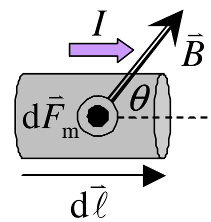
Chapitre 4.6b – La force magnétique par intégration

La force magnétique infinitésimale d'un fil



La force magnétique infinitésimale $\mathrm{d}\vec{F}_\mathrm{m}$ est la force magnétique appliquée sur un élément infinitésimal de fil $\mathrm{d}\vec{\ell}$ parcouru par un courant I lorsqu'il est plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$. On utilisera l'intégrale pour évaluer la force magnétique totale $\vec{F}_\mathrm{m}$ appliquée sur l'ensemble du fil :

$$\mathrm{d}\vec{F}_\mathrm{m} = I\,\mathrm{d}\vec{\ell} \times \vec{B}$$

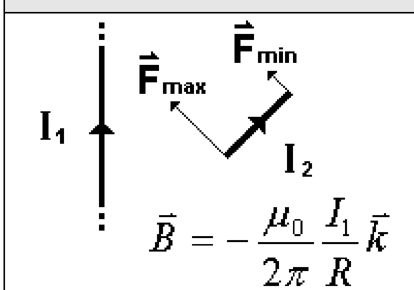
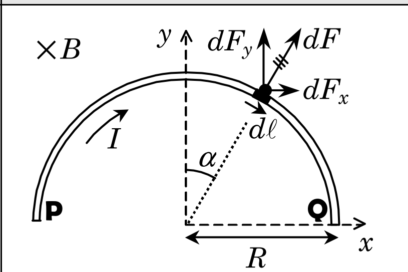
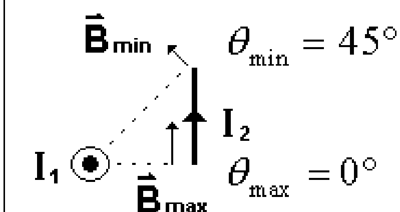
où $\mathrm{d}\vec{F}_\mathrm{m}$: Force magnétique infinitésimale appliquée sur le fil en newton (N)
I : Courant électrique dans le fil en ampère (A)
$\mathrm{d}\vec{\ell}$: Vecteur « longueur du fil » infinitésimal orienté dans le sens du courant en mètre (m)
$\vec{B}$: Champ magnétique de même valeur partout sur le fil en tesla (T)
θ : Angle entre $\vec{\ell}$ et $\vec{B}$

Situation où l'intégrale est requise

L'expression de la force magnétique $\vec{F}_\mathrm{m} = I\,\vec{\ell} \times \vec{B}$ doit être remplacée par une intégrale lorsque :

- Le fil $\vec{\ell}$ n'est pas rectiligne.
- Le champ magnétique $\vec{B}$ n'est pas constant partout sur le fil.
- L'angle θ entre le fil $\vec{\ell}$ et $\vec{B}$ n'est pas constant.

<u>Exemple :</u>

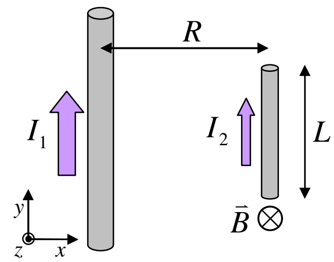
Le champ magnétique B varie de module dans l'espace.	L'orientation de la force infinitésimale $\hat{n}$ varie sur le fil.	L'angle θ varie entre B et dl pour différent calcul de dF et le module de B.
		

Situation A : ***La force magnétique sur un bout de fil parallèle.*** Un fil infini parallèle à l'axe y est parcouru par un courant $I_1 = 5\ \text{A}$ dans le sens positif de l'axe y. On désire évaluer la force magnétique appliquée sur un fil de longueur $L = 4\ \text{m}$ parallèle au fil infini parcouru par une courant $I_2 = 3\ \text{A}$ dans le sens positif de l'axe y lorsqu'ils sont séparés par une distance $R = 2\ \text{m}$.

