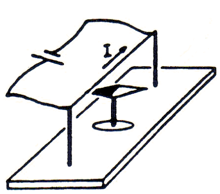
Chapitre 4.6a – Le champ magnétique généré par un fil rectiligne

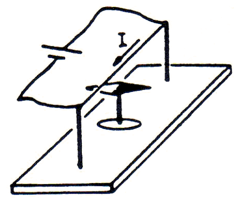
L'Expérience de Oersted


Hans Christian Oersted
(1777-1851)

En 1819, Hans Christian Oersted réalise qu'une boussole est influencée lorsqu'elle est située près d'un fil parcouru par un courant électrique. Il conclue alors qu'un fil transportant courant électrique I génère un champ magnétique $\vec{B}$ autour de celui-ci.

Voici les deux orientations possibles pour la boussole en fonction du sens du courant :





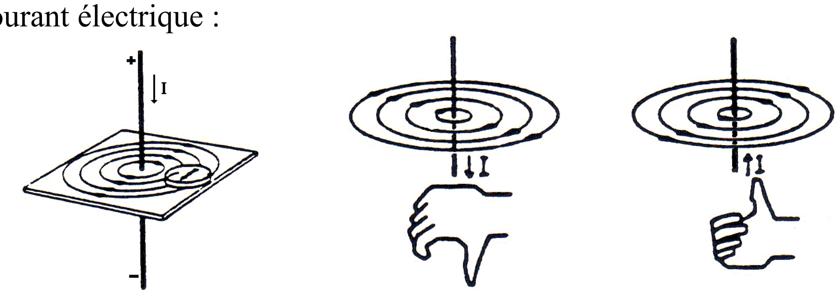
Avec cette expérience, on réalise que :

- ❖ Un courant électrique produit un champ magnétique.
- ❖ La direction du champ magnétique est perpendiculaire à la direction du courant.
- ❖ Le sens du champ magnétique dépend du sens du courant.

Ainsi :

- ❖ Les **charges électriques produisent** un **champ électrique** $\vec{E}$.
- ❖ Les **charges électriques** en **mouvement produisent** un **champ magnétique** $\vec{B}$.

On peut maintenant déterminer expérimentalement la forme du champ magnétique près d'un fil parcouru par un courant électrique :

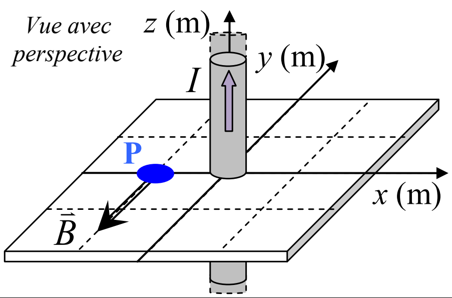
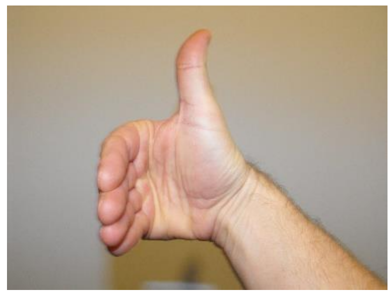
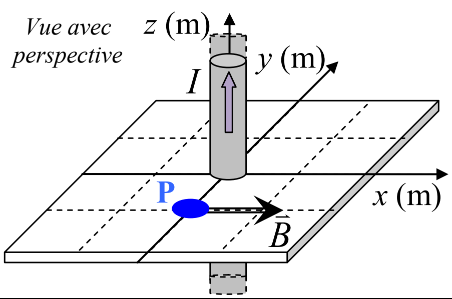
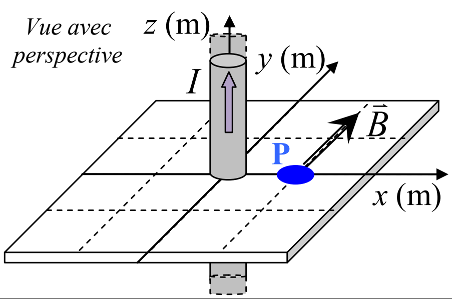
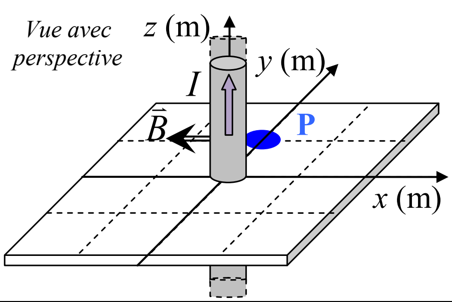
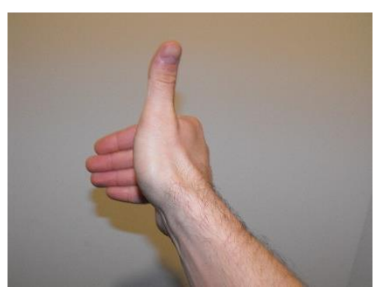


La règle de la main droite – Orientation du champ magnétique

Afin de déterminer l'orientation du champ magnétique généré par un fil parcouru un courant, nous pouvons utiliser la règle de la main droite suivante :

- **Pouce :** Sens du courant conventionnel
- **Jointures :** Endroit où l'on veut évaluer le champ magnétique
- Plier les doigts à 90º avec la paume de la main.
- **Orientation des doigts :** Sens du champ magnétique $\vec{B}$

<u>Example :</u> Soit un fil transportant un courant selon l'axe z positif

Schéma de la situation	Positionnement de la main droite
	
	
	
	

Le module du champ magnétique produit par un fil rectiligne infini parcouru par un courant

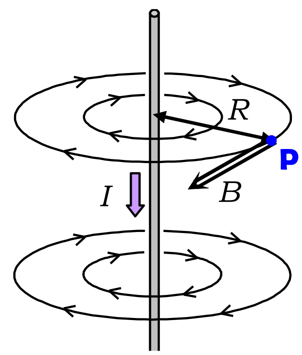
Un mois après avoir pris connaissance des expériences d'Œrsted sur le magnétisme, les deux physiciens français Jean-Baptiste Biot et Félix Savart furent en mesure de déterminer une expression mathématique décrivant le module et l'orientation du champ magnétique $\vec{B}$ généré par un long fil rectiligne parcouru par un courant électrique *I*.

