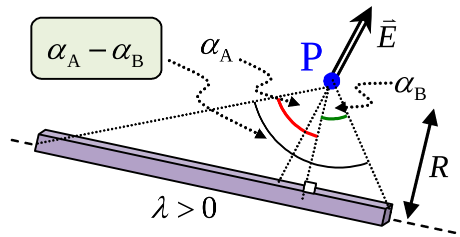
Chapitre 1.8b – Le champ électrique d'une tige par intégration : hors axe

Champ électrique hors axe d'une tige rectiligne uniformément chargée (TRUC hors axe)

Le module du champ électrique E généré par une tige finie uniformément chargée de longueur L à l'extérieur de son axe dépend de la distance R entre la tige et l'endroit **P** où l'on désire évaluer le champ électrique, de la densité de charge λ et de la position angulaire des extrémités de la tige par rapport au point **P** :

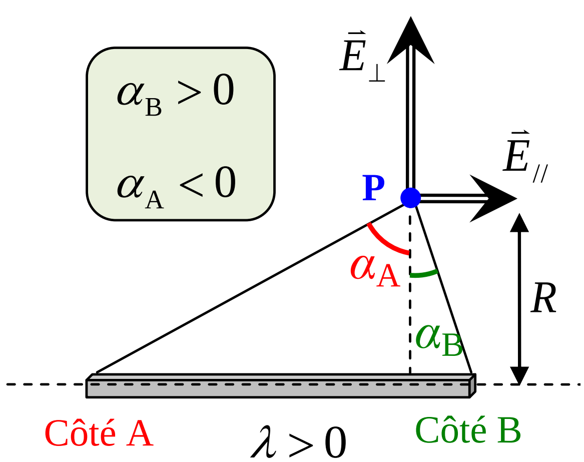


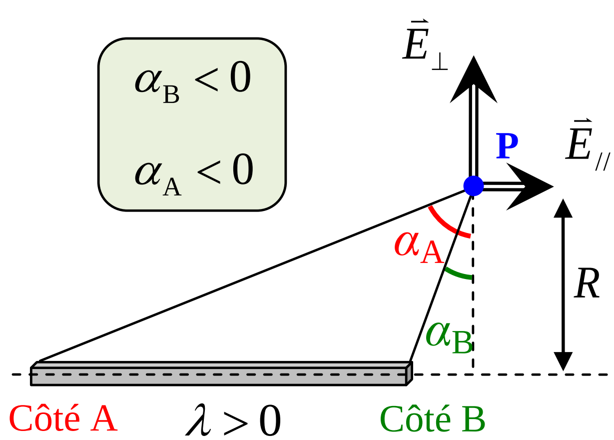
Champ perpendiculaire à la tige : $$E_\perp = \frac{k|\lambda|}{R}\left|\sin(\alpha_A) - \sin(\alpha_B)\right|$$ (attention aux signes de α !)

Champ parallèle à la tige : $$E_{//} = \frac{k|\lambda|}{R}\left|\cos(\alpha_A) - \cos(\alpha_B)\right|$$

où
- $E_\perp$: Champ électrique au point **P** perpendiculaire à la tige (N/C)
- $E_{//}$: Champ électrique au point **P** parallèle à la tige (N/C)
- λ : Densité linéaire de charge (C/m) $(\lambda = Q/L)$
- R : Plus petite distante entre le point **P** et le prolongement de la tige (m)
- k : Constante de Coulomb, $k = 9\times10^9\ \mathrm{Nm}^2/\mathrm{C}^2$
- α_A : Angle délimitant l'extrémité du côté A de la tige (angle pouvant être positif ou négatif)
- α_B : Angle délimitant l'extrémité du côté B de la tige (angle pouvant être positif ou négatif)

Schéma :



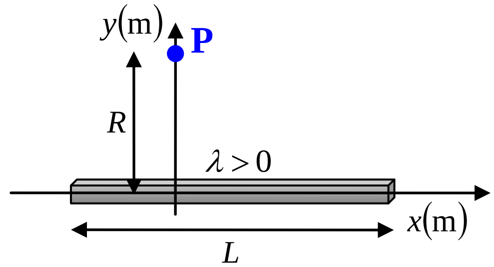


Preuve :

Considérons une tige de longueur L parallèle à l'axe x uniformément chargé de densité linéique positive λ. Évaluons le champ électrique E généré par cette tige en un point **P** à une distance R de la tige tel qu'illustré sur le schéma ci-dessous.

