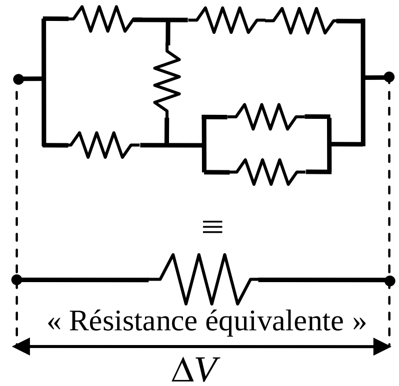
Chapitre 3.6 – La résistance équivalente

La résistance équivalente

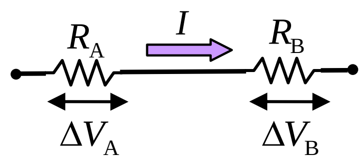
La résistance équivalente est la valeur d'une résistance unique qui produirait la même différence de potentiel qu'un groupe de résisteurs qu'il lui est associé parcouru par un même courant.



Dans un tel regroupement, on retrouve des résisteurs en **série**, en **parallèle** et **autres combinaisons**.

Résisteurs en série :

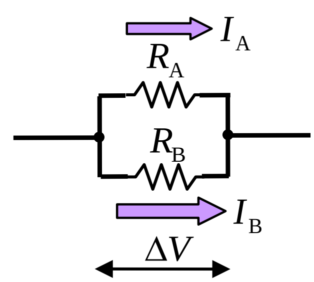
Résisteurs qui se retrouvent sur une **même branche**.



Des résisteurs en série sont parcourus par un **même courant** I, mais ne produisent pas la même différence de potentiel.

Résisteur en parallèle :

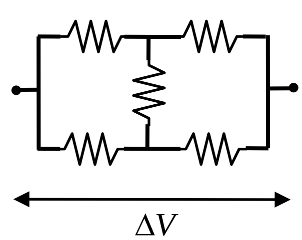
Résisteurs qui sont reliés par la **même paire de nœuds**.



Des résisteurs en parallèle produisent la **même différence de potentiel** ΔV, mais ne sont pas parcourus par le même courant.

Autre combinaison :

Résisteurs qui sont **ni en série**, **ni en parallèle**.



Ces résisteurs peuvent être parcourus par des courants différents et peuvent produire individuellement des variations de potentiel différentes.

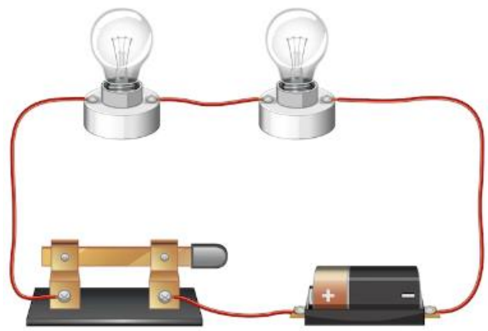
La résistance équivalente en série

La résistance équivalente $R_{\text{éq}}$ d'un ensemble de résisteurs ohmiques branchés en série est égale à la somme des résistances R des résisteurs en série :

$$R_{\text{éq}} = \sum_i R_i$$

où $R_{\text{éq}}$: Résistance équivalente en ohm (Ω)

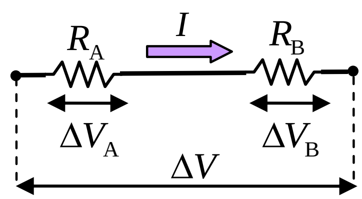
R_i : Résistance associée au résisteur d'étiquette i en ohm (Ω)



https://fr.freepik.com
Schéma de deux ampoules en série.