Évaluons l'expression du champ magnétique généré par le fil infini à l'endroit où est situé le fil de 4 m :

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1}{R}\vec{k}$$

(fil infini et règle de la main droite)



Découpons notre fil en morceau de fil infinitésimal de longueur $d\ell$ et représentons la force magnétique infinitésimale $d\vec{F}_m$ produit par l'interaction des courants :

<u>Force magnétique infinitésimale :</u>

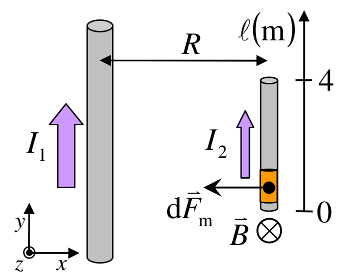
$$\mathrm{d}\vec{F}_m = I\,\mathrm{d}\ell B\sin(\theta)\hat{n}$$

et

$$I = I_2 = 3\ \text{A} \qquad \theta = 90°$$

$$B = \mu_0 I_1 / 2\pi R \qquad \hat{n} = -\vec{i}$$

$$R = 2\ \text{m}$$



Évaluons à l'aide d'une intégrale la sommation des forces magnétiques infinitésimales :

$$\vec{F}_m = \int \mathrm{d}\vec{F}_m \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_m = \int I\,\mathrm{d}\ell B\sin(\theta)\hat{n} \qquad \text{(Remplacer } \mathrm{d}\vec{F}_m\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_m = \int (I_2)\mathrm{d}\ell\left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi R}\right)\sin(90°)(-\vec{i}) \qquad \text{(Remplacer termes)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_m = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R}\int \mathrm{d}\ell\ \vec{i} \qquad \text{(Factoriser constante)}$$

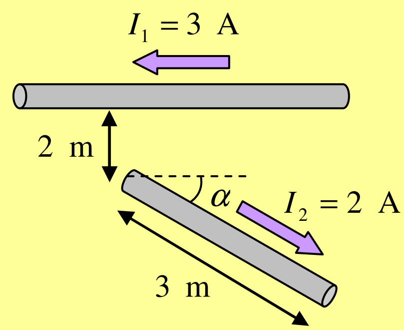
$$\Rightarrow \quad \vec{F}_m = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R}\int_{\ell=0}^{4} \mathrm{d}\ell\ \vec{i} \qquad \text{(Poser les bornes de l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_m = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R}[\ell]_0^4\vec{i} \qquad \text{(Résoudre l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_m = -\frac{(4\pi\times10^{-7})(5)(3)}{2\pi(2)}(4-0)\ \vec{i} \qquad \text{(Évaluer l'intégrale et remplacer}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{F}_m = -6\times10^{-6}\vec{i}\ \text{N}} \qquad \text{(Évaluer } \vec{F}_m\text{)}$$

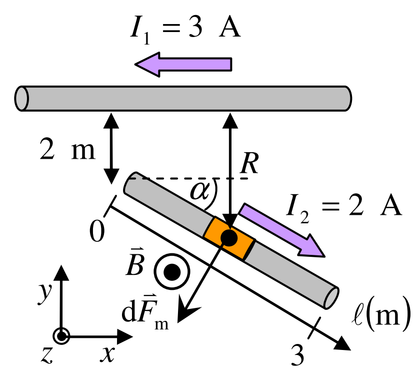
Situation 5 : ***La force magnétique par intégration, prise 2.*** Un long fil horizontal (fil **1**) est parcouru par un courant $I_1 = 3\ \text{A}$ orienté vers la gauche (schéma ci-contre). On désire déterminer la force magnétique qui s'exerce sur un fil de 3 m (fil **2**) orienté à $\alpha = -30°$ par rapport à l'horizontale parcouru par un courant $I_2 = 2\ \text{A}$ vers la droite lorsqu'ils sont séparés par une distance de 2 m tel qu'illustré sur le schéma ci-contre.