Charge sur la tige :

$$Q = \lambda L$$



Découpons notre tige en morceau de tige infinitésimale de largeur $\mathrm{d}x$ et représentons le champ électrique infinitésimal $\mathrm{d}\vec{E}$ généré par cette charge infinitésimale $\mathrm{d}Q$ à l'aide de notre système d'axe :

Champ électrique infinitésimal :

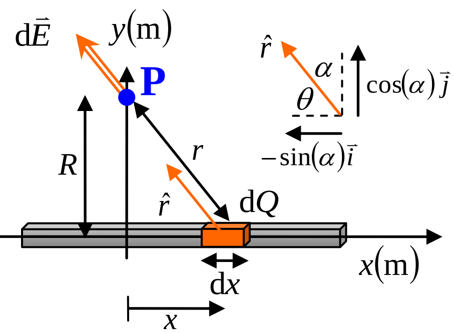
$$\mathrm{d}\vec{E} = k\frac{\mathrm{d}Q}{r^2}\hat{r}$$

et

$$\mathrm{d}Q = \lambda\,\mathrm{d}x$$

$$r = \sqrt{x^2 + R^2}$$

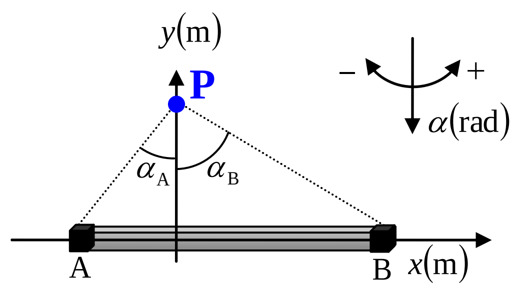
$$\hat{r} = -\sin(\alpha)\vec{i} + \cos(\alpha)\vec{j}$$



P.S. On peut également définir $\vec{r}$ vectoriellement tel que $\vec{r} = r\,\hat{r} = \vec{r}_{\mathrm{P}} - \vec{r}_Q = R\ \vec{j} - x\ \vec{i}$.

Introduisons un nouveau système d'axe α qui mesure un angle par rapport à l'axe vertical y. Ce système d'axe permet de délimiter les extrémités de la tige A et B. Dans ce cas particulier, $\alpha_{\mathrm{A}} < 0$ et $\alpha_{\mathrm{B}} > 0$.

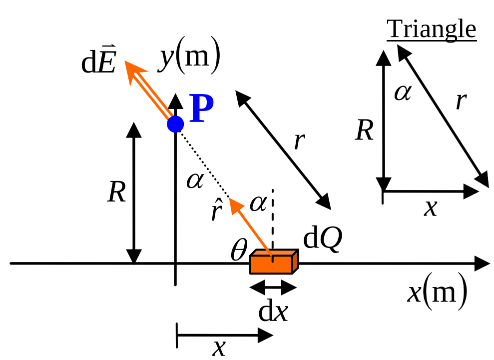
Remarquons que $x = 0$ correspond à $\alpha = 0$.



Avec ce nouveau système d'axe, nous pouvons établir des nouvelles relations trigonométrique entre *x*, *R*, *r* et α :

$$\cos(\alpha) = \frac{R}{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{r = \frac{R}{\cos(\alpha)}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{x}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = R\tan(\alpha)}$$



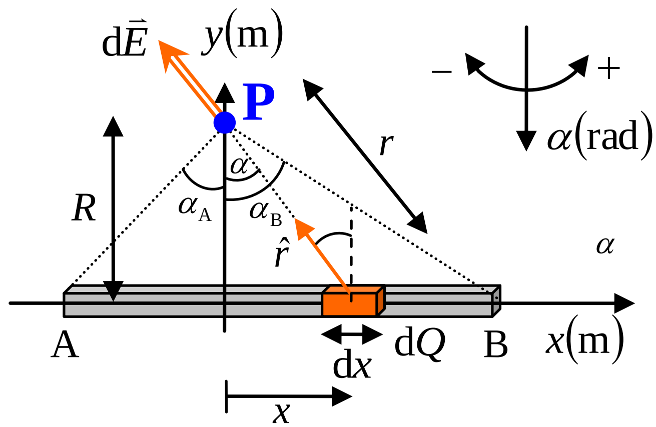
Puisque nous avons dans l'expression de dQ une référence à dx, nous devons évaluer dx en fonction de α si nous voulons utiliser l'axe α pour effectuer notre sommation à l'aide de l'intégrale :

