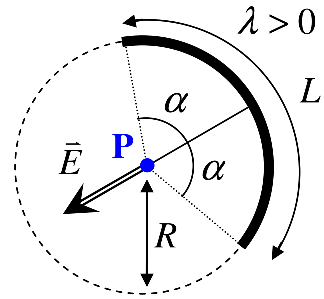
Chapitre 1.8c – Le champ électrique d'une tige par intégration : tige arquée

Champ électrique au centre d'une tige en arc de cercle

Le module du champ électrique E généré par une tige en forme d'arc de cercle uniformément chargée de longueur L au centre de courbure **P** dépend du rayon R de l'arc de cercle, de la densité de charge λ et de la moitié de la taille angulaire α de l'arc de cercle :



$$E = \frac{2k|\lambda|}{R}\sin(\alpha)$$

où E : Module du champ électrique au point **P** au centre de l'arc de cercle (N/C)

λ : Densité linéaire de charge (C/m) ($\lambda = Q/L$)

R : Rayon de l'arc de cercle la tige (m)

k : Constante de Coulomb, $9\times10^{9}\ \mathrm{Nm^2/C^2}$

α : Moitié de l'angle d'ouverture de l'arc de cercle ($L = R(2\alpha)$)

<u>Preuve :</u>

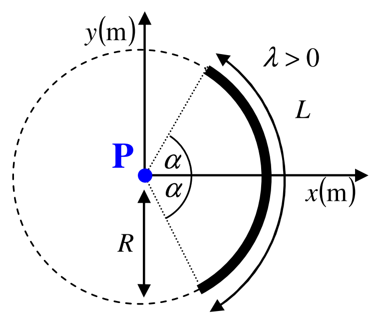
Considérons une tige courbée en arc de cercle centré à l'origine d'un système d'axe xy de longueur L ayant une densité de charge uniforme λ. Évaluons le champ électrique E produit par cette tige au centre (point **P**) tel qu'illustré sur le schéma ci-dessous :

<u>Charge sur la tige :</u>

$$Q = \lambda L$$

et

$$L = R(2\alpha)$$



Découpons notre tige en morceau de tige infinitésimale de largeur $\mathrm{d}L$ et représentons le champ électrique infinitésimal $\mathrm{d}\vec{E}$ généré par cette charge infinitésimale $\mathrm{d}Q$:

<u>Champ électrique infinitésimal :</u>

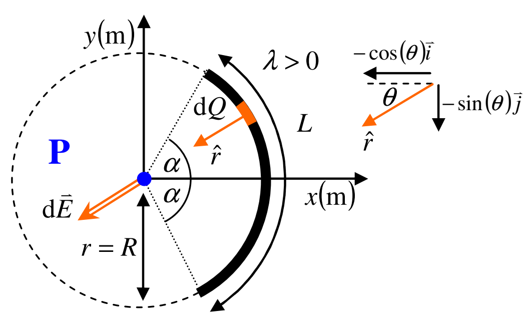
$$\mathrm{d}\vec{E} = k\frac{\mathrm{d}Q}{r^2}\hat{r}$$

et

$$\mathrm{d}Q = \lambda\,\mathrm{d}L$$

$$r = R$$

$$\hat{r} = -\cos(\theta)\vec{i} - \sin(\theta)\vec{j}$$



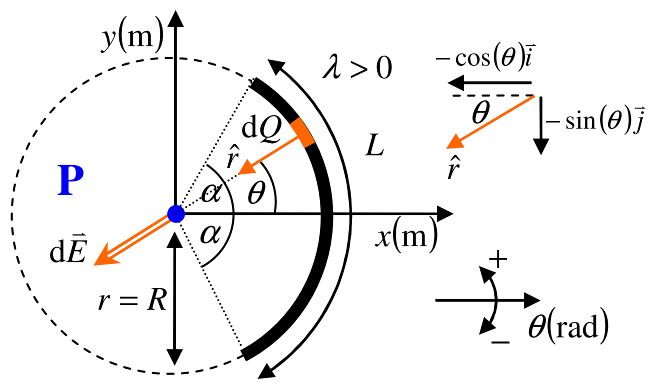
Utilisons le système d'axe θ et le rayon de l'arc de cercle pour mesurer la taille de l'arc infinitésimal dL. Utilisons la relation existant entre un arc de cercle et une longueur d'arc de cercle :

$L = R\theta \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}L = \mathrm{d}(R\theta)$ (Appliquer la différentielle de chaque côté)

$\Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{d}L = R\,\mathrm{d}\theta}$ (Factoriser la constante R)

Évaluons à l'aide d'une sommation continue de champs électriques infinitésimaux $\mathrm{d}\vec{E}$ le champ électrique total au point **P** en se basant sur le schéma ci-contre :

