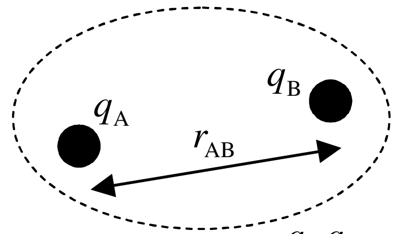
Chapitre 2.8SP – L'énergie potentielle électrique de système et les condensateurs

Le problème de l'énergie potentielle électrique d'une charge ponctuelle

Nous avons déterminé que l'énergie potentielle électrique entre deux charges ponctuelles **A** et **B** correspond à l'expression

$$U_{\mathrm{eAB}} = q_{\mathrm{A}} V_{\mathrm{B}} = q_{\mathrm{B}} V_{\mathrm{A}} = k \frac{q_{\mathrm{A}} q_{\mathrm{B}}}{r_{\mathrm{AB}}} \quad .$$

Cependant, cette relation ne tient pas compte de l'énergie qui a été nécessaire pour « regrouper » l'ensemble des charges q_{A} et q_{B} dans une « zone ponctuelle ». Dans les faits, il est impossible d'avoir une charge ponctuelle autre qu'une charge élémentaire $e = 1{,}6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$.



$$U_{\mathrm{eAB}} = k \frac{q_{\mathrm{A}} q_{\mathrm{B}}}{r_{\mathrm{AB}}}$$

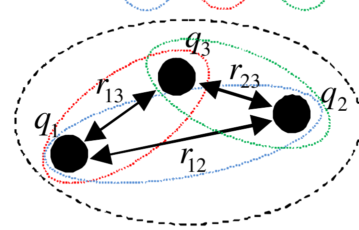
Énergie potentielle électrique associée à deux charges ponctuelles **A** et **B**.

Une situation peut être approximée en « charge ponctuelle », mais il sera impossible d'évaluer l'énergie requise pour regrouper ces charges en charge ponctuelle. Lors d'un mouvement de ces charges, celles-ci devront rester regrouper, sans déplacement relatif, sur la même structure pour ne pas faire varier l'énergie potentielle électrique de la structure, car n'était pas évaluée, nous ne pourrons pas comptabiliser la variation de cette source d'énergie potentielle électrique.

L'énergie potentielle électrique d'une distribution de charges ponctuelles

Pour évaluer l'énergie potentielle électrique U_{e} d'une distribution de charges ponctuelles, il suffit d'additionner l'ensemble des termes d'énergie potentielle $U_{\mathrm{e}i\,j}$ qu'il existe entre deux charges ponctuelles i et j sans faire de répétition. On peut également évaluer le potentiel électrique V_i pour faire la somme des énergies $U_{\mathrm{e}i} = q_i V_i$, mais il faudra diviser ce résultat par 2 pour obtenir une énergie U_{e} adéquate.

$$U_{\mathrm{e}} = U_{12} + U_{13} + U_{23}$$



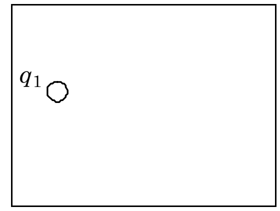
L'énergie potentielle électrique d'un système de trois particules ponctuelle nécessite la sommation de 3 termes d'énergie potentielle.

<table>
<tr><th colspan="2">Équation avec sommation des termes d'énergie potentielle électrique $U_{\mathrm{e}i\,j}$</th><th rowspan="2">Équation avec somme des termes d'énergie potentielle électrique $U_{\mathrm{e}i} = q_i V_i$</th></tr>
<tr><th>Sommation discrète</th><th>Sommation continue</th></tr>
<tr><td>$U_{\mathrm{e}} = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} U_{\mathrm{e}i\,j}$
avec $U_{\mathrm{e}i\,j} = k \frac{q_i q_j}{r_{i\,j}}$</td><td>$U_{\mathrm{e}} = \int V(q)\,\mathrm{d}q$</td><td>$U_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i V_i$ avec $V_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} V_{ji} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} k \frac{q_j}{r_{j\,i}}$
(contribution au potentiel électrique de l'ensemble des particules j sur la particule i)</td></tr>
</table>

Preuve :

L'énergie potentielle électrique d'un système à N particules consiste à assembler un système à partir d'un groupe de N particules tous initialement situées à l'infini tel que le système possède une énergie initiale nulle en raison du terme

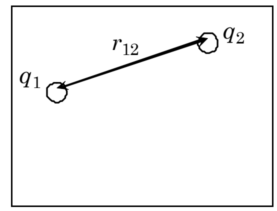
$$U_{eij} = k\frac{q_i q_j}{r_{ij}} = 0 \qquad \text{si} \qquad r_{ij} = \infty \ .$$



Système à 1 particule.