Preuve[1] :

À partir de la variation de potentiel ΔV rencontrée sur la branche d'un circuit contenant une résistance R_A et une résistance R_B en série parcouru par un courant I, évaluons une expression de résistance équivalente à l'aide de la loi d'Ohm. On suppose que la variation de potentiel des fils conducteurs est nulle :



$\Delta V = \Delta V_A + \Delta V_B \quad \Rightarrow \quad \Delta V = (R_A I_A) + (R_B I_B)$ (Loi d'Ohm : $\Delta V = RI$)

$\Rightarrow \quad \Delta V = R_A (I) + R_B (I)$ (Série : $I = I_A = I_B$)

$\Rightarrow \quad \Delta V = (R_A + R_B) I$ (Factoriser I)

$\Rightarrow \quad \Delta V = R_{\text{éq}} I \quad \blacksquare$ (Remplacer $R_{\text{éq}} = R_A + R_B$)

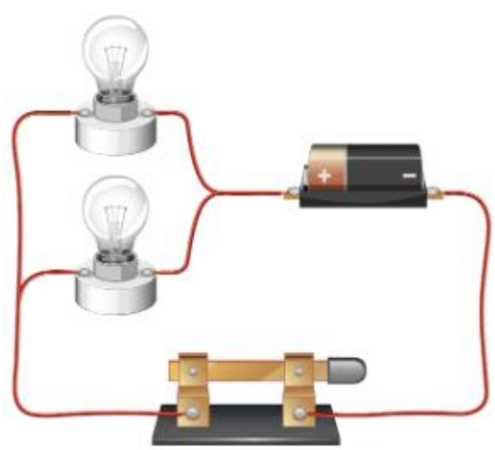
La résistance équivalente en parallèle

La résistance équivalente $R_{\text{éq}}$ d'un ensemble de résisteurs ohmiques branchés en parallèle est égale à l'inverse de l'addition des résistances R^{-1} des résisteurs en parallèle :

$$R_{\text{éq}} = \left[\sum_i \frac{1}{R_i} \right]^{-1}$$

où $R_{\text{éq}}$: Résistance équivalente en ohm (Ω)

R_i : Résistance associée au résisteur d'étiquette i en ohm (Ω)

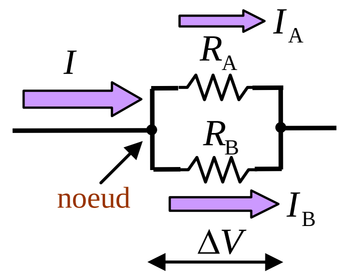


https://fr.freepik.com
Schéma de deux ampoules en parallèle.

[1] Cette preuve se généralise à N résisteurs en série.

Preuve[2] :

À partir de la loi des nœuds, évaluons la résistance équivalente d'une section d'un circuit contenant une résistance R_A et une résistance R_B en parallèle produisant une différence de potentiel ΔV à l'aide de la loi d'Ohm. On suppose que la variation de potentiel des fils conducteurs est nulle :



$$\sum_i I_i = 0 \quad \Rightarrow \quad I - I_A - I_B = 0 \qquad \text{(Remplacer } \sum_i I_i\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad I = I_A + I_B \qquad \text{(Isoler } I\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\Delta V}{R_{éq}}\right) = \left(\frac{\Delta V_A}{R_A}\right) + \left(\frac{\Delta V_B}{R_B}\right) \qquad \text{(Loi d'Ohm : } \Delta V = RI \text{ , } I = \Delta V / R\text{)}$$

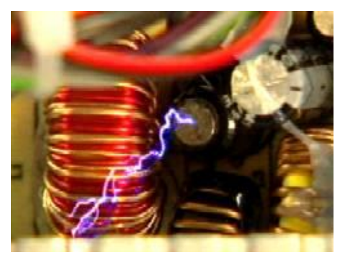
$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta V}{R_{éq}} = \frac{(\Delta V)}{R_A} + \frac{(\Delta V)}{R_B} \qquad \text{(Parallèle : } \Delta V = \Delta V_A = \Delta V_B\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{R_{éq}} = \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} \qquad \text{(Simplifier } \Delta V_B\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad R_{éq} = \left[\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B}\right]^{-1} \quad \blacksquare \qquad \text{(Inverser l'équation)}$$

Court-circuit

Un court-circuit est l'action de modifier un circuit (volontairement ou accidentellement) en reliant un point de potentiel élevé avec un point de potentiel faible par un résisteur de faible résistance.