$$x = R\tan(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \mathrm{d}(R\tan(\alpha)) \qquad \text{(Appliquer la différentielle de chaque côté)}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}x = R\,\mathrm{d}(\tan(\alpha)) \qquad \text{(Factoriser la constance } R\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{d}x = R\sec^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha} \qquad (\,\mathrm{d}(\tan\alpha) = \sec^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha\,)$$

Évaluons à l'aide d'une sommation continue de champs électriques infinitésimaux $\mathrm{d}\vec{E}$ le champ électrique total au point **P** en se basant sur le schéma ci-contre :



- $\mathrm{d}Q = \lambda\,\mathrm{d}x$
- $\mathrm{d}x = R\sec^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha$
- $x = R\tan(\alpha)$
- $r = \sqrt{x^2 + R^2}$
- $\hat{r} = -\sin(\alpha)\,\vec{i} + \cos(\alpha)\,\vec{j}$

Ainsi :

$$\vec{E} = \int \mathrm{d}\vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \int k\frac{\mathrm{d}Q}{r^2}\hat{r} \qquad \text{(Champ électrique infinitésimal : } \mathrm{d}\vec{E} = k\frac{\mathrm{d}Q}{r^2}\hat{r}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = \int k\frac{(\lambda\,\mathrm{d}x)}{\left(\sqrt{x^2+R^2}\right)^2}\hat{r} \qquad \text{(Remplacer d}Q\text{ et } r\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = k\lambda\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+R^2}\hat{r} \qquad \text{(Factoriser constantes et simplifier la racine)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = k\lambda\int \frac{\left(R\sec^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha\right)}{(R\tan(\alpha))^2 + R^2}\hat{r} \qquad \text{(Remplacer } x \text{ et d}x\text{ en fonction de } \alpha\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = k\lambda\int \frac{R\sec^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha}{R^2\tan^2(\alpha) + R^2}\hat{r} \qquad \text{(Mettre terme au carré)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = k\lambda\int \frac{R\sec^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha}{R^2\left(\tan^2(\alpha)+1\right)}\hat{r} \qquad \text{(Factoriser } R^2 \text{ au dénominateur)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = k\lambda\int \frac{\sec^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha}{R\left(\sec^2(\alpha)\right)}\hat{r} \qquad \text{(Simplifier } R \text{ et identité trigo : } \tan^2(\theta)+1 = \sec^2(\theta)\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{k\lambda}{R}\int \mathrm{d}\alpha\ \hat{r} \qquad \text{(Simplifier } \sec^2(\alpha) \text{ et factoriser } 1/R\text{)}$$

Puisque $\hat{r}$ varie selon l'angle α, il n'est pas constant dans l'intégrale. Remplaçons $\hat{r}$ et posons les bornes d'intégration à notre intégrale : ($\hat{r} = -\sin(\alpha)\vec{i} + \cos(\alpha)\vec{j}$)