Pour construire un système à 1 particule, il n'y a pas d'énergie, car la charge à déplacer se déplace dans un champ électrique nulle. Ainsi

$$U_e^{(1)} = 0 \ .$$



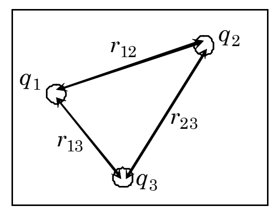
Système à 2 particules.

Pour construire un système à 2 particules, il faut déplacer la particule 2 dans le champ électrique de la particule 1 ce qui occasionnera un travail résultat au terme d'énergie potentielle électrique

$$U_{e12} = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

et ce qui donnera l'énergie de système

$$U_e^{(2)} = U_{e12}$$



Système à 3 particules.

Pour construire un système à 3 particules, il faut construire le système d'énergie $U_e^{(2)}$ et déplacer la particule 3 dans le champ électrique superposé des particules 1 et 2 ce qui occasionnera un terme d'énergie potentielle électrique supplémentaire

$$U_{e13} + U_{e23} = k\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + k\frac{q_2 q_3}{r_{23}}$$

et ce qui donnera l'énergie de système

$$U_e^{(3)} = U_e^{(2)} + U_{e13} + U_{e23} = U_{e12} + U_{e13} + U_{e23} \ .$$

Pour construire un système à N particules, il faut construire le système d'énergie $U_e^{(N-1)}$ et déplacer la particule N dans le champ électrique superposé des particules 1, 2, …, N-1 ce qui occasionnera un un terme d'énergie potentielle électrique supplémentaire

$$U_{e1N} + U_{e2N} + \ldots + U_{eN\text{-}1N} = k\frac{q_1 q_N}{r_{1N}} + k\frac{q_2 q_N}{r_{2N}} + \ldots + k\frac{q_{N-1} q_N}{r_{N-1N}}$$

correspondant à

$$\sum_{i=1}^{N-1} U_{eiN} = k\frac{q_i q_N}{r_{iN}} \ .$$

L'énergie du système à N particules sera ainsi égale à l'expression suivante :

$$U_e^{(N)} = U_e^{(N-1)} + \sum_{i=1}^{N-1} U_{eiN} \quad \Rightarrow \quad U_e^{(N)} = \left(U_e^{(N-2)} + \sum_{i=1}^{N-2} U_{eiN-1} \right) + \sum_{i=1}^{N-1} U_{eiN}$$

$$\Rightarrow \quad U_e^{(N)} = \sum_{i=1}^{1} U_{ei2} \ldots + \sum_{i=1}^{2} U_{ei3} + \sum_{i=1}^{3} U_{ei4} + \ldots + \sum_{i=1}^{N-3} U_{eiN-2} + \sum_{i=1}^{N-2} U_{eiN-1} + \sum_{i=1}^{N-1} U_{eiN}$$

$$\Rightarrow \quad U_e = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} U_{eij} \qquad \blacksquare \tag{1}$$

À partir de l'équation de l'énergie d'un système de N particules, retirons les contraintes sur les sommations ce qui reviendrait à dire que l'on a effectué 2 fois le calcul des énergies potentielles électriques

$$U_{eij} = k\frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad \text{et} \quad U_{eji} = k\frac{q_j q_i}{r_{ji}} \ .$$

Ainsi, nous avons l'expression suivante en exploitant la définition du potentiel électrique :

$$U_{\mathrm{e}} = \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} U_{eij} \quad \Rightarrow \quad 2U_{\mathrm{e}} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} U_{eij}$$