Jean-Baptiste Biot
(1774-1862)

Félix Savart
(1791-1841)

Le module du champ magnétique $\vec{B}$ était proportionnel au courant électrique *I* et inversement proportionnel à la distance *R* entre le fil et l'endroit **P** où est évalué le champ magnétique :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$



où B : Le champ magnétique en tesla (T)

I : Courant électrique en ampère (A)

R : Distance entre le point **P** et le fil en mètre (m)

μ_0 : Constante magnétique[1], $4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{Ns^2/C^2}$

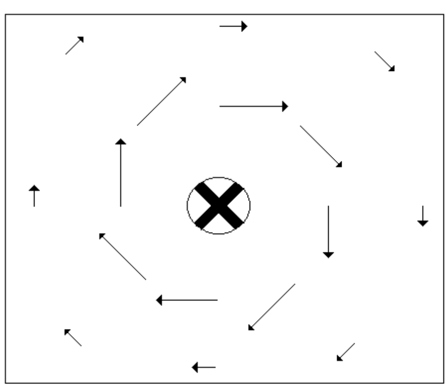
Preuve :

La démonstration sera présentée à l'aide d'une autre équation de cette section.

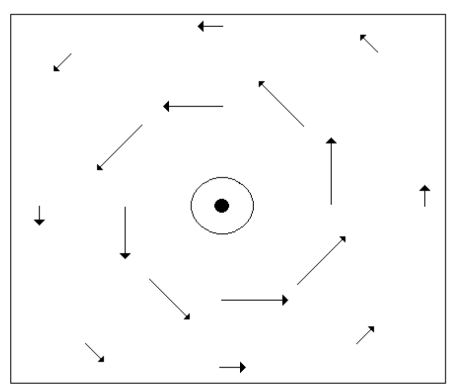
La forme générale du champ magnétique

Voici une représentation vectorielle du champ magnétique généré par fil parcouru par un courant électrique :

Courant entre dans le plan



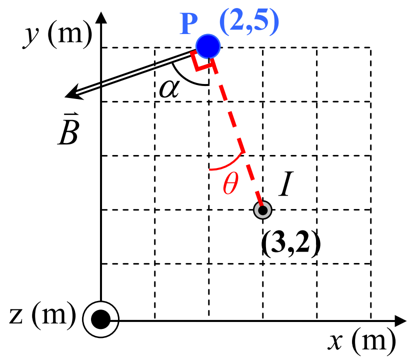
Courant sort du plan



[1] Le nom historique à la constante magnétique est la *perméabilité du vide*.

Situation A : *Le fil infini parallèle à l'axe z.* Un très long fil parallèle à l'axe z situé à la coordonnée (x = 3 m, y = 2 m) d'un plan cartésien est parcouru par un courant de 0,9 A dans le sens positif de l'axe z. On désire évaluer le champ magnétique sous forme vectoriel généré par ce fil à la coordonnée (x = 2 m , y = 5 m) du plan cartésien.

Voici une représentation graphique de la situation dans un plan cartésien xyz :



Nous avons les informations suivantes selon la géométrie du problème :

- Courant circulant dans le fil : $I = 0{,}9 \text{ A}$
- La distance entre le point **P** et le fil : $R = \sqrt{1^2 + 3^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = 3{,}162 \text{ m}}$
- Angle θ : $\tan(\theta) = \dfrac{(1)}{(3)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta = 18{,}43°}$
- Angle de projection α : $\alpha = 90° - \theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = 71{,}57°}$

Évaluons le module du champ magnétique généré par le fil au point **P** :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{(4\pi \times 10^{-7})(0{,}9)}{2\pi(3{,}162)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{B = 5{,}6925 \times 10^{-8} \text{ T}}$$

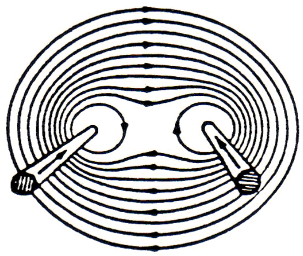
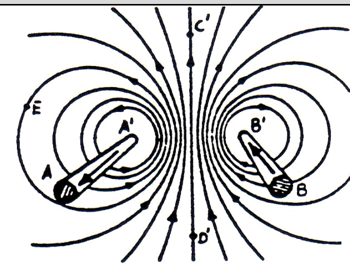
Évaluons le vecteur champ magnétique en décomposant le tout selon l'axe x et y :

$$\vec{B} = B\left(-\sin(\alpha)\vec{i} - \cos(\alpha)\vec{j}\right) \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \left(5{,}6925 \times 10^{-8}\right)\left(-\sin(71{,}57°)\vec{i} - \cos(71{,}57°)\vec{j}\right)$$

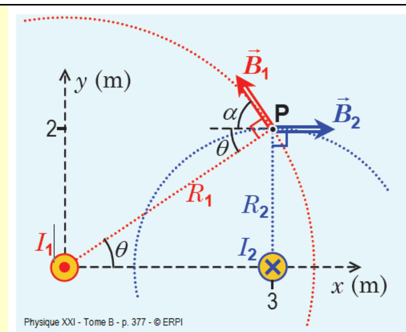
$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{B} = \left(-5{,}400\vec{i} - 1{,}800\vec{j}\right) \times 10^{-8} \text{ T}}$$

Champ magnétique de deux courants rectilignes parallèles

Puisque le **champ magnétique** est une **grandeur vectorielle**, on peut faire l'addition vectorielle des deux champs magnétiques générés par les deux courants de même intensité et évaluer le champ magnétique total.

