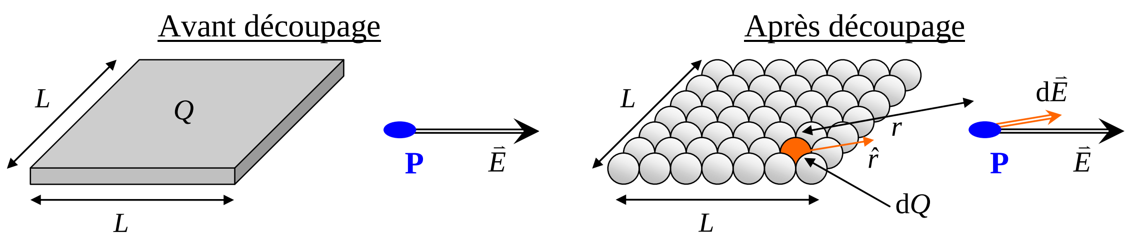
Chapitre 1.8a – Le champ électrique d'une tige par intégration : sur l'axe

Le champ généré par une distribution de charges

La technique à employer pour évaluer le champ électrique généré par une distribution de charge est la sommation continue du champ électrique. Cette technique consiste à découper la distribution de charges en éléments de charges infinitésimales $\mathrm{d}Q$ générant chacun un champ électrique infinitésimal $\mathrm{d}\vec{E}$ et d'additionner tous les champs infinitésimaux à l'aide d'une intégrale.

Exemple : Une plaque de dimension $L \times L$ découpée en plusieurs sphères infinitésimales.



L'équation associée au champ électrique infinitésimal $\mathrm{d}\vec{E}$ généré par la charge infinitésimale $\mathrm{d}Q$ dépend de la forme de la charge infinitésimale. Une charge infinitésimale $\mathrm{d}Q$ en forme de **cube**, de **coquille** ou **d'arc de cercle infinitésimal** génère un **champ électrique** $\mathrm{d}\vec{E}$ équivalent à celui d'une **charge ponctuelle** :

$$\mathrm{d}\vec{E} = k\frac{\mathrm{d}Q}{r^2}\hat{r}$$

où $\mathrm{d}\vec{E}$: Champ électrique infinitésimal (N/C)
$\mathrm{d}Q$: Charge ponctuelle infinitésimale qui génère le champ électrique (C)
r : Distance entre la charge $\mathrm{d}Q$ et le point **P**(m)
k : Constante de la loi de Coulomb ($9{,}00 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$)
$\hat{r}$: Vecteur unitaire orientation de $\mathrm{d}Q$ (source) vers le point **P** (cible)

L'expression associée à $\mathrm{d}\vec{E}$ dépend de la **forme** du **découpage** et sera exprimée dans les **coordonnée**s du **système d'axe** utilisées pour effectuer le découpage. La sommation des champs électriques infinitésimaux $\mathrm{d}\vec{E}$ devra s'effectuer grâce à une intégrale et permettra d'évaluer le champ électrique $\vec{E}$ total :

$$\vec{E} = \int \mathrm{d}\vec{E}$$

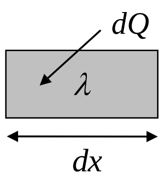
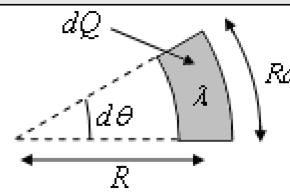
où $\vec{E}$: Champ électrique total (N/C)
$\mathrm{d}\vec{E}$: Champ électrique infinitésimal (N/C)

Découpage d’une densité de charges

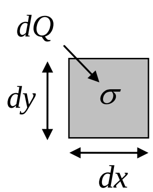
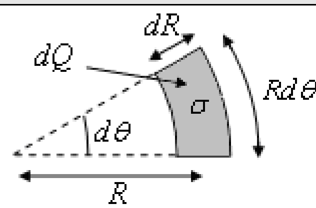
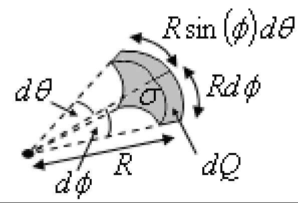
Pour évaluer le champ électrique $\vec{E}$ d’une distribution continue de charges, il faut découper l’espace en plusieurs volumes infinitésimaux contenant une densité de charges et faire la sommation du champ électrique généré par toutes ces charges.