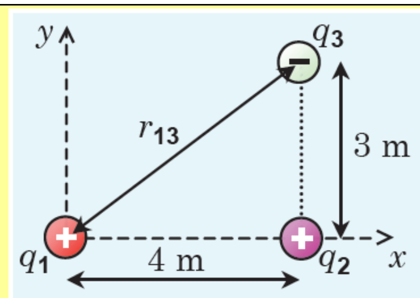
$$\Rightarrow \quad 2U_{\mathrm{e}} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} k\frac{q_i q_j}{r_{ij}} \qquad \text{(Remplacer } U_{eij} = k\frac{q_i q_j}{r_{ij}}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad 2U_{\mathrm{e}} = \sum_{i=1}^{N} q_i \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} k\frac{q_j}{r_{ij}} \qquad \text{(Factoriser de la sommation en } j \text{ le terme } q_i\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad 2U_{\mathrm{e}} = \sum_{i=1}^{N} q_i V_i \qquad \text{(Potentiel en } i : V_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} k\frac{q_j}{r_{ij}}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad U_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V_i \qquad \blacksquare \ (2) \qquad \text{(Isoler } U_{\mathrm{e}}\text{)}$$

Situation 1 (Chapitre 2.1): ***L'énergie potentielle électrique d'un système de trois particules*****.** Dans le plan *xy*, on fixe une particule 1 de charge 1 μC à l'origine, une particule 2 de charge 2 μC en (x = 4 m, y = 0) et une particule 3 de charge -3 μC en (x = 4 m, y = 3 m). On désire déterminer l'énergie potentielle électrique du système des trois particules.



Physique XXI - Tome B - p. 143 - © ERPI

À partir de notre schéma, nous obtenons les trois distances suivantes entre nos particules :

$$r_{12} = 4 \text{ m} \qquad r_{13} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ m} \qquad r_{23} = 3 \text{ m}$$

Évaluons les termes d'énergie associés à chaque paire de charges :

- $U_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}} \Rightarrow U_{12} = (9\times10^9)\frac{(1\times10^{-6})(2\times10^{-6})}{(4)} \Rightarrow \boxed{U_{12} = 0{,}0045 \text{ J}}$
- $U_{13} = k\frac{q_1 q_3}{r_{13}} \Rightarrow U_{13} = (9\times10^9)\frac{(1\times10^{-6})(-3\times10^{-6})}{(5)} \Rightarrow \boxed{U_{13} = -0{,}0054 \text{ J}}$
- $U_{23} = k\frac{q_2 q_3}{r_{23}} \Rightarrow U_{23} = (9\times10^9)\frac{(2\times10^{-6})(-3\times10^{-6})}{(3)} \Rightarrow \boxed{U_{23} = -0{,}018 \text{ J}}$

Évaluons l'énergie électrique totale du système :

$$U_e = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} U_{e\,ij} \quad \Rightarrow \quad U_e = U_{12} + U_{13} + U_{23}$$

$$\Rightarrow \quad U_e = (0{,}0045) + (-0{,}0054) + (-0{,}018)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{U_e = -0{,}0189 \text{ J}}$$

Remarque :

Cette **énergie négative** signifie que nous avons un **système lié** (système en attraction) et qu'il faudrait fournir de l'énergie au système pour « séparer » les charges pour les amener chacune à l'infini.

Situation A : ***L'énergie d'une sphère chargée.*** Une sphère conductrice de 20 cm de rayon initialement neutre se fait charger à -4 μC à l'aide de charges négatives provenant d'une mise à la terre (considéré comme venant de très loin). On désire évaluer l'énergie potentielle électrique totale associée au chargement de la sphère.

Évaluons l'énergie potentielle électrique totale U_e de la sphère conductrice par un processus d'ajout de charges ($U_e = \int dqV$) sachant que le potentiel électrique que la sphère génère à sa surface (site où seront situées les charges) est

$$V = \frac{kq}{r}$$

et que le potentiel électrique V augmentera au fur et à mesure que la charge augmentera sur celle-ci :

$$U_e = \int V \mathrm{d}q \quad \Rightarrow \quad U_e = \int \left(\frac{kq}{r}\right) \mathrm{d}q \qquad \text{(Potentiel : } V = \frac{kq}{r}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad U_e = \frac{k}{r} \int q \, \mathrm{d}q \qquad \text{(Factoriser constantes)}$$

$$\Rightarrow \quad U_e = \frac{k}{r} \left[\frac{q^2}{2}\right]_0^Q \qquad \text{(Résoudre l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad U_e = \frac{k}{r} \left(\frac{(Q)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2}\right) \qquad \text{(Évaluer l'intégrale)}$$