Même direction ($I_A = I_B$)	Direction opposée ($I_A = I_B$)
	

Situation 1 : ***La superposition des champs magnétiques.*** Considérons deux longs fils perpendiculaires au plan *xy* : le fil **1** passe par l'origine et porte un courant de 4 A orienté dans le sens positif de l'axe *z*. Le fil **2** passe par le point (x = 3 m ; y = 0) et porte un courant de 8 A orienté dans le sens négatif de l'axe *z*. On désire déterminer le (**a**) champ magnétique résultant au point **P** de coordonnées (x = 3 m ; y = 2 m) et (**b**) son module.



À partir du schéma, nous pouvons déterminer les paramètres suivants nécessaires aux calculs des champs magnétiques $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$:

- $I_1 = 4\ \text{A}$
- $I_2 = 8\ \text{A}$
- $R_1 = \sqrt{R_{x1}^{\ 2} + R_{y1}^{\ 2}} \quad \Rightarrow \quad R_1 = \sqrt{(3\,\text{m})^2 + (2\,\text{m})^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_1 = 3{,}606\ \text{m}}$
- $R_2 = \sqrt{R_{x2}^{\ 2} + R_{y2}^{\ 2}} \quad \Rightarrow \quad R_2 = \sqrt{(0)^2 + (2\,\text{m})^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_2 = 2\ \text{m}}$

Débutons par évaluer l'angle θ et α associé à la géométrie du champ magnétique $\vec{B}_1$:

- $\theta = \arctan\left(\dfrac{(2\,\text{m})}{(3\,\text{m})}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta = 33{,}69°}$
- $\alpha + \theta = 90° \quad \Rightarrow \quad \alpha + (33{,}69°) = 90° \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = 56{,}31°}$

Évaluons le champ magnétique $\vec{B}_1$ sous forme vectorielle :

$$\vec{B}_1 = B_1\hat{n} \quad \Rightarrow \quad \vec{B}_1 = \left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi R_1}\right)\left(-\cos(\alpha)\vec{i} + \sin(\alpha)\vec{j}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{B}_1 = \frac{\left(4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{T\cdot m/A}\right)(4\,\mathrm{A})}{2\pi(3{,}606\,\mathrm{m})}\left(-\cos(56{,}31°)\vec{i} + \sin(56{,}31°)\vec{j}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{B}_1 = \left(2{,}218\times10^{-7}\,\mathrm{T}\right)\left(-0{,}5547\vec{i} + 0{,}8321\vec{j}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{B}_1 = \left(-1{,}230\vec{i} + 1{,}845\vec{j}\right)\times10^{-7}\,\mathrm{T}}$$

Évaluons le champ magnétique $\vec{B}_2$ sous forme vectorielle :

$$\vec{B}_2 = B_2\hat{n} \quad \Rightarrow \quad \vec{B}_2 = \left(\frac{\mu_0 I_2}{2\pi R_2}\right)\left(+\vec{i}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{B}_2 = \frac{\left(4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{T\cdot m/A}\right)(8\,\mathrm{A})}{2\pi(2\,\mathrm{m})}\vec{i}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{B}_2 = 8\times10^{-7}\vec{i}\ \mathrm{T}}$$

Évaluons le champ magnétique total :

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \left(\left(-1{,}230\vec{i} + 1{,}845\vec{j}\right)\times10^{-7}\,\mathrm{T}\right) + \left(8\times10^{-7}\vec{i}\ \mathrm{T}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{B} = \left(6{,}770\vec{i} + 1{,}845\vec{j}\right)\times10^{-7}\,\mathrm{T}} \qquad (\mathbf{a})$$

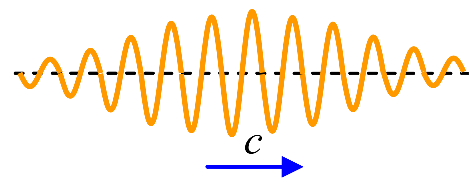
Évaluons le module du champ magnétique :

$$\vec{B} = \sqrt{B_x^{\ 2} + B_y^{\ 2}} \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \sqrt{(6{,}770)^2 + (1{,}845)^2}\times10^{-7}\,\mathrm{T}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{B} = 7{,}017\times10^{-7}\,\mathrm{T}} \qquad (\mathbf{b})$$

Relation entre ε_0 et μ_0 et vitesse de la lumière

L'électricité et le magnétisme sont de nos jours deux théories unifiées qui portent le nom d'électromagnétisme. Dans cette théorie, le photon correspond à la particule qui véhicule l'interaction électromagnétique tout en transportant l'énergie du champ électrique et magnétique.



Représentation artistique d'un photon.

