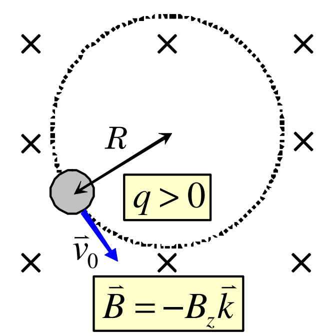
Chapitre 4.2d – Le mouvement dans un champ électrique et magnétique constant

Les équations du mouvement dans un champ magnétique constant

Le mouvement d'une particule de chargée dans un champ magnétique constant est de forme circulaire dans un plan perpendiculaire au champ magnétique $\vec{B}$. Lorsque le mouvement s'effectue dans le plan *xy* sous l'influence d'un champ magnétique $\vec{B}$ selon l'axe *z*, nous avons les équations du mouvement suivantes :



<u>Selon l'axe *x* :</u> $$x(t) = x_0 + R(\sin(\omega t - \phi) + \sin(\phi))$$

<u>Selon l'axe *y* :</u> $$y(t) = y_0 + R(\cos(\omega t - \phi) - \cos(\phi))$$

où $x(t)$: Position de la particule selon l'axe *x* (m)
$y(t)$: Position de la particule selon l'axe *y* (m)
R : Rayon de la trajectoire circulaire (m)
ω : Fréquence angulaire de la trajectoire circulaire (rad/s)
t : Temps écoulé durant le mouvement (s)
ϕ : Angle de projection de la vitesse initiale par rapport à l'axe *x* (rad)
B_z : Champ magnétique selon l'axe *z* (T)
x_0 : Position de la particule selon l'axe *x* à $t = 0$ (m)
y_0 : Position de la particule selon l'axe *y* à $t = 0$ (m)
v_{x0} : Vitesse de la particule selon l'axe *x* à $t = 0$ (m/s)
v_{y0} : Vitesse de la particule selon l'axe *y* à $t = 0$ (m/s)

et $v = \sqrt{v_{x0}^2 + v_{y0}^2}$ $\quad R = \dfrac{mv}{qB_z}$ $\quad \omega = \dfrac{qB_z}{m}$ $\quad \tan(\phi) = \dfrac{v_{y0}}{v_{x0}}$

avec les conditions suivantes pour le choix[1] de l'angle ϕ :

1$^{\text{ier}}$ cadran ($v_{x0} > 0$ et $v_{y0} > 0$)	2$^{\text{ième}}$ cadran ($v_{x0} < 0$ et $v_{y0} > 0$)	3$^{\text{ième}}$ cadran ($v_{x0} < 0$ et $v_{y0} < 0$)	4$^{\text{ième}}$ cadran ($v_{x0} > 0$ et $v_{y0} < 0$)
$\phi = \arctan\left(\dfrac{v_{y0}}{v_{x0}}\right)$	$\phi = \arctan\left(\dfrac{v_{y0}}{v_{x0}}\right) + \pi$	$\phi = \arctan\left(\dfrac{v_{y0}}{v_{x0}}\right) + \pi$	$\phi = \arctan\left(\dfrac{v_{y0}}{v_{x0}}\right)$

[1] Lorsqu'on utilise la fonction arctan, il y a toujours deux solutions admissibles qui permettent de distinguer les 4 cadrans du cercle trigonométrique.

Preuve :

Évaluons la force magnétique $\vec{F}_{\mathrm{m}}$ appliquée par un champ magnétique constant $\vec{B} = B_z\ \vec{k}$ sur une particule chargée q de masse m se déplaçant dans le plan xy avec une vitesse $\vec{v}$:

$$\vec{F}_{\mathrm{m}} = q\ \vec{v} \times \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{\mathrm{m}} = q\ \left(v_x \vec{i} + v_y \vec{j}\right) \times \left(B_z \vec{k}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{\mathrm{m}} = q\ \left(v_x \vec{i} \times B_z \vec{k} + v_y \vec{j} \times B_z \vec{k}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{\mathrm{m}} = q\ \left(v_x B_z \left(\vec{i} \times \vec{k}\right) + v_y B_z \left(\vec{j} \times \vec{k}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{\mathrm{m}} = q\ \left(-v_x B_z \vec{j} + v_y B_z \vec{i}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{F}_{\mathrm{m}} = q v_y B_z \vec{i} - q v_x B_z \vec{j}}$$

Appliquons la 2[ième] loi de Newton à notre particule avec d'évaluer l'équation différentielle associée à l'équation du mouvement à évaluer :

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \left(q v_y B_z \vec{i} - q v_x B_z \vec{j}\right) = m\left(a_x \vec{i} + a_y \vec{j}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a_x = \frac{qB_z}{m} v_y} \quad \text{et} \quad \boxed{a_y = -\frac{qB_z}{m} v_x} \quad \text{d'où} \quad \boxed{v_x = -\frac{m}{qB_z} a_y}$$