Voici quelques formes de découpage infinitésimal fréquemment employées :

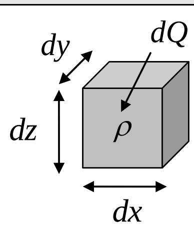
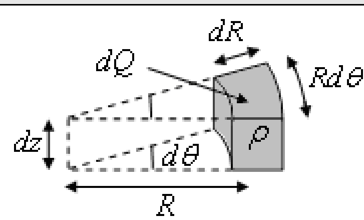
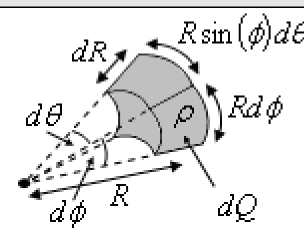
<u>En 1D :</u> Densité linéaire $[\lambda] = \mathrm{C/m}$ et $\mathrm{d}Q = \lambda\,\mathrm{d}L$

Tige : $\mathrm{d}Q = \lambda\,\mathrm{d}x$	Tige cylindrique : $\mathrm{d}Q = \lambda\,R\,\mathrm{d}\theta$
	

<u>En 2D :</u> Densité surfacique $[\sigma] = \mathrm{C/m^2}$ et $\mathrm{d}Q = \sigma\,\mathrm{d}A$

Carré : $\mathrm{d}Q = \sigma\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$	Carré cylindrique : $\mathrm{d}Q = \sigma\,R\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\theta$	Carré sphérique: $\mathrm{d}Q = \sigma\,R^2\sin(\phi)\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$
		

<u>En 3D :</u> Densité volumique $[\rho] = \mathrm{C/m^3}$ et $\mathrm{d}Q = \rho\,\mathrm{d}V$

Cube[1] : $\mathrm{d}Q = \rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$	Cube cylindrique[2] : $\mathrm{d}Q = \rho\,R\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$	Cube sphérique[3] : $\mathrm{d}Q = \rho\,R^2\sin(\phi)\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$
		

<u>Remarque :</u> $x, y, z \in [-\infty..\infty]$ et $R \in [0..\infty]$ $\theta \in [0..2\pi]$ $\phi \in [0..\pi]$

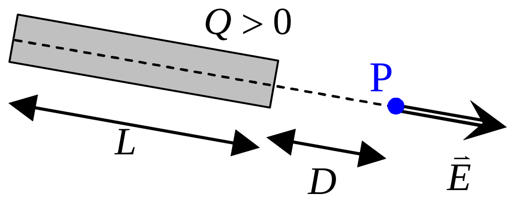
θ : Longitude — θ : Axe parallèle à x — ϕ : Axe parallèle à z

ϕ : Colatitude — « Rotation plan xy » — « Rotation +z à –z »

[1] Ce découpage s’effectue dans le système d’axe *xyz* qui porte le nom de coordonnée cartésienne.
[2] Ce découpage s’effectue dans le système d’axe *Rθz* qui porte le nom de coordonnée cylindrique.
[3] Ce découpage s’effectue dans le système d’axe *RθΦ* qui porte le nom de coordonnée sphérique.

Champ électrique sur l'axe d'une tige rectiligne uniformément chargée (TRUC sur l'axe)

Le module du champ électrique E généré par une tige finie uniformément chargée de longueur L le long de son axe dépend de la distance D entre la tige et l'endroit P où l'on désire évaluer le champ électrique, la longueur L de la tige et de la charge Q qu'elle porte :



$$E = \frac{k|Q|}{D(D+L)}$$

où E : Module du champ électrique (N/C)

Q : Charge électrique totale sur la tige en coulomb (C)

D : Distance le point **P** et la tige en mètre (m)

L : Longueur de la tige en mètre (m)

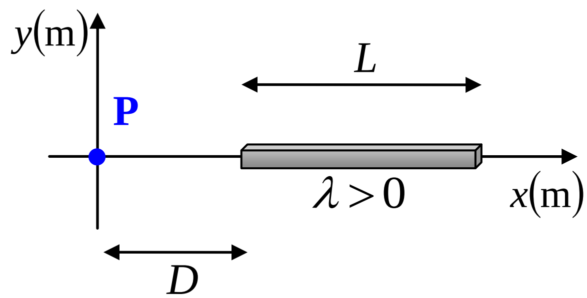
k : Constante de la loi de Coulomb, $k = 9{,}00 \times 10^9 \ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$

<u>Preuve :</u>

Considérons une tige de charge positive Q et de longueur L dont la densité de charge λ est homogène. Évaluons le module du champ électrique sur l'axe de la tige à une distance D de celle-ci. Pour simplifier le calcul sans perdre toute généralité, alignons la tige le long de l'axe x et évaluons le champ à l'origine (coordonnée du point **P**) :