Cette particule a la particularité de se déplacer toujours à une vitesse constante c appelée « vitesse de la lumière ». Cette vitesse peut être obtenue à partir de la constante électrique et la constante magnétique du vide :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3\times 10^8\ \text{m/s}$$

où c : Vitesse de la lumière, $c = 3\times 10^8\ \text{m/s}$

ε_0 : Constante électrique (*permitivité du vite*), $\varepsilon_0 = 8{,}85\times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{Nm}^2$

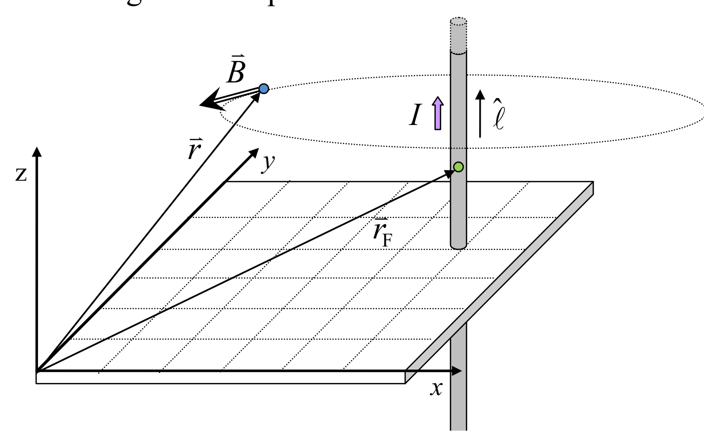
μ_0 : Constante magnétique (*perméabilité du vide*), $\mu_0 = 4\pi\times 10^{-7}\ \text{Ns}^2/\text{C}^2$

Le champ magnétique d'un fil infini à l'aide des vecteurs positions (complément informatique)

À partir d'un point $\vec{r}_\text{F}$ appartenant à un fil infini où s'écoule un courant I selon l'orientation $\hat{\ell}$, nous pouvons évaluer le champ magnétique à une position $\vec{r}$ grâce à l'équation suivante :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\vec{R}_\text{F}}{\left\|\vec{R}_\text{F}\right\|^2}$$

où $$\vec{R}_\text{F} = \hat{\ell}\times\left(\vec{r} - \vec{r}_\text{F}\right)$$



où $\vec{B}$: Le champ magnétique généré par le fil (T).

I : Le courant dans le fil (A).

$\vec{r}$: Le vecteur position où le champ magnétique est évalué (m).

$\vec{r}_\text{F}$: Le vecteur position d'un des points appartenant au fil (m).

$\hat{\ell}$: L'orientation de l'axe du fil dans le sens du courant (m).

μ_0 : Constante magnétique (*perméabilité du vide*), $\mu_0 = 4\pi\times 10^{-7}\ \text{Ns}^2/\text{C}^2$.

<u>Preuve :</u>

En construction …

La loi de Biot-Savart

Après avoir déterminer le module du champ magnétique $\vec{B}$ généré par un long fil parcouru par un courant, les physiciens Biot et Savart détermine en 1820 le champ magnétique infinitésimal $\mathrm{d}\vec{B}$ généré par un segment de fil infinitésimal $\mathrm{d}\vec{\ell}$ parcouru par un courant électrique *I* à un endroit P. Cependant, cette expression n'est valide que lorsque les charges électriques en mouvement se déplacent lentement[2] ce qui est le cas lorsqu'il y a un courant électrique qui circule dans un fil conducteur :

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\ell\sin(\theta)}{r^2}\hat{n}$$

où $\mathrm{d}\vec{B}$: Champ magnétique infinitésimal en tesla (T)

I : Courant électrique qui circule dans l'élément de fil en ampère (A)

$\mathrm{d}\vec{\ell}$: Segment de fil infinitésimal orienté dans le sens du courant en mètre (m)

r : Distance entre $\mathrm{d}\vec{\ell}$ et l'endroit P où l'on veut évaluer le champ en mètre (m)

μ_0 : Constante magnétique, $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{Ns^2/C^2}$

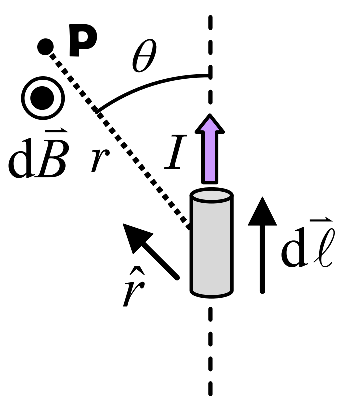
θ : Angle entre $\mathrm{d}\vec{\ell}$ et $\hat{r}$

$\hat{r}$: Vecteur unitaire d'orientation de $\mathrm{d}\vec{\ell}$ (source) à P (cible) $(|\hat{r}|=1)$

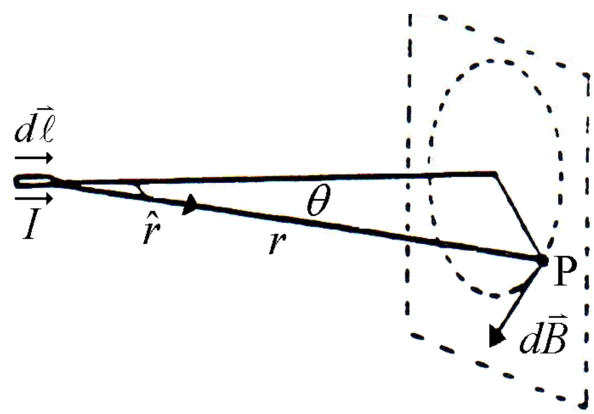
$\hat{n}$: Orientation du champ magnétique selon la règle de la main droite $(|\hat{n}|=1)$

Représentation :

2 dimensions



3 dimensions



[2] La force magnétique et le champ magnétique sont en réalité une manifestation d'un effet relativiste qui porte le nom de « contraction des longueurs » lorsqu'il y a des charges électriques en mouvement. À basse vitesse, l'approximation de la loi de Biot-Savart s'applique pour exprimer la valeur du champ magnétique.