Développons l'équation de l'accélération a_x et utilisons la définition de l'accélération pour y remplacer la vitesse v_x de l'équation précédente :

$$a_x = \frac{qB_z}{m} v_y \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{qB_z}{m} v_y \qquad \text{(Définition : } a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{m}{qB_z} a_y\right) = \frac{qB_z}{m} v_y \qquad \text{(Remplacer } v_x = -\frac{m}{qB_z} a_y\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{m}{qB_z} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(a_y\right) = \frac{qB_z}{m} v_y \qquad \text{(Factoriser constantes)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}a_y}{\mathrm{d}t} = -\frac{q^2 B_z^{\ 2}}{m^2} v_y \qquad \text{(Regrouper constantes)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}a_y}{\mathrm{d}t} = -\omega^2 v_y \qquad \text{(Remplacer } \omega^2 = \frac{q^2 B_z^{\ 2}}{m^2}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\right) = -\omega^2 v_y \qquad \text{(Définition : } a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2 v_y}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 v_y \qquad \text{(Dérivé seconde : } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}^2 v_y}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 v_y = 0} \qquad \text{(Oscillateur harmonique simple)}$$

À partir de la solution de l'oscillateur harmonique simple (voir NYC – Chapitre 1.1c), nous pouvons dédire que :

$$\frac{\mathrm{d}^2 v_y}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 v_y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{v_y = v_{y\max} \sin(\omega t + \phi_y)} \qquad \text{(Solution de l'OHS : MHS)}$$

Par analogie, on peut réaliser que :

$$v_x = v_{x\max} \sin(\omega t + \phi_x)$$

De plus, voici la forme des équations de l'accélération qui seront requises pour évaluer nos phase ϕ_x et ϕ_y :

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \qquad \Rightarrow \qquad a_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(v_{x\max} \sin(\omega t + \phi_x)\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{a_x = \omega v_{x\max} \cos(\omega t + \phi_x)}$$

$$\text{et} \qquad \boxed{a_y = \omega v_{y\max} \cos(\omega t + \phi_y)}$$

Pour satisfaire la condition initiale de vitesse étant un module v_0 projeté à l'aide d'un angle ϕ par rapport à l'axe *x*, nous avons

$$\vec{v}_0 = v_{x0}\vec{i} + v_{y0}\vec{j} = v_0 \cos(\phi)\vec{i} + v_0 \sin(\phi)\vec{j}$$

ce qui respecte également

$$\tan(\phi) = \frac{v_{y0}}{v_{x0}} \qquad \text{et} \qquad \phi = \arctan\left(\frac{v_{y0}}{v_{x0}}\right)$$

Cependant, il faut faire très attention, car le choix de l'arctan est très important. Il faut choisir l'arc de cercle menant au bon cadran dans le cercle trigonométrique :

1ier cadran ($v_{x0} > 0$ et $v_{y0} > 0$)	2ième cadran ($v_{x0} < 0$ et $v_{y0} > 0$)	3ième cadran ($v_{x0} < 0$ et $v_{y0} < 0$)	4ième cadran ($v_{x0} > 0$ et $v_{y0} < 0$)
$\phi = \arctan\left(\frac{v_{y0}}{v_{x0}}\right)$	$\phi = \arctan\left(\frac{v_{y0}}{v_{x0}}\right) + \pi$	$\phi = \arctan\left(\frac{v_{y0}}{v_{x0}}\right) + \pi$	$\phi = \arctan\left(\frac{v_{y0}}{v_{x0}}\right)$

De plus, il faut satisfaire les conditions initiales de l'accélération dictées par les deux relations initiales

$$a_x = \frac{qB_z}{m} v_y \qquad \text{et} \qquad a_y = -\frac{qB_z}{m} v_x$$

Évaluons la constante de phase ϕ_x avec les conditions à $t=0$:

$a_x = \dfrac{qB_z}{m} v_y \quad \Rightarrow \quad a_{x0} = \dfrac{qB_z}{m} v_{y0}$ (Évaluer à $t=0$)

$\Rightarrow \quad \omega v_{x\max} \cos(\phi_x) = \dfrac{qB_z}{m} v_0 \sin(\phi)$ (Remplacer a_{x0} et $v_{y0} = v_0 \sin(\phi)$)

$\Rightarrow \quad v_{x\max} \cos(\phi_x) = v_0 \sin(\phi)$ (Simplifier avec $\omega = qB_z / m$)

$\Rightarrow \quad \boxed{v_{x\max} = v_0}$

et $\quad \boxed{\phi_x = \dfrac{\pi}{2} - \phi}$

Évaluons la constante de phase ϕ_y avec les conditions à $t=0$:

$a_y = -\dfrac{qB_z}{m} v_x \quad \Rightarrow \quad a_{y0} = -\dfrac{qB_z}{m} v_{x0}$

$\Rightarrow \quad \omega v_{y\max} \cos(\phi_y) = -\dfrac{qB_z}{m} v \cos(\phi)$

$\Rightarrow \quad -v_{y\max} \cos(\phi_y) = v_0 \cos(\phi)$

$\Rightarrow \quad \boxed{v_{y\max} = v_0}$

et $\quad \boxed{\phi_y = \pi - \phi}$ $\quad$ ou $\quad \phi_y = \pi + \phi$

P.S. On va prendre $\phi_y = \pi - \phi$, car c'est la seule condition qui respecte en même temps la condition de vitesse initiale et accélération initiale.