<u>Charge sur la tige :</u>

$$Q = \lambda L$$



Découpons notre tige en morceau de tige infinitésimale de largeur $\mathrm{d}x$ et représentons le champ électrique infinitésimal $\mathrm{d}\vec{E}$ produit par cette charge infinitésimale $\mathrm{d}Q$ à l'aide de notre système d'axe :

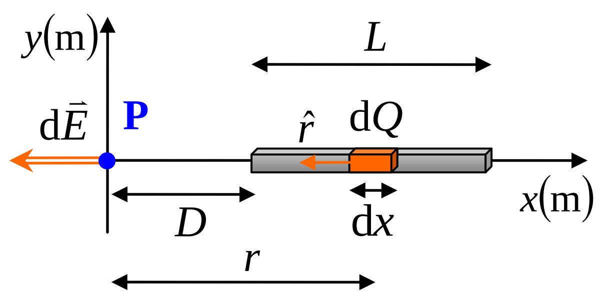
<u>Champ électrique infinitésimal :</u>

$$\mathrm{d}\vec{E} = k\frac{\mathrm{d}Q}{r^2}\hat{r}$$

et $$\mathrm{d}Q = \lambda\,\mathrm{d}x$$

$$r = x$$

$$\hat{r} = -\vec{i}$$



Posons notre intégrale afin d'additionner toute la contribution au champ électrique de tous les $\mathrm{d}Q$ situés sur la tige entre la coordonnée $x = D$ et $x = D + L$:

$$\vec{E} = \int \mathrm{d}\vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \int k \frac{\mathrm{d}Q}{r^2}\hat{r} \qquad \text{(Remplacer } \mathrm{d}\vec{E}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = \int k \frac{(\lambda\,\mathrm{d}x)}{(x)^2}\left(-\vec{i}\right) \qquad \text{(Remplacer } r\text{, } \hat{r} \text{ et } \mathrm{d}Q\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = -k\lambda \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2}\vec{i} \qquad \text{(Factoriser les constantes)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = -k\lambda \int_{x=D}^{D+L} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}\vec{i} \qquad \text{(Borne : } x = D \to D + L\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = -k\lambda \left[-\frac{1}{x}\right]_D^{D+L}\vec{i} \qquad \text{(Résoudre l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = -k\lambda \left[\left(-\frac{1}{(D+L)}\right) - \left(-\frac{1}{(D)}\right)\right]\vec{i} \qquad \text{(Évaluer l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = -k\lambda \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{D+L}\right)\vec{i} \qquad \text{(Réécriture)}$$

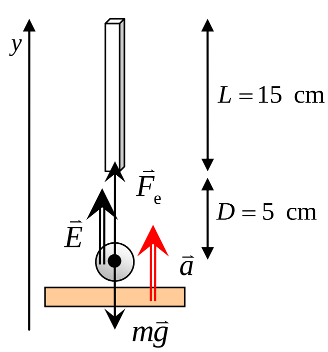
$$\Rightarrow \quad \vec{E} = -k\lambda \left(\frac{L}{D(D+L)}\right)\vec{i} \qquad \text{(Dénominateur commun et simplifier } D\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = -k \frac{Q}{D(D+L)}\vec{i} \qquad \text{(Remplacer } Q = \lambda L\text{)}$$

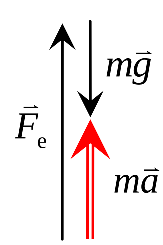
$$\Rightarrow \quad E = \frac{k|Q|}{D(D+L)} \quad \blacksquare \qquad \text{(Module du champ électrique)}$$

Situation A : *Attirer avec une tige chargée*. Une tige uniformément chargée de 15 cm de longueur possède une charge de $-5\ \mu\mathrm{C}$ et est utilisée pour soulever verticalement une bille de 5 g possédant une charge de 8 nC déposée sur une table. On désire évaluer l'accélération de la bille lorsqu'elle quitte la table sachant que la tige est alignée verticalement et qu'elle est située à 5 cm de la bille.