Champ magnétique d'un fil fini

Le module du champ magnétique B généré par un fil fini parcouru par un courant I dépend de la distance R entre le fil et l'endroit **P** où l'on désire évaluer le champ magnétique, du courant I et de la position angulaire des extrémités du fil par rapport au point **P** :

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left|\sin(\alpha_1) - \sin(\alpha_2)\right|$$

où B : Champ magnétique produit par le fil au point **P** (T)

I : Courant électrique (A)

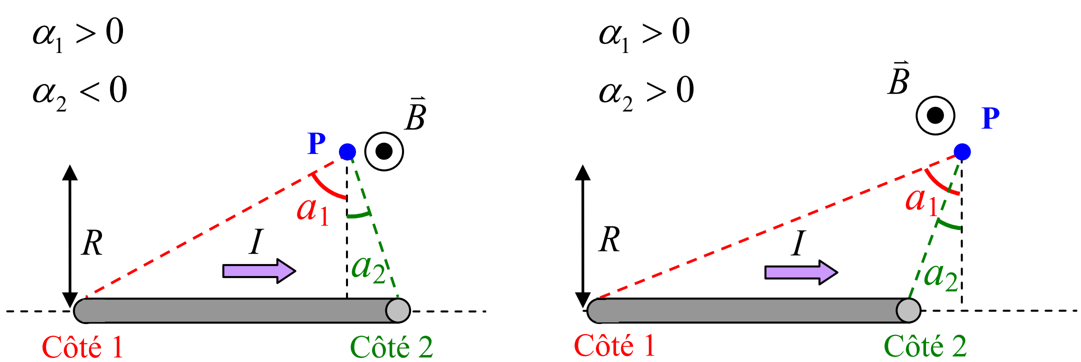
R : Plus petite distante entre le point **P** et le prolongement du fil (m)

μ_0 : Constante magnétique, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{Ns^2/C^2}$

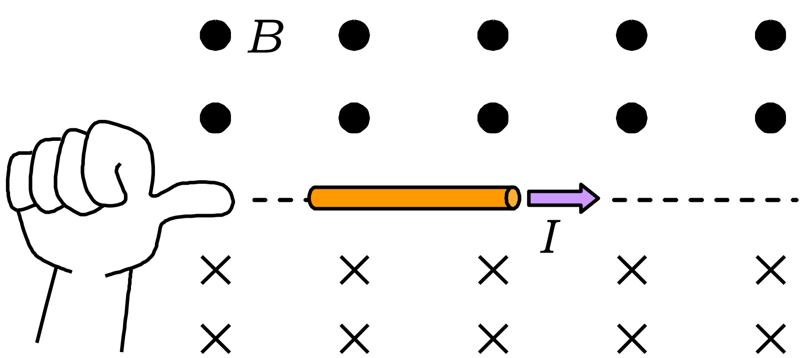
α_1 : Angle délimitant l'extrémité du **Côté 1** du fil par rapport au point **P**

α_2 : Angle délimitant l'extrémité du **Côté 2** du fil par rapport au point **P**

Schéma :

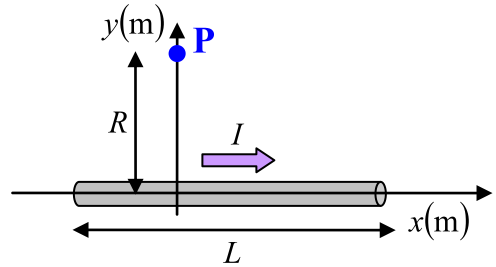


L'orientation du champ magnétique selon la règle de la main droite :



Preuve :

Considérons un fil de longueur L parallèle à l'axe x où il y circule un courant électrique I. Évaluons le champ magnétique B généré par ce fil en un point **P** à une distance R du fil tel qu'illustré sur le schéma ci-contre.



Découpons notre fil en morceau de fil infinitésimal de longueur $\mathrm{d}x$ et représentons le champ magnétique infinitésimal $\mathrm{d}\vec{B}$ généré par ce fil infinitésimal à l'aide de notre système d'axe :

Champ magnétique infinitésimal :

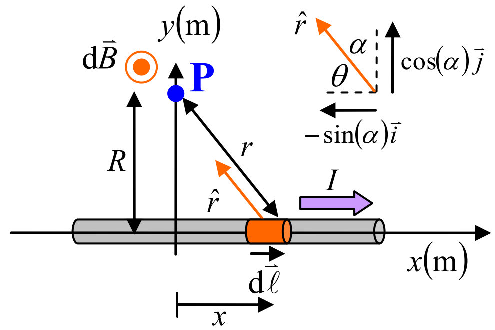
$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\,\mathrm{d}\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}$$

et

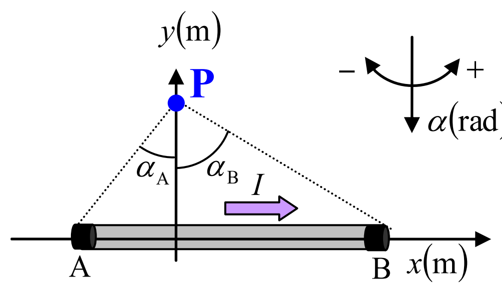
$$\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}x\,\vec{i}$$

$$r = \sqrt{x^2 + R^2}$$

$$\hat{r} = -\sin(\alpha)\vec{i} + \cos(\alpha)\vec{j}$$

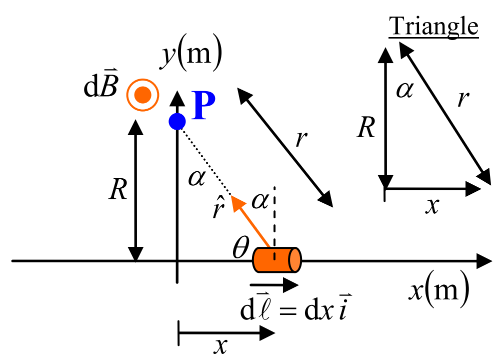


Introduisons un nouveau système d'axe α qui mesure un angle par rapport à l'axe vertical y. Ce système d'axe permet de délimiter les extrémités du fil A et B. Dans ce cas particulier, $\alpha_A < 0$ et $\alpha_B > 0$.



