} = \dfrac{\varepsilon_A}{R_A} = \dfrac{(12)}{(2{,}60)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_A = 4{,}62 \text{ A}}$

Pour B : $\quad I_B = \dfrac{\Delta V_B}{R_B} = \dfrac{\varepsilon_B}{R_B} = \dfrac{(10)}{(1{,}40)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_B = 7{,}14 \text{ A}}$

Avec la solution du champ magnétique produit par un solénoïde, évaluons le champ magnétique produit par les solénoïdes **A** et **B** :

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2}\left(\cos(\alpha_2) - \cos(\alpha_1)\right)$$

Information sur le solénoïde **A** :

La direction de $\vec{B}_A$: $\vec{j}$

Spires : $n_A = \dfrac{N_A}{L_A} = \dfrac{(13)}{(0{,}25)}$ $\Rightarrow$ $\boxed{n_A = 52 \ \text{spires/m}}$

Angles : $\tan(\alpha_{A1}) = \dfrac{0{,}05}{0{,}10}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\alpha_{A1} = 26{,}57°}$

$\tan(\alpha_{A2}) = \dfrac{0{,}05}{0{,}10 + 0{,}25}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\alpha_{A2} = 8{,}13°}$

Champ : $\vec{B}_A = \dfrac{\mu_0 n_A I_A}{2}\left(\cos(\alpha_{A2}) - \cos(\alpha_{A1})\right) \vec{j}$

$\Rightarrow$ $\vec{B}_A = \dfrac{(4\pi \times 10^{-7})(52)(4{,}62)}{2}\left(\cos(8{,}31°) - \cos(26{,}57°)\right) \vec{j}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\vec{B}_A = 14{,}4 \times 10^{-6} \vec{j} \ \text{T}}$

Information sur le solénoïde **B** :

La direction de $\vec{B}_B$: $\vec{i}$

Spires : $n_B = \dfrac{N_B}{L_B} = \dfrac{(7)}{(0{,}25)}$ $\Rightarrow$ $\boxed{n_B = 28 \ \text{spires/m}}$

Angles : $\tan(\alpha_{B1}) = \dfrac{0{,}05}{0{,}15}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\alpha_{B1} = 18{,}43°}$

$\tan(\alpha_{B2}) = \dfrac{0{,}05}{0{,}15 + 0{,}25}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\alpha_{B2} = 7{,}13°}$

Champ : $\vec{B}_B = \dfrac{\mu_0 n_B I_B}{2}\left(\cos(\alpha_{B2}) - \cos(\alpha_{B1})\right) \vec{i}$

$\Rightarrow$ $\vec{B}_B = \dfrac{(4\pi \times 10^{-7})(28)(7{,}14)}{2}\left(\cos(7{,}13°) - \cos(18{,}43°)\right) \vec{i}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\vec{B}_B = 5{,}47 \times 10^{-6} \vec{i} \ \text{T}}$

(b) Évaluons le champ magnétique total au point P sous forme vectorielle :

$\vec{B} = \vec{B}_A + \vec{B}_B$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{B} = \left(5{,}47 \ \vec{i} + 14{,}4 \ \vec{j}\right) \times 10^{-6} \,\text{T}}$