Voici la représentation graphique de la situation **<u>si la bille quitte la table</u>** :



Représentation graphique de la 2[ième] loi de Newton :



Évaluons le module du champ électrique à l'endroit où la bille est située :

$$E = \frac{k|Q|}{D(D+L)} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{(9\times10^{9})|-5\times10^{-6}|}{(5\times10^{-2})((5\times10^{-2})+(15\times10^{-2}))}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E = 4{,}5\times10^{6}\ \text{N/C}}$$

Évaluons la 2[ième] loi de Newton afin d'évaluer l'accélération selon l'axe y :

$$\sum F_y = ma_y \quad \Rightarrow \quad F_e - mg = ma_y \qquad \text{(Remplacer } \sum F_y\text{)}$$

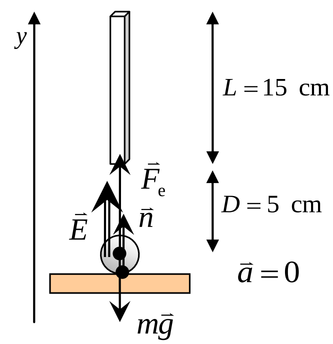
$$\Rightarrow \quad (|q|E) - mg = ma_y \qquad \text{(Remplacer } F_e = |q|E\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad |(8\times10^{-9})|(4{,}5\times10^{6}) - (0{,}005)(9{,}8) = (0{,}005)a_y \qquad \text{(Remplacer val. num.)}$$

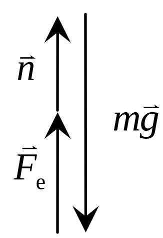
$$\Rightarrow \quad 0{,}036 - 0{,}049 = 0{,}005a_y \qquad \text{(Calcul)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a_y = -2{,}6\ \text{m/s}^2} \qquad \text{(Isoler } a_y\text{)}$$

En conclusion, puisque les calculs mènent à une accélération négative qui est contradictoire avec notre hypothèse initiale (accélération positive), la bille sera alors supportée par une force normale et elle ne quittera pas la table. Son **accélération** est donc **nulle**.



Représentation graphique de la 2[ième] loi de Newton :



Le champ électrique par intégration à l'aide des vecteurs positions (complément informatique)

Le champ électrique $\vec{E}$ évalué en un point P situé à la position $\vec{r}$ généré par toute forme de distribution de charge Q peut être évalué à l'aide de l'expression suivante :

$$\vec{E} = \int k \frac{\left(\vec{r} - \vec{r}_{\mathrm{d}Q}\right)}{\left\|\vec{r} - \vec{r}_{\mathrm{d}Q}\right\|^3} \mathrm{d}Q$$

où $\vec{E}$: Champ électrique évalué à la position $\vec{r}$ (N/C).

$\vec{r}$: Position où est évalué le champ électrique (m).

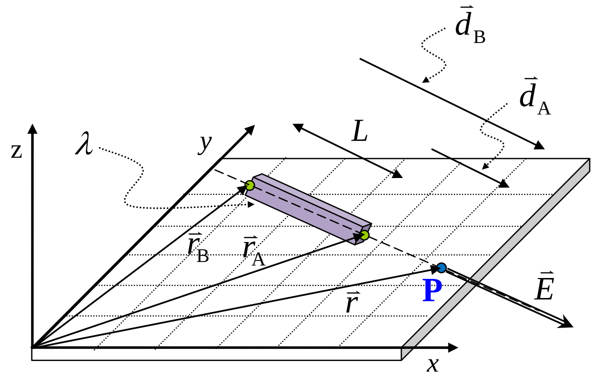
$\mathrm{d}Q$: Charge ponctuelle infinitésimale (C).

$\vec{r}_{\mathrm{d}Q}$: Position des charges infinitésimales (m).

k : Constante de la loi de Coulomb ($9{,}00 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$)

Le champ électrique d'une tige rectiligne uniformément chargée TRUC *sur l'axe* à l'aide des vecteurs positions (complément informatique)

À partir de la position $\vec{r}_{\mathrm{A}}$ et $\vec{r}_{\mathrm{B}}$ désignant les deux extrémités de la tige uniformément chargée λ, nous pouvons évaluer une expression vectorielle pour déterminer le champ électrique $\vec{E}$ à une position $\vec{r}$ *sur l'axe* de la tige désignée par un point **P** grâce aux équations suivantes :



$$\vec{E} = \frac{k\,Q}{\left\|\vec{d}_{\mathrm{A}}\right\| \left\|\vec{d}_{\mathrm{B}}\right\|}\hat{d}$$

avec $\vec{d}_{\mathrm{A}} = \vec{r} - \vec{r}_{\mathrm{A}}$, $\vec{d}_{\mathrm{B}} = \vec{r} - \vec{r}_{\mathrm{B}}$ et $\hat{d} = \dfrac{\vec{d}_{\mathrm{A}}}{\left\|\vec{d}_{\mathrm{A}}\right\|} = \dfrac{\vec{d}_{\mathrm{B}}}{\left\|\vec{d}_{\mathrm{B}}\right\|}$

Condition de la validité de l'équation :