$$\vec{E} = \frac{k\lambda}{R}\int \mathrm{d}\alpha\ \hat{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{k\lambda}{R}\int \mathrm{d}\alpha\left(-\sin(\alpha)\vec{i} + \cos(\alpha)\vec{j}\right) \qquad \text{(Remplacer } \hat{r}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{k\lambda}{R}\int -\sin(\alpha)\mathrm{d}\alpha\,\vec{i} + \cos(\alpha)\mathrm{d}\alpha\,\vec{j} \qquad \text{(Distribuer } \mathrm{d}\alpha\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{k\lambda}{R}\left[\int -\sin(\alpha)\mathrm{d}\alpha\,\vec{i} + \int \cos(\alpha)\mathrm{d}\alpha\,\vec{j}\right] \qquad \text{(Somme des intégrales)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{k\lambda}{R}\left[-\int_{\alpha=\alpha_{\mathrm{A}}}^{\alpha_{\mathrm{B}}} \sin(\alpha)\mathrm{d}\alpha\,\vec{i} + \int_{\alpha=\alpha_{\mathrm{A}}}^{\alpha_{\mathrm{B}}} \cos(\alpha)\mathrm{d}\alpha\,\vec{j}\right] \qquad \text{(Borne : } \alpha = \alpha_{\mathrm{A}} \to \alpha_{\mathrm{B}}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{k\lambda}{R}\left[-\left[-\cos(\alpha)\right]_{\alpha_{\mathrm{A}}}^{\alpha_{\mathrm{B}}}\vec{i} + \left[\sin(\alpha)\right]_{\alpha_{\mathrm{A}}}^{\alpha_{\mathrm{B}}}\vec{j}\right] \qquad \text{(Résoudre l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{k\lambda}{R}\left[\left[\cos(\alpha)\right]_{\alpha_{\mathrm{A}}}^{\alpha_{\mathrm{B}}}\vec{i} + \left[\sin(\alpha)\right]_{\alpha_{\mathrm{A}}}^{\alpha_{\mathrm{B}}}\vec{j}\right] \qquad \text{(Simplifier négatif)}$$

Puisque nous avons un terme en $\vec{i}$ (selon l'axe x) et un terme en $\vec{j}$ (selon l'axe y) dans notre sommation, le champ électrique $\vec{E}$ aura également une orientation selon ces axes. Évaluons séparément l'orientation des champs électriques :

$$\vec{E} = E_x\,\vec{i} + E_y\,\vec{j} \qquad \text{et} \qquad \vec{E} = \frac{k\lambda}{R}\left[\left[\cos(\alpha)\right]_{\alpha_{\mathrm{A}}}^{\alpha_{\mathrm{B}}}\vec{i} + \left[\sin(\alpha)\right]_{\alpha_{\mathrm{A}}}^{\alpha_{\mathrm{B}}}\vec{j}\right]$$

Alors :

$$E_x = \frac{k\lambda}{R}\left[\cos(\alpha)\right]_{\alpha_{\mathrm{A}}}^{\alpha_{\mathrm{B}}} \quad \Rightarrow \quad E_x = \frac{k\lambda}{R}\left(\cos(\alpha_{\mathrm{B}}) - \cos(\alpha_{\mathrm{A}})\right) \qquad \text{(Évaluer l'intégrale)}$$

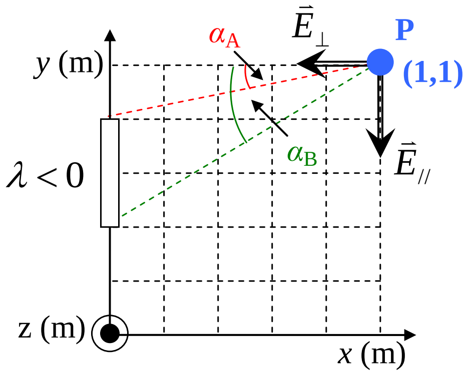
$$\Rightarrow \quad E_{//} = \left|E_x\right| = \frac{k|\lambda|}{R}\left|\cos(\alpha_{\mathrm{B}}) - \cos(\alpha_{\mathrm{A}})\right| \quad \blacksquare \qquad \text{(Évaluer module } E_x\text{)}$$

$$E_y = \frac{k\lambda}{R}\left[\sin(\alpha)\right]_{\alpha_{\mathrm{A}}}^{\alpha_{\mathrm{B}}} \quad \Rightarrow \quad E_y = \frac{k\lambda}{R}\left(\sin(\alpha_{\mathrm{B}}) - \sin(\alpha_{\mathrm{A}})\right) \qquad \text{(Évaluer l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad E_{\perp} = \left|E_y\right| = \frac{k|\lambda|}{R}\left|\sin(\alpha_{\mathrm{B}}) - \sin(\alpha_{\mathrm{A}})\right| \quad \blacksquare \qquad \text{(Évaluer module } E_y\text{)}$$

Situation A : ***La tige finie sur l'axe y.*** Une TRUC portant un surplus de charges négatives égal à $-8\ \mu\text{C}$ est alignée parallèlement à l'axe y et elle est située de la coordonnée $y = 0{,}4\ \text{m}$ à $y = 0{,}8\ \text{m}$. Évaluez le champ électrique total à la coordonnée $x = 1\ \text{m}$ et $y = 1\ \text{m}$ sous forme vectorielle.