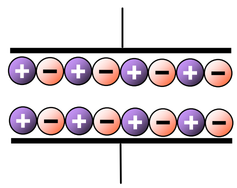
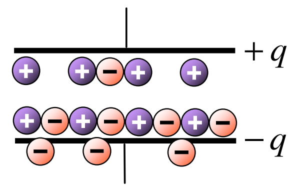
$$\Rightarrow \quad \boxed{U_e = \frac{kQ^2}{2r}} \qquad \text{(Solution générale)}$$

$$\Rightarrow \quad U_e = \frac{(9\times10^9)(-4\times10^{-6})^2}{2(0{,}20)} \qquad \text{(Remplacer valeurs num.)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{U_e = 0{,}36 \text{ J}} \qquad \text{(Calcul)}$$

Le condensateur

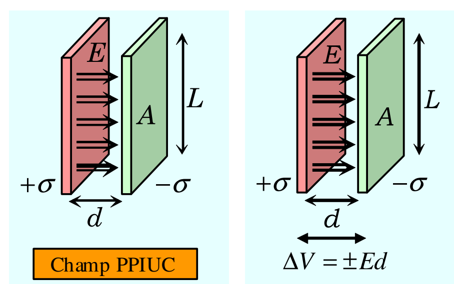
Le condensateur est une structure conductrice constituée de deux armatures séparées par un isolant. Un condensateur est dit « chargé » lorsqu'il y a une charge électrique $+q$ sur une armature et une charge $-q$ sur l'autre armature. Par conséquent, un condensateur possède toujours une charge nulle, car il accumule une séparation de ses « propres charges électriques[1] ».

Condensateur non chargé	Condensateur chargé
	

De plus, l'ensemble des **charges accumulées** sur l'une ou l'autre des plaques sont toujours au **même potentiel**, car elles sont situées sur un conducteur. Augmenter la charge augmentera alors le potentiel et cette tâche sera toujours de plus en plus couteux énergiquement.

Champ électrique et différence de potentiel d'un condensateur plan

Un condensateur plan est constitué de deux plaques de surface A séparées par une distance d. Lorsque le condensateur est chargé, la densité de charges surfacique σ des plaques augmente en raison d'une séparation de charge q entre les deux plaques ce qui a pour conséquence de produire un champ électrique $\vec{E}$. L'approximation de la PPIUC[2] est valide si la taille L de la plaque est très supérieure à la distance d.



La production du champ électrique $\vec{E}$ implique obligatoirement la production d'une différence de potentiel électrique entre les deux plaques. Elle peut être évaluée grâce à l'expression suivante :

$$\Delta V = -\vec{E} \cdot \vec{s} \quad \Rightarrow \quad \Delta V = \pm Ed$$

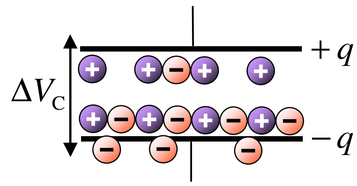
[1] La plaque positive qui donne un électron à son environnement engendre automatiquement et simultanément une acquisition par la plaque négative d'un électron. Ainsi, ce n'est pas réellement le même électron qui est échangé d'une plaque à l'autre.

[2] PPIUC est l'acronyme pour **p**laque **p**lane **i**nfinie **u**niformément **c**hargée.

La capacité

La capacité d'un condensateur idéal est la quantité de charges électriques qui peut être séparée dans un condensateur avant que la différence de potentiel aux bornes du condensateur augmente de un volt. Autrement dit, la capacité C est le rapport entre la charge q d'un condensateur et la différence de potentiel ΔV_C que l'on mesure aux bornes des deux armatures :

$$C = \frac{q}{\Delta V_C}$$



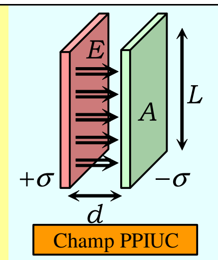
où C : Capacité en farads (F)

q : Charges électriques séparées dans le condensateur en coulomb (C)

ΔV_C : Différence de potentiel aux bornes du condensateur en volt (V)

Unité (farad) : $$\mathrm{F} = [C] = \frac{[q]}{[\Delta V]} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{J/C}} = \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{J}} = \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}} = \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{kg\,m/s^2 m}} = \frac{\mathrm{C}^2\,\mathrm{s}^2}{\mathrm{kg\,m}^2}$$

Situation 1 : *La capacité d'un gros condensateur plan*. On considère le montage constitué de deux planques situées à 15 cm l'une de l'autre portant des densités de charge surfacique de $\pm 2{,}5\times10^{-9}\,\mathrm{C/m^2}$. On suppose que chaque plaque est un carré qui mesure 3 m de côté. On désire déterminer (a) la charge du condensateur ainsi formé ; (b) la différence de potentiel entre les plaques et (c) la capacité du condensateur.