Le point **P** est sur $\vec{r}_{\mathrm{A}}$ ou $\vec{r}_{\mathrm{B}}$	La tige possède une longueur nulle. ($L=0$)	Le point **P** est sur l'axe de la tige.	Le point **P** est situé sur la tige.	Le point **P** est hors axe de la tige.
$\left\|\vec{d}_{\mathrm{A}}\right\| = 0$ ou $\left\|\vec{d}_{\mathrm{B}}\right\| = 0$	$L = \left\|\vec{r}_{\mathrm{A}} - \vec{r}_{\mathrm{B}}\right\|$	$\dfrac{\vec{d}_{\mathrm{A}} \cdot \vec{d}_{\mathrm{B}}}{\left\|\vec{d}_{\mathrm{A}}\right\| \left\|\vec{d}_{\mathrm{B}}\right\|} = 1$	$\dfrac{\vec{d}_{\mathrm{A}} \cdot \vec{d}_{\mathrm{B}}}{\left\|\vec{d}_{\mathrm{A}}\right\| \left\|\vec{d}_{\mathrm{B}}\right\|} = -1$	$\dfrac{\vec{d}_{\mathrm{A}} \cdot \vec{d}_{\mathrm{B}}}{\left\|\vec{d}_{\mathrm{A}}\right\| \left\|\vec{d}_{\mathrm{B}}\right\|} \neq 1$
$\vec{E} = 0$	$\vec{E} = k\dfrac{Q}{r^2}\hat{r}$ (charge ponctuelle)	$\vec{E} = \dfrac{k\,Q}{\left\|\vec{d}_{\mathrm{A}}\right\| \left\|\vec{d}_{\mathrm{B}}\right\|}\hat{d}$	$\vec{E} = 0$	$\vec{E} = \text{non défini}$ (formule non applicable)

Preuve :

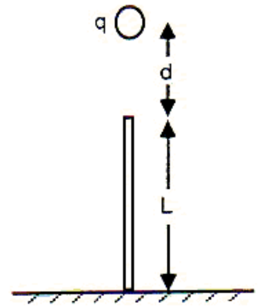
En construction …

Exercice

Note Science Santé – Chapitre 1 – Question 20

Une très petite sphère de masse *m* et de charge *q* lévite à une distance *d* au-dessus d'une tige isolante verticale de longueur *L* chargée uniformément. Montrez que la densité de charge de la tige, λ est donnée par :

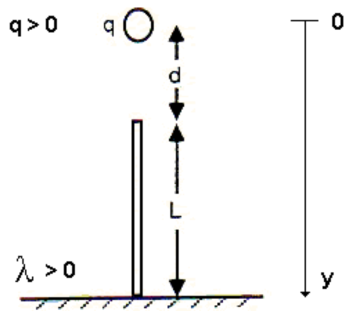
$$\lambda = \frac{mgd(d+L)}{kqL}$$



Solution

Note Science Santé – Chapitre 1 – Question 20 – Solution

Évaluer le champ $\vec{E}$ à $y = 0$ selon un système d'axe *y* positif vers le bas : ($\hat{r} = -\vec{j}$)



$$\vec{E} = \int k \frac{\mathrm{d}Q}{r^2}\hat{r}$$

$$= \int k \frac{\mathrm{d}Q}{r^2}\left(-\vec{j}\right)$$

Avec : $\mathrm{d}Q = \lambda\,\mathrm{d}y$ et $r = y$

$$\vec{E} = \int_{y=d}^{d+L} -k\frac{\lambda\,\mathrm{d}y}{y^2}\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -k\lambda\int_{y=d}^{d+L}\frac{\mathrm{d}y}{y^2}\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -k\lambda\left[-\frac{1}{y}\right]_d^{d+L}\vec{j}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = -k\lambda\left(-\frac{1}{d+L} - -\frac{1}{d}\right)\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{E} = -k\lambda\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+L}\right)\vec{j}}$$

Pour faire léviter la sphère, nous devons satisfaire $\sum \vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_\mathrm{e} = 0$. Ainsi, nous obtenons la densité de charge sur la tige suivante :

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_\mathrm{e} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(mg\,\vec{j}\right) + \left(-k\lambda q\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+L}\right)\vec{j}\right) = 0 \qquad \left(\vec{F}_\mathrm{e} = -k\lambda q\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+L}\right)\vec{j}\right)$$

$$\Rightarrow \quad mg\;\vec{j} = k\lambda q\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+L}\right)\;\vec{j} \quad \Rightarrow \quad mg = k\lambda q\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+L}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{mg}{kq}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+L}\right)^{-1} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{mg}{kq}\left(\frac{L}{d(d+L)}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\lambda = \frac{mgd(d+L)}{kqL}}$$