Avec ce nouveau système d'axe, nous pouvons établir des nouvelles relations trigonométriques entre x, R, r et α :

- $\cos(\alpha) = \dfrac{R}{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{r = \dfrac{R}{\cos(\alpha)}}$
- $\tan(\alpha) = \dfrac{x}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = R\tan(\alpha)}$



Puisque nous avons dans l'expression de $\mathrm{d}\vec{\ell}$ une référence à dx, nous devons évaluer dx en fonction de α si nous voulons utiliser l'axe α pour effectuer notre sommation à l'aide de l'intégrale :

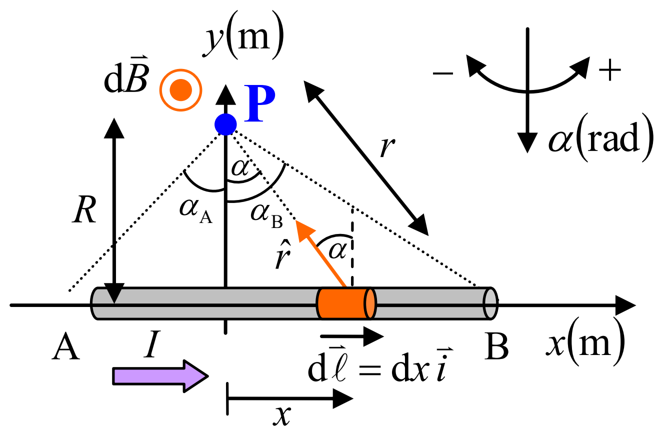
$x = R\tan(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \mathrm{d}(R\tan(\alpha))$ (Appliquer la différentielle de chaque côté)

$\Rightarrow \quad \mathrm{d}x = R\,\mathrm{d}(\tan(\alpha))$ (Factoriser la constance R)

$\Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{d}x = R\sec^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha}$ ($\mathrm{d}(\tan\alpha) = \sec^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha$)

Évaluons à l'aide d'une sommation continue de champs magnétiques infinitésimaux $\mathrm{d}\vec{B}$ le champ magnétique total au point **P** en se basant sur le schéma ci-contre :

- $\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}x\,\vec{i}$
- $\mathrm{d}x = R\sec^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha$
- $x = R\tan(\alpha)$
- $r = \sqrt{x^2 + R^2}$
- $\hat{r} = -\sin(\alpha)\vec{i} + \cos(\alpha)\vec{j}$



Ainsi :

$\vec{B} = \int \mathrm{d}\vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \int \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\,\mathrm{d}\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2}$ (Remplacer $\mathrm{d}\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\,\mathrm{d}\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2}$)

$\Rightarrow \quad \vec{B} = \int \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\left(\mathrm{d}x\,\vec{i}\right)\times\hat{r}}{\left(\sqrt{x^2+R^2}\right)^2}$ (Remplacer $\mathrm{d}\vec{\ell}$ et r)

$\Rightarrow \quad \vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\int \dfrac{\mathrm{d}x\,\vec{i}\times\hat{r}}{x^2+R^2}$ (Factoriser constante et simplifier racine)

$\Rightarrow \quad \vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\int \dfrac{\left(R\sec^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha\right)\vec{i}\times\hat{r}}{(R\tan(\alpha))^2+R^2}$ (Remplacer x et dx en fonction de α)

$\Rightarrow \quad \vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\int \dfrac{R\sec^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha\;\vec{i}\times\hat{r}}{R^2\tan^2(\alpha)+R^2}$ (Mettre terme au carré)

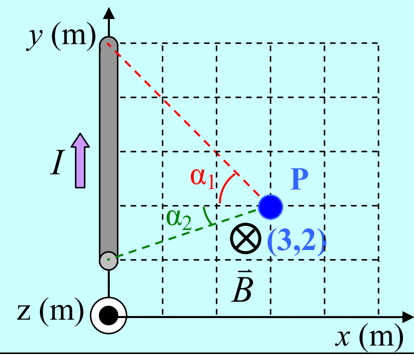
$\Rightarrow \quad \vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\int \dfrac{R\sec^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha\;\vec{i}\times\hat{r}}{R^2\left(\tan^2(\alpha)+1\right)}$ (Factoriser R^2 au dénominateur)

$\Rightarrow \quad \vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\int \dfrac{\sec^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha\;\vec{i}\times\hat{r}}{R\left(\sec^2(\alpha)\right)}$ (Simplifier R, identité trigo : $\tan^2(\theta)+1=\sec^2(\theta)$)

Simplifions l'expression de l'intégrale. Puisque $\hat{r}$ varie selon l'angle α, il n'est pas constant dans l'intégrale. Remplaçons $\hat{r}$ et posons les bornes d'intégration à notre intégrale : ($\hat{r} = -\sin(\alpha)\vec{i} + \cos(\alpha)\vec{j}$)