Un court-circuit peut produire des arcs électriques en raison d'une grande différence de potentiel.

Un court-circuit modifie la résistance équivalente d'un circuit ce qui occasionne une augmentation du courant et une réorientation de ceux-ci.

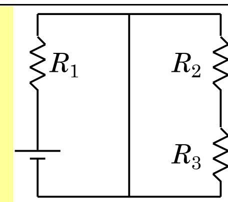
Scénarios possibles :

- Une section du circuit n'est plus alimentée par le courant et devient inutilisable.
- Une section du circuit est trop alimentée par le courant et peut surchauffer.

---

[2] Cette preuve se généralise à N résisteurs en parallèle.

Situation 3 : ***Une branche sans résistance*.** On désire déterminer la résistance équivalente du circuit représenté par le schéma ci-contre. La résistance de chacun des résisteurs est égale à 60 Ω.



Le circuit ci-contre possède un court-circuit, car aucun courant circulera dans la branche contenant le résisteur R_2 et R_3. Puisque cette branche est en parallèle avec une branche de résistance zéro, la résistance équivalente de ce groupe est égale à zéro ($R_{23} = 0$) :

$$R_{\text{éq}} = \left[\sum_i \frac{1}{R_i}\right]^{-1} \quad \Rightarrow \quad R_{23} = \left[\frac{1}{R_{\text{fil}}} + \frac{1}{R_2 + R_3}\right]^{-1}$$

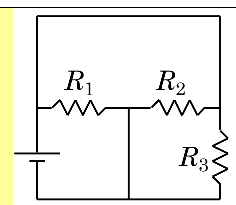
$$\Rightarrow \quad R_{23} = \left[\frac{1}{(0)} + \frac{1}{(60)+(60)}\right]^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{R_{23} = 0} \qquad \left(\text{car } \left(\frac{1}{0} + X\right)^{-1} = (\infty + X)^{-1} = 0\right)$$

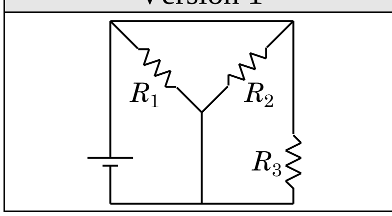
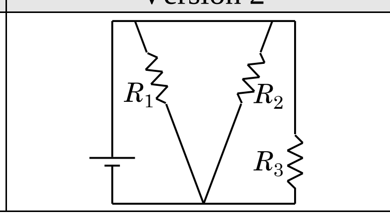
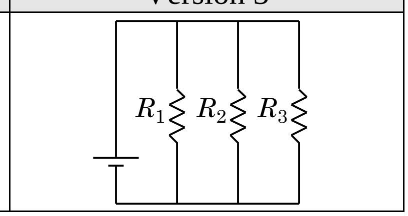
Ainsi, la résistance équivalente du circuit est égale à $\boxed{R_{\text{eq}} = R_1 = 60\ \Omega}$ puisque R_1 est en série avec le groupe R_{23}.

<u>Remarque :</u> Lorsqu'il y a un court-circuit, nous pouvons affirmer que l'ensemble du courant circulera dans la branche « vide » et qu'aucun courant ne circulera dans les autres branches en parallèle avec la branche « vide ».

Situation 4 : ***Une branche sans résistance, prise* 2.** On désire déterminer la résistance équivalente du circuit représenté par le schéma ci-contre. La résistance de chacun des résisteurs est égale à 60 Ω.



Le circuit ci-contre n'est pas un court-circuit, car tous les résisteurs sont en parallèle. Il est préférable de redessiner le circuit afin de ne pas juger une branche vide comme étant une source de court-circuit.