Évaluons l'expression du champ magnétique généré par le fil infini à l'endroit où est situé le fil **2** :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1}{R}\vec{k}$$

(fil infini et règle main droite)



Découpons notre fil en morceau de fil infinitésimal de longueur $\mathrm{d}\ell$ et représentons la force magnétique infinitésimale $\mathrm{d}\vec{F}_\mathrm{m}$ produit par l'interaction des courants :

<u>Force magnétique infinitésimale :</u>

$$\mathrm{d}\vec{F}_\mathrm{m} = I\,\mathrm{d}\ell B\sin(\theta)\hat{n}$$

et

$$I = I_2 = 2\ \text{A}$$
$$B = \mu_0 I_1 / 2\pi R$$
$$R = 2 + \ell\sin(30°) = 2 + 0{,}5\ell$$
$$\theta = 90°$$
$$\hat{n} = -\sin(30°)\vec{i} - \cos(30°)\vec{j}$$

Évaluons à l'aide d'une intégrale la sommation des forces magnétiques infinitésimales :

$$\vec{F}_\mathrm{m} = \int \mathrm{d}\vec{F}_\mathrm{m} \quad\Rightarrow\quad \vec{F}_\mathrm{m} = \int I\,\mathrm{d}\ell B\sin(\theta)\hat{n} \qquad \text{(Remplacer } \mathrm{d}\vec{F}_\mathrm{m}\text{)}$$

$$\Rightarrow\quad \vec{F}_\mathrm{m} = \int (I_2)\mathrm{d}\ell\left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi R}\right)\sin(90°)\hat{n} \qquad \text{(Remplacer termes)}$$

$$\Rightarrow\quad \vec{F}_\mathrm{m} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\int \frac{\mathrm{d}\ell}{2 + 0{,}5\ell}\,\hat{n} \qquad \text{(Remplacer } R \text{ et factoriser constante)}$$

$$\Rightarrow\quad \vec{F}_\mathrm{m} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\int_{\ell=0}^{3} \frac{\mathrm{d}\ell}{2 + 0{,}5\ell}\,\hat{n} \qquad \text{(Poser les bornes de l'intégrale)}$$

Effectuons le changement de variable suivant :

Changement de variable	Changement des bornes
$u = 2 + 0{,}5\ell$ $\mathrm{d}u = 0{,}5\mathrm{d}\ell \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\ell = 2\mathrm{d}u$	$\ell \to 0 \quad \Rightarrow \quad u \to 2$ $\ell \to 3 \quad \Rightarrow \quad u \to 3{,}5$

$$\vec{F}_{\mathrm{m}} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_{\ell=0}^{3} \frac{\mathrm{d}\ell}{2 + 0{,}5\ell}\ \hat{n} \qquad \text{(Équation précédente)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{\mathrm{m}} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_{u=2}^{3,5} \frac{2\mathrm{d}u}{u}\ \hat{n} \qquad \text{(Changement de variable)}$$

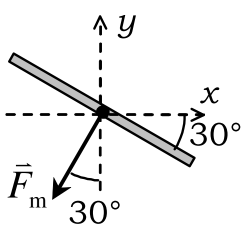
$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{\mathrm{m}} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi} \left[\ln|u|\right]_2^{3,5}\ \hat{n} \qquad \text{(Résoudre l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{\mathrm{m}} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi} \left(\ln|3{,}5| - \ln|2|\right)\ \hat{n} \qquad \text{(Évaluer l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{\mathrm{m}} = \frac{(4\pi)(3)(2)}{\pi} (0{,}5596)\ \hat{n} \qquad \text{(Remplacer valeurs numériques)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{F}_{\mathrm{m}} = 1{,}343 \times 10^{-6}\,\hat{n}\ \mathrm{N}} \qquad \text{(Évaluer } \vec{F}_{\mathrm{m}}\text{)}$$