Voici une représentation graphique de la situation dans un plan cartésien *xyz* :



Nous avons les informations suivantes selon la géométrie du problème :

- Longueur de la tige : $L = |y_f - y_i| = |0{,}8 - 0{,}4|$ $\Rightarrow$ $\boxed{L = 0{,}4\ \text{m}}$
- La densité de charge de la tige : $\lambda = \dfrac{Q}{L} = \dfrac{(-8\times10^{-6})}{(0{,}4)}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\lambda = -2\times10^{-5}\ \text{C/m}}$
- La distance entre le point **P** et la tige : $R = 1\ \text{m}$
- Angle α_A : $\tan(\alpha_A) = \dfrac{(0{,}2)}{(1)}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\alpha_A = 11{,}31°}$
- Angle α_B : $\tan(\alpha_B) = \dfrac{(0{,}6)}{(1)}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\alpha_B = 30{,}96°}$

Nous avons ainsi le champ électrique suivant au point **P** produit par la tige :

$$E_\perp = \frac{k|\lambda|}{R}\left|\sin(\alpha_A) - \sin(\alpha_B)\right| \quad\Rightarrow\quad E_\perp = \frac{(9\times10^9)\left|-2\times10^{-5}\right|}{(1)}\left|\sin(11{,}31°) - \sin(30{,}96°)\right|$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E_\perp = 5{,}730\times10^4\ \text{N/C}}$$

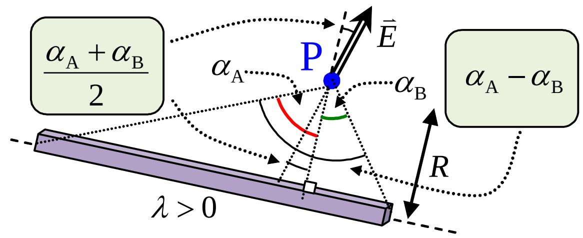
$$E_{//} = \frac{k|\lambda|}{R}\left|\cos(\alpha_A) - \cos(\alpha_B)\right| \quad\Rightarrow\quad E_{//} = \frac{(9\times10^9)\left|-2\times10^{-5}\right|}{(1)}\left|\cos(11{,}31°) - \cos(30{,}96°)\right|$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E_{//} = 2{,}215\times10^4\ \text{N/C}}$$

Ainsi : $\vec{E} = -E_\perp \vec{i} - E_{//}\vec{j}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{E} = \left(-5{,}730\ \vec{i} - 2{,}215\ \vec{j}\right)\times10^4\ \text{N/C}}$

Caractéristiques géométriques de la TRUC (Complément informatique)

Voici quelques caractéristiques géométriques en lien avec le champ électrique généré par une tige rectiligne uniformément chargée :



Module du champ électrique :

$$E=\sqrt{2}\,\frac{k\lambda}{R}\sqrt{1-\cos(\alpha_A-\alpha_B)}$$

avec

Composante perpendiculaire à la tige du champ électrique :

$$E_{\perp}=E\cos\left(\frac{\alpha_A+\alpha_B}{2}\right)$$

Composante parallèle à la tige du champ électrique :

$$E_{//}=E\sin\left(\frac{\alpha_A+\alpha_B}{2}\right)$$

<u>Preuve :</u>

À partir des solutions précédentes, évaluons le module du champ électrique :

$$E=\sqrt{{E_{\perp}}^2+{E_{//}}^2}$$

$$\Rightarrow \quad E=\sqrt{\left(\frac{k|\lambda|}{R}(\sin(\alpha_A)-\sin(\alpha_B))\right)^2+\left(\frac{k|\lambda|}{R}(\cos(\alpha_A)-\cos(\alpha_B))\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad E=\sqrt{\left(\frac{k|\lambda|}{R}\right)^2(\sin(\alpha_A)-\sin(\alpha_B))^2+\left(\frac{k|\lambda|}{R}\right)^2(\cos(\alpha_A)-\cos(\alpha_B))^2}$$