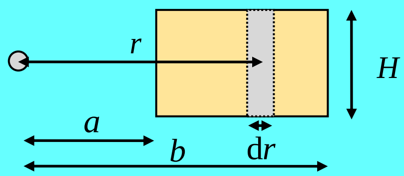
Version 1	Version 2	Version 3
		

$$R_{\text{éq}} = \left[\sum_i \frac{1}{R_i}\right]^{-1} \quad \Rightarrow \quad R_{\text{éq}} = \left[\frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \frac{1}{60}\right]^{-1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_{\text{éq}} = 20\ \Omega}$$

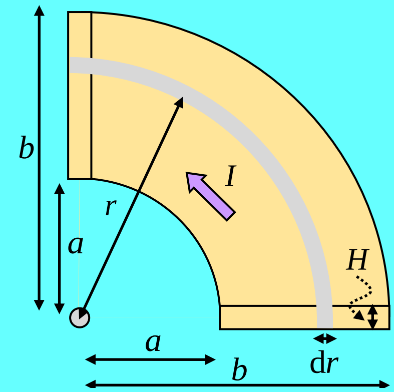
Situation A : ***Un pseudo-prisme rectangulaire en arc de cercle.***

Un câble de surface rectangulaire d'une hauteur H et de largeur $b - a$ est utilisé pour faire une jonction électrique sur un arc de cercle de 90° tel qu'illustré sur les schémas ci-contre.

En raison de la forme du câble, l'arc de cercle intérieur est plus court que l'arc extérieur du câble.



Vue de face



Vue de haut

Déterminer la résistance du câble si l'on fait circuler un courant sur la face rectangulaire du câble.

Nous allons considérer le pseudo-prisme rectangulaire comme étant composé de plein de fil électrique en forme d'arc de cercle de surface $\mathrm{d}A = H\,\mathrm{d}r$ et de longueur $\ell = 2\pi r/4$ dont leur regroupement pour former une résistance équivalente sera en parallèle.

À l'aide de l'expression de la résistivité infinitésimale de surface et le calcul de la résistance équivalente en parallèle, nous pouvons obtenir les deux expressions suivantes :

$$\mathrm{d}R = \frac{\rho\,\ell}{\mathrm{d}A} \qquad \text{et} \qquad R_{\text{parallèle}} = \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}\right]^{-1}$$

Nous pouvons maintenant exploiter le calcul intégral pour évaluer la résistance de notre câble :

$$R_{\text{eq}} = \left[\int \frac{1}{\mathrm{d}R}\right]^{-1} \quad \Rightarrow \quad R_{\text{eq}} = \left[\int \frac{1}{\left(\dfrac{\rho\,\ell}{\mathrm{dA}}\right)}\right]^{-1} \qquad \text{(Remplacer } \mathrm{d}R = \frac{\rho\,\ell}{\mathrm{d}A}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad R_{\text{eq}} = \left[\frac{1}{\rho}\int \frac{\mathrm{dA}}{\ell}\right]^{-1} \qquad \text{(Réorganisation de la fraction et factoriser)}$$

$$\Rightarrow \quad R_{\text{eq}} = \left[\frac{1}{\rho}\int \frac{(H\,\mathrm{d}r)}{(\pi r/2)}\right]^{-1} \qquad \text{(Remplacer } \mathrm{d}A = H\,\mathrm{d}r \text{ et } \ell = 2\pi r/4\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad R_{\text{eq}} = \left[\frac{2H}{\pi\rho}\int_{r=a}^{b} \frac{\mathrm{d}r}{r}\right]^{-1} \qquad \text{(Factorisation et fixer les bornes de l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad R_{\text{eq}} = \left[\frac{2H}{\pi\rho}\Big[\ \ln|r|\ \Big]_{r=a}^{r=b}\right]^{-1} \qquad \text{(Intégrale : } \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad R_{\text{eq}} = \left[\frac{2H}{\pi\rho}\left(\ln|b| - \ln|a|\right)\right]^{-1} \qquad \text{(Théorème du calcul : } \int_{x=a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)\text{)}$$

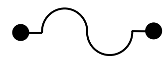
$$\Rightarrow \quad \boxed{R_{\text{eq}} = \frac{\pi\rho}{2H\ \ln|b/a|}} \qquad (\ln(a) - \ln(b) = \ln(a/b) \text{ et application inverse})$$

Fusible

Un fusible est un composant d'un circuit qui effectue un court-circuit sur une branche lorsque le courant qui circule sur la branche est trop élevé. Le fusible permet de protéger les composants les plus critiques d'une branche.