Évaluons la surface de la plaque carrée de taille L :

$$A = L^2 \quad \Rightarrow \quad A = (3)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = 9\ \mathrm{m}^2}$$

Évaluons la charge sur les plaques :

$$q = \sigma A \quad \Rightarrow \quad q = (\pm 2{,}5\times10^{-9})(9) \quad \Rightarrow \quad \boxed{q = \pm 2{,}25\times10^{-8}\,\mathrm{C}} \qquad \textbf{(a)}$$

Évaluons le champ électrique généré entre les deux plaques :

$$E = 2E_{\text{plaque}} \quad \Rightarrow \quad E = 2\left(\frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}\right) \qquad \left(\text{Champ plaque : } E = \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}\right)$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{|(2{,}5\times10^{-9})|}{(8{,}85\times10^{-12})} \qquad \text{(Remplacer valeurs numériques)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E = 282{,}5\ \mathrm{N/C}} \qquad \text{(Évaluer } E\text{)}$$

Évaluons la différence de potentiel ΔV entre les deux plaques :

$\Delta V = -\vec{E}\cdot\vec{s} \quad \Rightarrow \quad \Delta V = \pm E_{//} s$ (Évaluer le produit scalaire)

$\Rightarrow \quad \Delta V = \pm(E)(d)$ (Remplacer $E_{//} = E$ et $s = d$)

$\Rightarrow \quad \Delta V = \pm(282{,}5)(0{,}15)$ (Remplacer valeurs numériques)

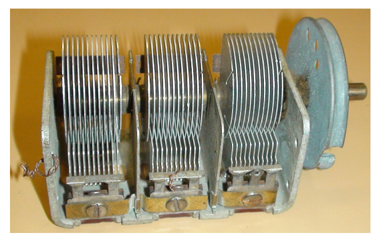
$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta V = \pm 42{,}37\ \text{V}}$ **(b)**

Évaluons la capacité du condensateur :

$$C = \frac{q}{\Delta V_{\text{C}}} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{(2{,}25\times10^{-8})}{(42{,}37)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = 5{,}31\times10^{-10}\,\text{F}}$$ **(c)**

La capacité d'un condensateur plan

Puisque la capacité d'un condensateur est une propriété géométrique du condensateur, nous pouvons ainsi déterminer la capacité C_{vide} d'un condensateur plan de surface A dont les plaques sont séparées par une distance d à l'aide d'un vide grâce à l'expression suivante :



Condensateur plan variable

$$C_{\text{vide}} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

où C_{vide} : Capacité du condensateur plan (avec vide) en farad (F).

A : Surface des deux plaques en mètre carré (m^2).

d : Distance séparant les deux plaques en mètre (m).

ε_0 : La constante électrique (*permittivité du vide*), $\varepsilon_0 = 8{,}85\times10^{-12}\,\text{C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}$.

Preuve :

Considérons un condensateur plan de surface A dont les plaques sont séparées par une distance d et chargées avec une densité de charge surfacique σ. Évaluons la capacité C du condensateur à partir de la définition de la capacité :

$C = \frac{q}{\Delta V} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{(|\sigma| A)}{(E\,d)}$ (Remplacer $q = \sigma A$ et $\Delta V = E\,d$)

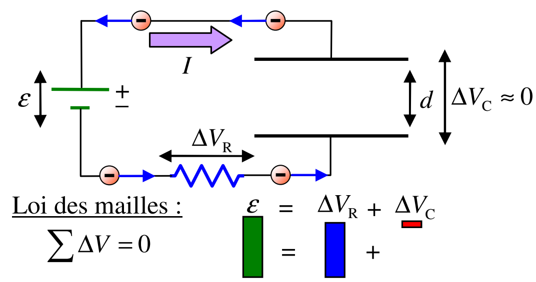
$\Rightarrow \quad C = \frac{|\sigma| A}{\left(2\frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}\right)d}$ (Remplacer $E = 2E_{plaque} = 2\frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}$)