$$\Rightarrow \quad E=\frac{k|\lambda|}{R}\sqrt{(\sin(\alpha_A)-\sin(\alpha_B))^2+(\cos(\alpha_A)-\cos(\alpha_B))^2}$$

$$\Rightarrow \quad E=\frac{k|\lambda|}{R}\sqrt{\sin^2(\alpha_A)-2\sin(\alpha_A)\sin(\alpha_B)+\sin^2(\alpha_B)+\cos^2(\alpha_A)-2\cos(\alpha_A)\cos(\alpha_B)+\cos^2(\alpha_B)}$$

$$\Rightarrow \quad E=\sqrt{2}\,\frac{k|\lambda|}{R}\sqrt{1-(\sin(\alpha_A)\sin(\alpha_B)+\cos(\alpha_A)\cos(\alpha_B))}$$

Avec l'usage des identités trigonométrique

$$\sin(\theta)\cdot\sin(\phi)=\frac{1}{2}[\cos(\theta-\phi)-\cos(\theta+\phi)] \quad \text{et} \quad \cos(\theta)\cdot\cos(\phi)=\frac{1}{2}[\cos(\theta-\phi)+\cos(\theta+\phi)]\ ,$$

nous obtenons

$$E=\sqrt{2}\,\frac{k|\lambda|}{R}\sqrt{1-\left[\frac{1}{2}(\cos(\alpha_A-\alpha_B)-\cos(\alpha_A+\alpha_B))+\frac{1}{2}(\cos(\alpha_A-\alpha_B)+\cos(\alpha_A+\alpha_B))\right]}$$

qui se simplifie à l'expression

$$E=\sqrt{2}\,\frac{k|\lambda|}{R}\sqrt{1-\cos(\alpha_A-\alpha_B)} \quad \blacksquare \quad (1)$$

Pour évaluer l'angle de projection du champ électrique par rapport à l'axe perpendiculaire à la tige, utilisons une expression de tangente :

$$\tan(\theta) = \frac{E_{//}}{E_{\perp}} \quad \Rightarrow \quad \tan(\theta) = \frac{\left(\dfrac{k|\lambda|}{R}(\cos(\alpha_{\mathrm{A}}) - \cos(\alpha_{\mathrm{B}}))\right)}{\left(\dfrac{k|\lambda|}{R}(\sin(\alpha_{\mathrm{A}}) - \sin(\alpha_{\mathrm{B}}))\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \tan(\theta) = \frac{\cos(\alpha_{\mathrm{A}}) - \cos(\alpha_{\mathrm{B}})}{\sin(\alpha_{\mathrm{A}}) - \sin(\alpha_{\mathrm{B}})}$$

Avec les identités trigonométriques

$$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sin(p) - \sin(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

nous obtenons

$$\tan(\theta) = \frac{-2\sin\left(\dfrac{\alpha_{\mathrm{A}} + \alpha_{\mathrm{B}}}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha_{\mathrm{A}} - \alpha_{\mathrm{B}}}{2}\right)}{2\cos\left(\dfrac{\alpha_{\mathrm{A}} + \alpha_{\mathrm{B}}}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha_{\mathrm{A}} - \alpha_{\mathrm{B}}}{2}\right)} \quad .$$

ce qui donne

$$\tan(\theta) = -\tan\left(\frac{\alpha_{\mathrm{A}} + \alpha_{\mathrm{B}}}{2}\right) \quad .$$