Plusieurs fusibles sont constitués d'un fil de plomb encapsulé dans une enveloppe de verre qui va fondre par effet Joule[3] lorsque le courant est trop élevé. Ceci coupe l'alimentation en courant de la branche.

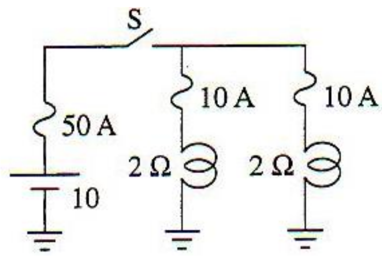
Symbole :



Fusible

Disjoncteur double 15 A

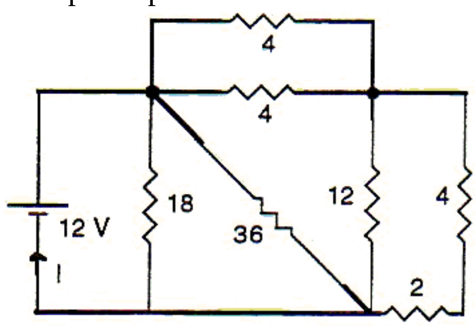
Exemple : Circuit simplifié des phares d'une voiture



Exercices

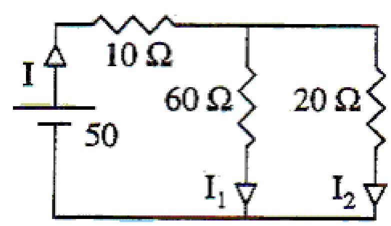
Référence : Note Science Santé – Chapitre 4 – Question 11j

Calculez la valeur du courant *I* débité par la pile dans le circuit ci-dessous.



Référence : Note Science Santé – Chapitre 4 – Question 9b

Dans le circuit ci-dessous, calculez les valeurs représentées par une lettre.



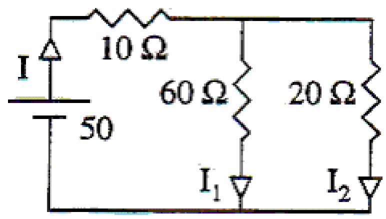
[3] Effet qui transforme de l'énergie potentielle électrique en énergie thermique dans un résisteur.

Solutions

Référence : Note Science Santé – Chapitre 4 – Question 11j

$R_{\text{éq}} = 4\ \Omega$ et $I_{\text{pile}} = 3\ \text{A}$

Référence : Note Science Santé – Chapitre 4 – Question 9b



Évaluer la résistance en parallèle :

$$\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i} = \frac{1}{60} + \frac{1}{20} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = 15\ \Omega}$$

Évaluer la résistance en série :

$$R = \sum_i R_i = (10) + (15) \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = 25\ \Omega}$$ résistance total du circuit

Évaluer le courant total du circuit :

$$\Delta V = R\ I \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{(50)}{(25)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = 2\ \text{A}}$$

Évaluer la d.d.p. aux bornes de la résistance de 10 Ω :

$$\Delta V = R\ I = (10)(2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta V = 20\ \text{V}}$$

Évaluer la d.d.p. aux bornes de la résistance de 60 Ω et 20 Ω :

$$\sum_i \Delta V_i = 0 \quad \Rightarrow \quad 50 - 20 + x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = -30\ \text{V}}$$

Évaluer nos courants I_1 et I_2 :

$$\Delta V = R\ I \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\Delta V}{R}$$

$$\Rightarrow \quad I_1 = \frac{30}{60} \qquad \boxed{I_1 = 0{,}5\ \text{A}}$$

$$I_2 = \frac{30}{20} \qquad \boxed{I_2 = 1{,}5\ \text{A}}$$

Et nous avons $I_1 + I_2 = I$ ce qui respect la $1^{\text{ière}}$ loi de Kirchhoff.