$\Rightarrow \quad C_{\text{vide}} = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \quad \blacksquare$ (Simplification)

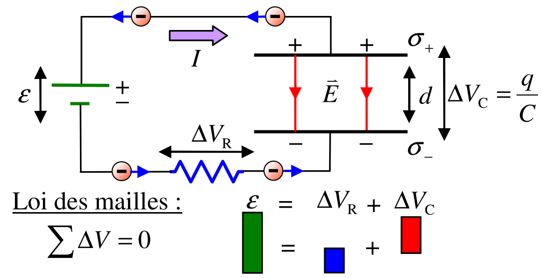
Chargement d'un condensateur à l'aide d'une pile

Lorsqu'un condensateur est branché à une pile d'électromotance[3] ε, celui-ci se fait chargé sous l'action de la pile. Initialement, la charge du condensateur est faible et la différence de potentiel ΔV_C requise pour séparer les charges sur les deux armatures est petite.

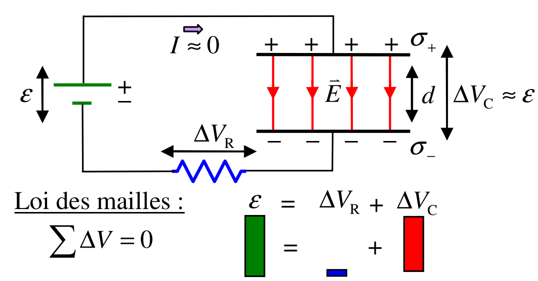
Le rôle de la pile est de fournir la différence de potentiel ΔV_C requise pour séparer les charges aux bornes du condensateur. L'électromotance restante fournie par la pile est alors dépensée[4] pour faire circuler les charges dans le circuit. Cette différence de potentiel est causée par la résistance à l'établissement du courant dans le circuit que l'on définira comme étant ΔV_R[5].



Plus le temps s'écoule, plus le condensateur se charge et plus il en est couteux en différence de potentiel ΔV_C pour séparer les charges. Ceci provoque un ralentissement du chargement du condensateur, car il y a moins de différence de potentiel accordé à ΔV_R et donc moins de courant I.



Lorsque la différence de potentiel aux bornes du condensateur ΔV_C atteint ε, la pile n'est plus en mesure de charger davantage le condensateur et celui-ci atteint sa charge maximale. Le courant I est alors nul. L'électromotance de la pile est alors dépensée pour maintenir les charges séparées dans le condensateur.



En résumer, le **travail infinitésimal** qu'effectue la **pile** pour séparer les charges $\mathrm{d}q$ est dépensé pour **charger le condensateur** et pour faire **circuler le courant.** La distribution de l'énergie fournie par la pile varie tout au long du chargement :

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}W_R + \mathrm{d}W_C \quad \Rightarrow \quad \varepsilon\,\mathrm{d}q = \Delta V_R\,\mathrm{d}q + \Delta V_C\,\mathrm{d}q \quad \text{où} \quad \Delta V_C = q/C$$

[3] L'électromotance d'une pile est la différence de potentiel que produit une pile lorsqu'elle est branchée dans un circuit fermé. La réaction chimique produit une séparation de charges aux bornes de la pile ce qui a pour effet de séparer les charges sur les armatures du condensateur.

[4] Selon la loi des mailles de Kirchhoff, la somme des différences de potentiel rencontrée dans un circuit électrique sur un parcours fermé est toujours égale à zéro.

[5] Lorsque la résistance équivalente du circuit est ohmique, la relation entre la résistance R du circuit et le courant I est établie par la loi d'ohm : $\Delta V = R\,I$.