En remplaçant $\hat{n}$, nous pouvons avoir la force magnétique décomposée en x et y :



$$\vec{F}_{\mathrm{m}} = 1{,}343 \times 10^{-6}\,\hat{n}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{\mathrm{m}} = 1{,}343 \times 10^{-6}\left(-\sin(30°)\vec{i} - \cos(30°)\vec{j}\right) \qquad \text{(Remplacer } \hat{n}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{F}_{\mathrm{m}} = \left(-0{,}6715\ \vec{i} - 1{,}163\ \vec{j}\right) \times 10^{-6}\ \mathrm{N}} \qquad \text{(Simplifier)}$$

($\hat{n} = -\sin(30°)\vec{i} - \cos(30°)\vec{j}$)

Situation 2 (Chapitre 4.3) : ***La force magnétique sur un fil en forme de demi-cercle.*** Un courant I circule dans un fil en forme de demi-cercle de rayon R. Le fil est plongé dans un champ magnétique de module B perpendiculaire au plan du demi-cercle. On désire déterminer le module de la force magnétique subie par le fil.

Découpons notre fil en morceau de fil infinitésimal de longueur $\mathrm{d}\ell$ et représentons la force magnétique infinitésimale $\mathrm{d}\vec{F}_\mathrm{m}$ produit par l'interaction du champ magnétique avec le courant :

<u>Force magnétique infinitésimale :</u>

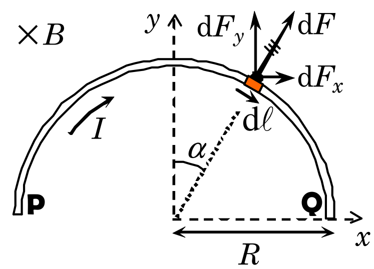
$$\mathrm{d}\vec{F}_\mathrm{m} = I\,\mathrm{d}\ell B\sin(\theta)\hat{n}$$

et

$$\mathrm{d}\ell = R\ \mathrm{d}\alpha$$

$$\theta = 90°$$

$$\hat{n} = \sin(\alpha)\vec{i} + \cos(\alpha)\vec{j}$$



Évaluons à l'aide d'une intégrale la sommation des forces magnétiques infinitésimales :

$$\vec{F}_\mathrm{m} = \int \mathrm{d}\vec{F}_\mathrm{m}$$

$\Rightarrow$ $$\vec{F}_\mathrm{m} = \int I\,\mathrm{d}\ell B\sin(\theta)\hat{n}$$ (Remplacer $\mathrm{d}\vec{F}_\mathrm{m}$)

$\Rightarrow$ $$\vec{F}_\mathrm{m} = \int I\,(R\,\mathrm{d}\alpha)B\sin(90°)\left(\sin(\alpha)\vec{i} + \cos(\alpha)\vec{j}\right)$$ (Remplacer termes)

$\Rightarrow$ $$\vec{F}_\mathrm{m} = IBR\int \mathrm{d}\alpha\left(\sin(\alpha)\vec{i} + \cos(\alpha)\vec{j}\right)$$ (Factoriser constante)

$\Rightarrow$ $$\vec{F}_\mathrm{m} = IBR\int_{\alpha=-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\alpha\left(\sin(\alpha)\vec{i} + \cos(\alpha)\vec{j}\right)$$ (Poser bornes de l'intégrale)

$\Rightarrow$ $$\vec{F}_\mathrm{m} = IBR\left[\int_{\alpha=-\pi/2}^{\pi/2}\sin(\alpha)\mathrm{d}\alpha\,\vec{i} + \int_{\alpha=-\pi/2}^{\pi/2}\cos(\alpha)\mathrm{d}\alpha\,\vec{j}\right]$$ (Distribuer l'intégrale)

$\Rightarrow$ $$\vec{F}_\mathrm{m} = IBR\left(\left[-\cos(\alpha)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}\vec{i} + \left[\sin(\alpha)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}\vec{j}\right)$$ (Résoudre l'intégrale)

$\Rightarrow$ $$\vec{F}_\mathrm{m} = IBR\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - -\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\vec{i} + IBR\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\vec{j}$$ (Évaluer l'intégrale)

$\Rightarrow$ $$\boxed{\vec{F}_\mathrm{m} = 2IBR\,\vec{j}}$$ (Évaluer l'intégrale)