	$\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi} \displaystyle\int \dfrac{\sec^2(\alpha)\mathrm{d}\alpha\ \vec{i} \times \hat{r}}{R(\sec^2(\alpha))}$	(Expression précédente)
$\Rightarrow$	$\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi R} \displaystyle\int \mathrm{d}\alpha\ \vec{i} \times \hat{r}$	(Simplifier et factoriser constante)
$\Rightarrow$	$\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi R} \displaystyle\int \mathrm{d}\alpha\ \vec{i} \times (-\sin(\alpha)\vec{i} + \cos(\alpha)\vec{j})$	(Remplacer $\hat{r} = -\sin(\alpha)\vec{i} + \cos(\alpha)\vec{j}$)
$\Rightarrow$	$\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi R} \displaystyle\int (-\sin(\alpha)\vec{i} \times \vec{i} + \cos(\alpha)\vec{i} \times \vec{j})\mathrm{d}\alpha$	(Distribuer produit vectoriel)
$\Rightarrow$	$\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi R} \displaystyle\int \cos(\alpha)\mathrm{d}\alpha\ \vec{k}$	(Effectuer produit vectoriel : $\vec{i} \times \vec{i} = 0$ et $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$)
$\Rightarrow$	$\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi R} \displaystyle\int_{\alpha=\alpha_\mathrm{A}}^{\alpha_\mathrm{B}} \cos(\alpha)\mathrm{d}\alpha\ \vec{k}$	(Borne : $\alpha = \alpha_\mathrm{A} \to \alpha_\mathrm{B}$)
$\Rightarrow$	$\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi R} [\sin(\alpha)]_{\alpha_\mathrm{A}}^{\alpha_\mathrm{B}}\ \vec{k}$	(Résoudre l'intégrale)
$\Rightarrow$	$\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi R} (\sin(\alpha_\mathrm{B}) - \sin(\alpha_\mathrm{A}))\vec{k}$	(Évaluer l'intégrale)
$\Rightarrow$	$B = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi R} \lvert\sin(\alpha_\mathrm{A}) - \sin(\alpha_\mathrm{B})\rvert$ ■	(Évaluer seulement le module du champ *B*)

Situation A : ***Le fil fini sur l'axe y.*** Un fil de 4 m parallèle à l'axe y est centré à la coordonnée (0,3) d'un plan cartésien. On désire évaluer le champ magnétique sous forme vectoriel généré par le fil à la coordonnée (3,2) du plan cartésien sachant qu'un courant de 0,5 A circule dans le fil dans le sens positif de l'axe y.



Nous avons les informations suivantes selon la géométrie du problème :

Courant circulant dans le fil : $I = 0{,}5\ \text{A}$

La distance entre le point **P** et le fil : $R = 3\ \text{m}$

Angle α_1 : $\tan(\alpha_1) = \dfrac{(3)}{(3)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_1 = 45°}$

Angle α_2 : $\tan(\alpha_2) = \dfrac{(-1)}{(3)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_2 = -18{,}43°}$

Nous avons ainsi le champ magnétique suivant au point **P** produit par la tige :

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left|\sin(\alpha_1) - \sin(\alpha_2)\right| \quad \Rightarrow \quad B = \frac{(4\pi \times 10^{-7})(0{,}5)}{4\pi(3)}\left|\sin(45°) - \sin(-18{,}43°)\right|$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{B = 1{,}7 \times 10^{-8}\ \text{T}}$$

Avec la règle de la main droite, nous pouvons préciser le champ magnétique sous forme vectorielle :

$$\boxed{\vec{B} = -1{,}7 \times 10^{-8}\,\vec{k}\ \ \text{T}}$$

Le champ magnétique généré par une charge ponctuelle en mouvement à basse vitesse constant (complément informatique)

Le champ magnétique $\vec{B}$ généré par une charge ponctuelle Q en mouvement à basse[3] vitesse $\vec{v}$ dépend du sens de la vitesse ainsi que de la position où sera évalué le champ magnétique. Le champ magnétique sera rotatif autour de l'axe de la vitesse de la particule.

Définition avec vecteur orientation $\hat{r}$	Définition avec vecteur position $\vec{r}$ et $\vec{r}_Q$
$\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{Q\vec{v}\times\hat{r}}{r^2}$	$\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{Q\vec{v}\times\left(\vec{r}-\vec{r}_Q\right)}{\left\Vert\vec{r}-\vec{r}_Q\right\Vert^2}$

(Condition de validité : $v << c = 3\times10^8\,\text{m/s}$)

où $\vec{B}$: Champ magnétique en tesla (T)

Q : Charge en mouvement (C)

$\vec{v}$: Vitesse de la charge en mouvement (m/s)

r : Distance entre la charge Q et l'endroit P où l'on veut évaluer le champ en mètre (m)

$\hat{r}$: Vecteur unitaire d'orientation de Q (source) à P (cible) ($\left|\hat{r}\right| = 1$)

$\vec{r}$: Vecteur position de la cible (m).

$\vec{r}_Q$: Vecteur position de la charge (m).

μ_0 : Constante magnétique, $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\,\text{Ns}^2/\text{C}^2$

Preuve :

Considérons un élément de fil infinitésimal $\mathrm{d}\vec{\ell}$ dans lequel circule un courant *I*. Attribuons le courant à une charge $\mathrm{d}Q$ comptabilisée sur un intervalle de temps $\mathrm{d}t$ donnant la relation

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

et que les premières charges comptabilisées ont eu le temps de se déplacer sur la longueur du fil $\mathrm{d}\vec{\ell}$ à une vitesse constante $\vec{v}$ donnant ainsi la relation de cinématique

$$\mathrm{d}\vec{\ell} = \vec{v}\,\mathrm{d}t \quad .$$

[3] Cette démonstration est basée sur le champ magnétique généré par un fil où un courant y circule. Puisque les charges en mouvement se déplacent à très basse vitesse dans un fil, il faut accepter que cette démonstration ne soit valide qu'à basse vitesse. Une démonstration faisant intervenir des principes avancés d'électromagnétisme en fait la démonstration.