Avec l'identité $\tan(-\theta) = -\tan(\theta)$, nous obtenons

$$\tan(\theta) = \tan\left(-\frac{\alpha_{\mathrm{A}} + \alpha_{\mathrm{B}}}{2}\right)$$

ce qui nous donne

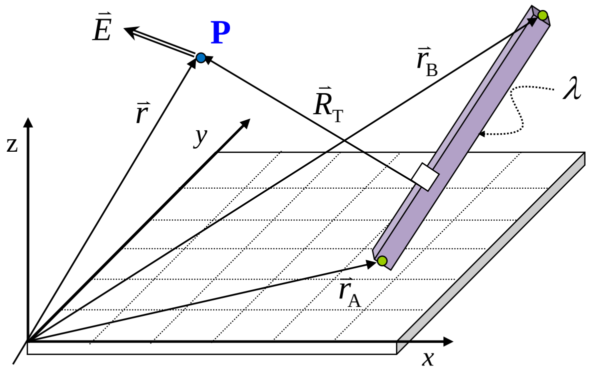
$$\theta = -\frac{\alpha_{\mathrm{A}} + \alpha_{\mathrm{B}}}{2} \quad .$$

Puisque la convention des signes entre α_{A} et α_{B} est arbitraire, nous pouvons en conclure également pour θ ce qui nous permet d'affirmer que l'angle de projection du champ électrique sera

$$\theta = \frac{\alpha_{\mathrm{A}} + \alpha_{\mathrm{B}}}{2} \quad \blacksquare \quad (2)$$

Le champ électrique d'une tige rectiligne uniformément chargée TRUC *hors axe* à l'aide des vecteurs positions (complément informatique)

À partir de la position $\vec{r}_{\mathrm{A}}$ et $\vec{r}_{\mathrm{B}}$ désignant les deux extrémités de la tige uniformément chargée λ, nous pouvons évaluer une expression vectorielle pour déterminer le champ électrique $\vec{E}$ à une position $\vec{r}$ *hors axe* de la tige désignée par un point **P** grâce aux équations suivantes :



$$\vec{E} = E\sin\left(\frac{\alpha_{\mathrm{A}}+\alpha_{\mathrm{B}}}{2}\right)\hat{a}_{\mathrm{T}} + E\cos\left(\frac{\alpha_{\mathrm{A}}+\alpha_{\mathrm{B}}}{2}\right)\hat{R}_{\mathrm{T}}$$

où $$E = \sqrt{2}\,\frac{k\lambda}{R_{\mathrm{T}}}\sqrt{1-\cos(\alpha_{\mathrm{A}}-\alpha_{\mathrm{B}})}$$

avec les terme suivants :

$$\hat{a}_{\mathrm{T}} = \frac{\vec{r}_{\mathrm{B}}-\vec{r}_{\mathrm{A}}}{\|\vec{r}_{\mathrm{B}}-\vec{r}_{\mathrm{A}}\|}$$

$$\vec{r}_{p\mathrm{A}} = \vec{r}_{\mathrm{A}}-\vec{r}$$
(point **P** vers **A**)

$$\vec{r}_{p\mathrm{B}} = \vec{r}_{\mathrm{B}}-\vec{r}$$
(point **P** vers **B**)

$$\hat{r}_{p\mathrm{A}} = \frac{\vec{r}_{p\mathrm{A}}}{\|\vec{r}_{p\mathrm{A}}\|} \qquad \hat{r}_{p\mathrm{B}} = \frac{\vec{r}_{p\mathrm{B}}}{\|\vec{r}_{p\mathrm{B}}\|}$$

$$\vec{n} = \vec{r}_{p\mathrm{A}}\times\hat{a}_{\mathrm{T}}$$
(attention aux vecteurs !)

$$\hat{n} = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$$

$$\vec{R}_{\mathrm{T}} = \vec{n}\times\hat{a}_{\mathrm{T}}$$
(attention aux vecteurs !)

$$R_{\mathrm{T}} = \|\vec{R}_{\mathrm{T}}\| \qquad \hat{R}_{\mathrm{T}} = \frac{\vec{R}_{\mathrm{T}}}{\|\vec{R}_{\mathrm{T}}\|}$$

$$\alpha_{\mathrm{A}} = \arcsin\left(\hat{R}_{T}\times\hat{r}_{p\mathrm{A}}\cdot\hat{n}\right)$$
(angle positif ou négatif)

$$\alpha_{\mathrm{B}} = \arcsin\left(\hat{R}_{T}\times\hat{r}_{p\mathrm{B}}\cdot\hat{n}\right)$$
(angle positif ou négatif)