- $\mathrm{d}Q = \lambda\,\mathrm{d}L$
- $\mathrm{d}L = R\,\mathrm{d}\theta$
- $r = R$
- $\hat{r} = -\cos(\theta)\vec{i} - \sin(\theta)\vec{j}$



Ainsi :

$$\vec{E} = \int \mathrm{d}\vec{E}$$

$\Rightarrow \quad \vec{E} = \int k\dfrac{\mathrm{d}Q}{r^2}\hat{r}$ (Champ infinitésimal : $\mathrm{d}\vec{E} = k\dfrac{\mathrm{d}Q}{r^2}\hat{r}$)

$\Rightarrow \quad \vec{E} = \int k\dfrac{(\lambda\,\mathrm{d}L)}{(R)^2}\hat{r}$ (Remplacer dQ et r)

$\Rightarrow \quad \vec{E} = \dfrac{k\lambda}{R^2}\int \mathrm{d}L\,\hat{r}$ (Factoriser constantes)

$\Rightarrow \quad \vec{E} = \dfrac{k\lambda}{R^2}\int (R\,\mathrm{d}\theta)\hat{r}$ (Remplacer dL)

$\Rightarrow \quad \vec{E} = \dfrac{k\lambda}{R}\int \mathrm{d}\theta\;\hat{r}$ (Factoriser constantes)

$\Rightarrow \quad \vec{E} = \dfrac{k\lambda}{R}\int \mathrm{d}\theta\,\left(-\cos(\theta)\vec{i} - \sin(\theta)\vec{j}\right)$ (Remplacer $\hat{r}$)

$\Rightarrow \quad \vec{E} = -\dfrac{k\lambda}{R}\int \cos(\theta)\mathrm{d}\theta\,\vec{i} + \sin(\theta)\mathrm{d}\theta\,\vec{j}$ (Factoriser et distribuer $\mathrm{d}\theta$)

$\Rightarrow \quad \vec{E} = -\dfrac{k\lambda}{R}\left[\int \cos(\theta)\mathrm{d}\theta\,\vec{i} + \int \sin(\theta)\mathrm{d}\theta\,\vec{j}\,\right]$ (Somme des intégrales)

Déterminons maintenant les bornes afin de compléter l'intégrale :

$$\vec{E} = -\frac{k\lambda}{R}\left[\int \cos(\theta)\mathrm{d}\theta\,\vec{i} + \int \sin(\theta)\mathrm{d}\theta\,\vec{j}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = -\frac{k\lambda}{R}\left[\int_{\theta=-\alpha}^{\alpha} \cos(\theta)\mathrm{d}\theta\,\vec{i} + \int_{\theta=-\alpha}^{\alpha} \sin(\theta)\mathrm{d}\theta\,\vec{j}\right] \qquad \text{(Borne : } \theta = -\alpha \to \alpha \text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = -\frac{k\lambda}{R}\left[\left[\sin(\theta)\right]_{-\alpha}^{\alpha}\vec{i} + \left[-\cos(\theta)\right]_{-\alpha}^{\alpha}\vec{j}\right] \qquad \text{(Résoudre l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = -\frac{k\lambda}{R}\left[(\sin(\alpha) - \sin(-\alpha))\vec{i} + (-\cos(\alpha) - -\cos(-\alpha))\vec{j}\right] \qquad \text{(Évaluer l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = -\frac{k\lambda}{R}\left[(\sin(\alpha) - \sin(-\alpha))\vec{i} + (-\cos(\alpha) + \cos(-\alpha))\vec{j}\right] \qquad \text{(Simplifier les négatifs)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = -\frac{k\lambda}{R}\left[(\sin(\alpha) - \sin(-\alpha))\vec{i} + (-\cos(\alpha) + \cos(\alpha))\vec{j}\right] \qquad \text{(Identité : } \cos(-\theta) = \cos(\theta) \text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = -\frac{k\lambda}{R}(\sin(\alpha) - \sin(-\alpha))\vec{i} \qquad \text{(Simplifier terme cos)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = -\frac{k\lambda}{R}(\sin(\alpha) + \sin(\alpha))\vec{i} \qquad \text{(Identité : } \sin(-\theta) = -\sin(\theta) \text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = -2\frac{k\lambda}{R}\sin(\alpha)\vec{i} \qquad \text{(Simplifier terme sin)}$$

$$\Rightarrow \quad E = 2\frac{k\lambda}{R}\sin(\alpha) \quad \blacksquare \qquad \text{(Évaluer module de } \vec{E} \text{)}$$

Exercice A : *La tige arquée dans le plan xy*.

À compléter …