Démontrons qu'une charge totale Q en mouvement à basse vitesse $\vec{v}$ sera responsable de générer un champ magnétique $\vec{B}$ à l'aide de la loi de Biot-Savart :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2} \quad\Rightarrow\quad d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\left(\vec{v}\,dt\right)\times\hat{r}}{r^2} \qquad \text{(Remplacer } d\vec{\ell} = \vec{v}\,dt\text{)}$$

$$\Rightarrow\quad d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{dQ}{dt}\frac{\vec{v}\,dt\times\hat{r}}{r^2} \qquad \text{(Remplacer } I = \frac{dQ}{dt}\text{)}$$

$$\Rightarrow\quad d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}dQ\frac{\vec{v}\times\hat{r}}{r^2} \qquad \text{(Simplifier } dt\text{)}$$

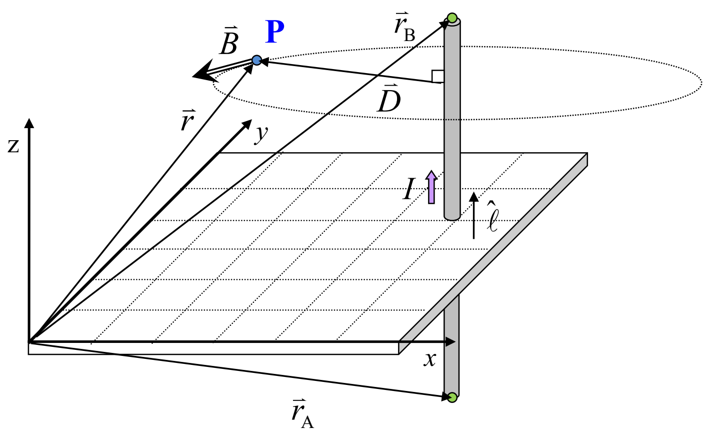
$$\Rightarrow\quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Q\,\vec{v}\times\hat{r}}{r^2} \quad \blacksquare \qquad \text{(Réaliser l'intégral)}$$

Le champ magnétique d'un fil rectiligne fini à l'aide des vecteurs positions (complément informatique)

À partir de la position $\vec{r}_A$ et $\vec{r}_B$ désignant les deux extrémités d'un fil parcouru par un courant I, nous pouvons évaluer une expression vectorielle pour déterminer le champ magnétique $\vec{B}$ à une position $\vec{r}$ désignée par un point **P** grâce aux équations suivantes :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\vec{R}_F}{\left\|\vec{R}_F\right\|^2}\left|\sin\left(\alpha_A\right) - \sin\left(\alpha_B\right)\right|$$

où $$\vec{R}_F = \hat{\ell}\times\left(\vec{r} - \vec{r}_F\right)$$



avec les terme suivants :

$$\vec{\ell} = \frac{\vec{r}_B - \vec{r}_A}{\left\|\vec{r}_B - \vec{r}_A\right\|} \qquad \vec{r}_{pA} = \vec{r}_A - \vec{r} \qquad \vec{r}_{pB} = \vec{r}_B - \vec{r} \qquad \hat{r}_{pA} = \frac{\vec{r}_{pA}}{\left\|\vec{r}_{pA}\right\|} \qquad \hat{r}_{pB} = \frac{\vec{r}_{pB}}{\left\|\vec{r}_{pB}\right\|}$$

(point **P** vers **A**) (point **P** vers **B**)

$$\vec{n} = \vec{r}_{pA}\times\vec{\ell} \qquad \hat{n} = \frac{\vec{n}}{\left\|\vec{n}\right\|} \qquad \vec{D} = \vec{n}\times\vec{\ell} \qquad \hat{D} = \frac{\vec{D}}{\left\|\vec{D}\right\|}$$

(attention aux vecteurs !) (attention aux vecteurs !)

$$\alpha_A = \arcsin\left(\hat{D}\times\hat{r}_{pA}\cdot\hat{n}\right) \qquad \alpha_B = \arcsin\left(\hat{D}\times\hat{r}_{pB}\cdot\hat{n}\right)$$

(angle positif ou négatif) (angle positif ou négatif)

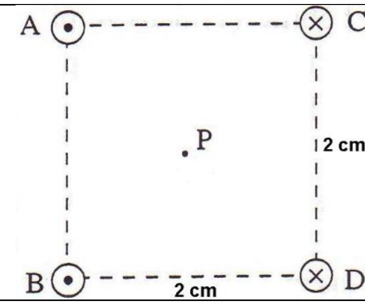
Preuve :

En construction …

Exercice

Référence : Note Science Santé – Chapitre 6 – Question 4

Quatre longs conducteurs parallèles, perpendiculaires au plan de la feuille, sont parcourus par des courants de 4 A. Calculez le champ magnétique au point P, situé au centre.



Solution

Référence : Note Science Santé – Chapitre 6 – Question 4

Courant :

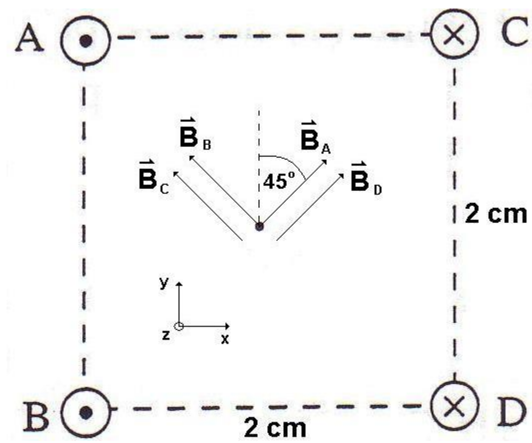
$$I_A = I_B = I_C = I_D = 4 \text{ A}$$

Champ d'un fil infini :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

Distance entre P et les fils :

$$R_A = R_B = R_C = R_D$$
$$= \sqrt{(0{,}01)^2 + (0{,}01)^2} = 0{,}0141 \text{ m}$$



À l'aide du principe de superposition du champ magnétique, Par symétrie, il ne reste que la composante en y :

$$\vec{B}_{tot} = 4B\cos(45°)\ \vec{j} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{B}_{tot} = 4\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\right)\cos(45°)\ \vec{j}$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{B}_{tot} = 4\frac{(4\pi\times10^{-7})(4)}{2\pi(0{,}0141)}\cos(45°)\ \vec{j}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\vec{B}_{tot} = 1{,}60\times10^{-4}\,\vec{j}\ \text{T}}$$