Si l'on remplace la phase ϕ_x dans l'équation v_x, nous avons :

$v_x = v_{x\max} \sin(\omega_0 t + \phi_x) \Rightarrow \quad v_x = (v_0)\sin(\omega_0 t + (\pi/2 - \phi))$ (Remplacer $\phi_x = \pi/2 - \phi$)

$\Rightarrow \quad v_x = v_0 \sin(\pi/2 - (\phi - \omega_0 t))$ (Réécriture)

$\Rightarrow \quad v_x = v_0 \cos(\phi - \omega_0 t)$ ($\sin(\pi/2 - \theta) = \cos(\theta)$)

$\Rightarrow \quad v_x = v_0 \cos(-(\omega_0 t - \phi))$ (Factoriser négatif)

$\Rightarrow \quad \boxed{v_x = v_0 \cos(\omega_0 t - \phi)}$ ($\cos(-\theta) = \cos(\theta)$)

Si l'on remplace la phase ϕ_y dans l'équation v_y, nous avons :

$$v_y = v_{y\max}\sin(\omega_0 t + \phi_y) \Rightarrow \quad v_y = (v_0)\sin(\omega_0 t + (\pi - \phi)) \qquad \text{(Remplacer } \phi_y = \pi - \phi \text{)}$$

$$\Rightarrow \quad v_y = v_0 \sin(\pi + \omega_0 t - \phi) \qquad \text{(Réécriture)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_y = -v_0 \sin(\omega_0 t - \phi)} \qquad (\sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta))$$

<u>Remarque :</u>

Avec le choix $\phi_y = \pi - \phi$, nous avons à $t = 0$ une cohérence avec v_{y0} car :

$$v_y = -v_0 \sin(\omega_0 t - \phi) \Rightarrow \quad v_{y0} = -v_0 \sin(\omega_0(0) - \phi)$$

$$\Rightarrow \quad v_{y0} = -v_0 \sin(-\phi)$$

$$\Rightarrow \quad v_{y0} = v_0 \sin(\phi) \qquad (\sin(-\theta) = -\sin(\theta))$$

Appliquons une intégrale sur le temps des fonctions v_x et v_y et obtenons les équations de positions x et y :

$$x = \int v_x \mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad x = \int v_0 \cos(\omega_0 t - \phi)\mathrm{d}t \qquad \text{(Remplacer } v_x = v_0 \cos(\omega_0 t - \phi)\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega_0 t - \phi) + C_x} \qquad \left(\int \sin(au)\mathrm{d}u = -\frac{1}{a}\cos(au) + C \right)$$

$$y = \int v_y \mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad x = \int -v_0 \sin(\omega_0 t - \phi)\mathrm{d}t \qquad \text{(Remplacer } v_y = -v_0 \sin(\omega_0 t - \phi)\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y = \frac{v_0}{\omega}\cos(\omega_0 t - \phi) + C_y} \qquad \left(\int \sin(au)\mathrm{d}u = -\frac{1}{a}\cos(au) + C \right)$$

Remplaçons l'expression v / ω_0 par le rayon de la trajectoire circulaire effectué par la particule :

$$R = \frac{v_0}{\omega} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{v_0}{\left(\frac{qB_z}{m}\right)} \qquad \text{(Remplacer } \omega = \frac{qB_z}{m} \text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{R = \frac{mv_0}{qB_z}} \quad \blacksquare \ (1) \qquad \text{(Réécriture)}$$

Appliquons notre condition initiale de position x_0 à l'équation x :

$$x(t = 0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = R\sin(\omega_0(0) - \phi) + C_x$$

$$\Rightarrow \quad C_x = x_0 - R\sin(-\phi)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{C_x = x_0 + R\sin(\phi)}$$

Appliquons notre condition initiale de position y_0 à l'équation y :

$$y(t=0) = y_0 \qquad \Rightarrow \qquad y_0 = R\cos(\omega_0(0) - \phi) + C_y$$

$$\Rightarrow \qquad C_y = y_0 - R\cos(-\phi)$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{C_y = y_0 - R\cos(\phi)}$$

Nous pouvons ainsi obtenir l'équation de la position selon l'axe x et y :

$$x = R\sin(\omega_0 t - \phi) + C_x \qquad \Rightarrow \qquad x = x_0 + R(\sin(\omega_0 t - \phi) + \sin(\phi)) \qquad \blacksquare\ (2)$$

$$y = R\cos(\omega_0 t - \phi) + C_y \qquad \Rightarrow \qquad y = y_0 + R(\cos(\omega_0 t - \phi) - \cos(\phi)) \qquad \blacksquare\ (3)$$

Les équations du mouvement cycloïde dans un champ électrique et magnétique constant et perpendiculaire

En construction …

$$\vec{F}_{\text{em}} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \qquad \text{où} \qquad \vec{E} = E_y \vec{j} \qquad \vec{B} = B_z \vec{k}$$