L'énergie potentielle électrique emmagasinée dans un condensateur

L'énergie potentielle électrique U_e emmagasinée dans un condensateur correspond à la somme des énergies potentielles résultantes d'une séparation de charges q qui dépend de la capacité C du condensateur et de la différence de potentiel ΔV_C mesurée aux bornes du condensateur :

$$U_e = \frac{1}{2} C \, \Delta V_C^{\,2} \qquad U_e = \frac{1}{2} q \, \Delta V_C \qquad U_e = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

où U_e : Énergie potentielle électrique emmagasinée dans le condensateur (J)
C : Capacité du condensateur (F)
q : Charge électrique accumulée par le condensateur (C) ($q = C\Delta V$)
ΔV : Différence de potentiel aux bornes du condensateur (V)

Preuve :

Évaluons le travail W_C qu'effectue la pile uniquement pour séparer q charges d'une armature à une autre dans un condensateur de capacité *C*. Cette énergie sera égale à l'énergie potentielle électrique U_e emmagasinée dans le condensateur :

$W_C = \int dW_C \quad \Rightarrow \quad W_C = \int \Delta V_C \, dq$ (Travail infinitésimal : $dW_C = dq \, \Delta V_C$)

$\Rightarrow \quad W_C = \int \left(\frac{q}{C}\right) dq$ (Remplacer $C = q / \Delta V_C \Rightarrow \Delta V_C = q / C$)

$\Rightarrow \quad W_C = \frac{1}{C}\int q \, dq$ (Factoriser les constantes)

$\Rightarrow \quad W_C = \frac{1}{C}\int_{q=0}^{q} q \, dq$ (Bornes : $q = 0 \to q$)

$\Rightarrow \quad W_C = \frac{1}{C}\left[\frac{q^2}{2}\right]_0^q$ (Résoudre l'intégrale : $\int x \, dx = \frac{x^2}{2} + C$)

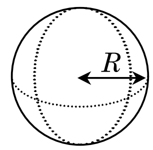
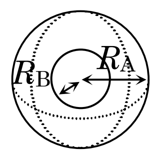
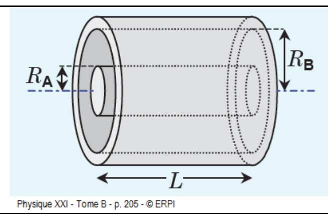
$\Rightarrow \quad W_C = \frac{q^2}{2C}$ (Évaluer les bornes de l'intégrale)

$\Rightarrow \quad W_C = \frac{C}{C}\frac{q^2}{2C}$ (Multiplier par 1)

$\Rightarrow \quad U_e = \frac{1}{2} C \, \Delta V_C^{\,2} \quad \blacksquare$ (Remplacer $\Delta V_C = q / C$ et $W_C = U_e$)

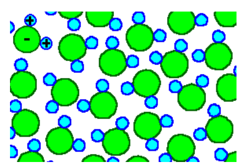
La capacité de différent condensateur

Voici la capacité de différent type de condensateur :

Géométrie	Schéma	Capacité
Sphère conductrice		$C = \dfrac{R}{k}$
Coquille conductrice (rayon externe R_A et rayon interne R_B)		$C = \dfrac{R_A R_B}{k(R_B - R_A)}$
Câble coaxial (rayon interne R_A et rayon externe R_B)		$C = \dfrac{L}{2k \ln(R_B / R_A)}$

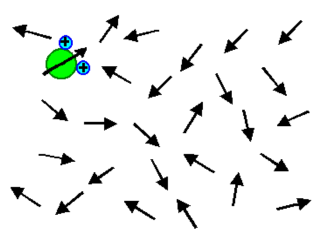
Diélectrique

Un matériau diélectrique est un isolant électrique contenant des structures polaires[6].



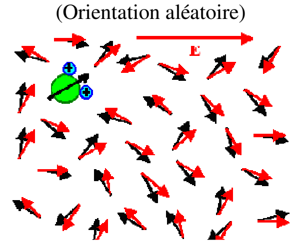
(Eau)

Lorsque ce matériau est plongé dans un champ électrique externe $\vec{E}_{ext} = 0$, toutes les structures polaires sont alignées dans des directions aléatoires produisant un champ électrique interne $\vec{E}_{int}$ total égale à zéro (ils s'annulent par principe de superposition).



(Orientation aléatoire)

Lorsque ce matériau est plongé dans un champ électrique externe $\vec{E}_{ext} \neq 0$, les structures polaires s'alignent afin de produire globalement un champ électrique interne $\vec{E}_{int}$ dans la direction opposée au champ externe $\vec{E}_{ext}$. La superposition du champ $\vec{E}_{ext}$ et $\vec{E}_{int}$ produit une atténuation partielle[7] du champ externe $\vec{E}_{ext}$.