<u>Preuve :</u>

En construction …

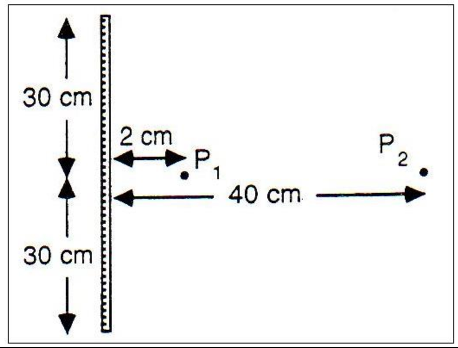
Exercice

Référence : Note Science Santé – Chapitre 1 – Question 23 (modifiée)

Un fil droit de 60 cm porte une charge de 12 μC répartie de façon uniforme.

Calculez :

a) Le champ électrique de façon exacte à P_1.
b) Le champ électrique de façon exacte à P_2.



Solution

Référence : Note Science Santé – Chapitre 1 – Question 23 (modifiée)

On peut évaluer λ :

$$Q = \lambda \, L \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{Q}{L} = \frac{\left(12\times10^{-6}\right)}{\left(0{,}60\right)} = 2\times10^{-5}\,\mathrm{C}$$

Puisqu'il faut évaluer le champ électrique d'une tige rectiligne uniformément chargée à une distance « *a* », nous allons utiliser la solution déjà calculée :

$$E_{\perp} = \frac{k|\lambda|}{a}\left|\sin(\theta_1)-\sin(\theta_2)\right| \qquad \text{et} \qquad E_{//} = \frac{k|\lambda|}{a}\left|\cos(\theta_1)-\cos(\theta_2)\right|$$

$\perp$: Perpendiculaire à la tige rectiligne (axe *x*)

$//$: Parallèle à la tige rectiligne (axe *y*)

a) $$\tan(\theta_1) = \frac{0{,}30}{0{,}02} \qquad \Rightarrow \qquad \theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{0{,}30}{0{,}02}\right) = 86{,}2°$$

$$\tan(\theta_2) = \frac{-0{,}30}{0{,}02} \qquad \Rightarrow \qquad \theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{-0{,}30}{0{,}02}\right) = -86{,}2°$$

Alors :

$$\vec{E} = +E_{\perp}\vec{i} + E_{//}\vec{j} = \frac{k\lambda}{a}\left|\sin(\theta_1) - \sin(\theta_2)\right|\ \vec{i} + \frac{k\lambda}{a}\left|\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)\right|\ \vec{j}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{k\lambda}{a}\left|\sin(86{,}2°) - \sin(-86{,}2°)\right|\ \vec{i} + \frac{k\lambda}{a}\left|\cos(86{,}2°) - \cos(-86{,}2°)\right|\ \vec{j}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{k\lambda}{a}(1{,}996)\ \vec{i} = \frac{(9\times10^{9})(2\times10^{-5})}{(0{,}02)}(1{,}996)\ \vec{i}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{E} = 1{,}80\times10^{7}\vec{i}\ \ \text{N/C}}$$

b) $\tan(\theta_1) = \dfrac{0{,}30}{0{,}40} \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = \tan^{-1}\left(\dfrac{0{,}30}{0{,}40}\right) = 36{,}9°$

$\tan(\theta_1) = \dfrac{-0{,}30}{0{,}40} \quad \Rightarrow \quad \theta_2 = \tan^{-1}\left(\dfrac{-0{,}30}{0{,}40}\right) = -36{,}9°$

Alors :

$$\vec{E} = +E_{\perp}\vec{i} + E_{//}\vec{j} = \frac{k\lambda}{a}\left|\sin(\theta_1) - \sin(\theta_2)\right|\ \vec{i} + \frac{k\lambda}{a}\left|\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)\right|\ \vec{j}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{k\lambda}{a}\left|\sin(36{,}9°) - \sin(-36{,}9°)\right|\ \vec{i} + \frac{k\lambda}{a}\left|\cos(36{,}9°) - \cos(-36{,}9°)\right|\ \vec{j}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{k\lambda}{a}(1{,}20)\ \vec{i} = \frac{(9\times10^{9})(2\times10^{-5})}{(0{,}40)}(1{,}20)\ \vec{i}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{E} = 5{,}4\times10^{5}\vec{i}\ \ \text{N/C}}$$