(Orientation alignée)

[6] Une structure polaire est un regroupement de charge totale égale à zéro dont leur positionnement produit un champ électrique non nul près de la structure.
[7] On peut comparer un diélectrique comme étant un « conducteur partiel ». Un conducteur possède toujours à l'équilibre un champ électrique interne nul et c'est seulement atténué chez le diélectrique.

L’atténuation du champ électrique est proportionnelle à la constante diélectrique K du matériau :

$$E = \frac{E_{\text{ext}}}{K}$$

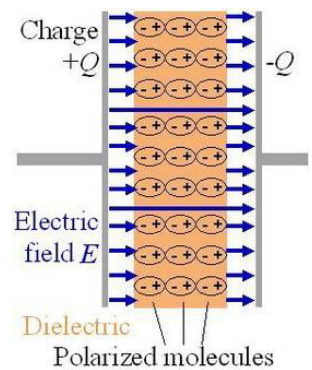
où E : Module du champ électrique totale à l’intérieur du diélectrique (N/C)
E_{ext} : Module du champ électrique externe au diélectrique (N/C)
K : Constante diélectrique du matériau

Voici quelques constantes diélectriques :

Vide	Air	Mica	Diamant	Eau à 20°C
1	1,000 54	8	16,5	80

Condensateur et diélectrique isolant

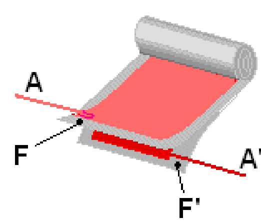
Lorsqu’on dépose un diélectrique isolant à l’intérieur d’un condensateur, la réaction du diélectrique à la présence du champ électrique externe généré par les armatures du condensateur réduit le champ électrique à l’intérieur du condensateur. Ceci permet d’augmenter la capacité du condensateur C par un facteur égale la constante diélectrique K tout en maintenant une isolation électrique entre les deux plaques :



$$C = K\, C_{\text{vide}}$$

où C : Capacité du condensateur avec diélectrique (F)
K : Constante diélectrique du matériau à l’intérieur du condensateur
C_{vide} : Capacité du condensateur avec vide (F)

- Le diélectrique permet de maintenir séparé les deux plaques qui s’attirent en ne permettant pas de transfert de charge, car celui-ci est un isolant à la circulation des charges.
- Un diélectrique n’augmente pas la puissance d’un condensateur (il n’augmente pas ΔV). Il permet d’emmagasiner plus de charges et donc plus d’énergie ($U_{\text{e}} = q\Delta V$).



(Condensateur cylindrique avec feuille diélectrique isolante)

- Un diélectrique augmente la capacité du condensateur au détriment de sa stabilité, car le vide sera toujours le meilleur isolant. Un condensateur avec diélectrique est dont plus susceptible de « claquer » ce qui entraine une circulation de charges entre les deux plaques et un déchargement imprévu. La différence de potentiel électrique maximale que l’on peut avoir aux bornes d’un tel condensateur est alors limitée. Ainsi, la tension de service est égale à 80 % de la valeur maximale théorique.

Preuve :

À partir de la définition de la capacité d'un condensateur, introduisons un diélectrique à l'intérieur condensateur afin d'évaluer la nouvelle capacité :

$$C = \frac{q}{\Delta V} \quad \Rightarrow \quad \Delta V = \frac{q}{C} \qquad \text{(Isoler } \Delta V \text{)}$$

$$\Rightarrow \quad -\int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \frac{q}{C} \qquad (\Delta V = -\int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s}\,)$$

$$\Rightarrow \quad -\int \frac{\vec{E}_{\text{ext}}}{K} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \frac{q}{C} \qquad \text{(Remplacer } \vec{E} = \vec{E}_{\text{ext}} / K \text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{K}\left(-\int \vec{E}_{\text{ext}} \cdot \mathrm{d}\vec{s}\right) = \frac{q}{C} \qquad \text{(Factorise } 1/K \text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{K} \Delta V_{\text{vide}} = \frac{q}{C} \qquad \text{(Remplacer } \Delta V_{\text{vide}} = -\int \vec{E}_{\text{ext}} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \text{)}$$

$$\Rightarrow \quad C = K \frac{q}{\Delta V_{\text{vide}}} \qquad \text{(Isoler } C\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad C = K\, C_{\text{vide}} \quad \blacksquare \qquad \text{(Capacité : } C = \frac{q}{\Delta V} \text{)}$$