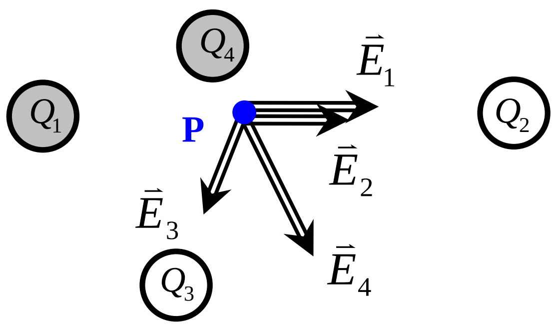
Chapitre 1.5a – Le champ électrique généré par plusieurs particules

Le champ électrique généré par plusieurs charges fixes

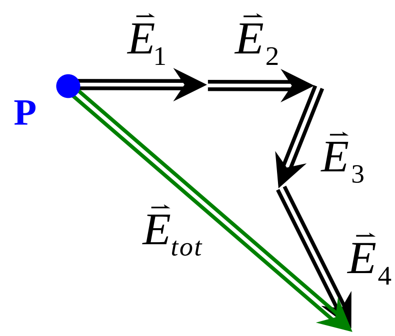
Le module de champ électrique E d'une charge ponctuelle est radial, proportionnel à la charge électrique Q et inversement proportionnel au carré de la distance r entre la charge électrique et l'endroit P où l'on évalue le champ électrique. Lorsqu'il y a plusieurs charges électriques dans l'espace, le **champ électrique total** à un endroit P de l'espace sera **l'addition vectorielle** de chaque champ électrique généré par chaque charge électrique à ce même point P.

<u>Exemple :</u>

Champ électrique total au point **P** provenant de 4 charges ponctuelles.



Sommation graphique du champ électrique total $\vec{E}_{tot}$ au point **P**.

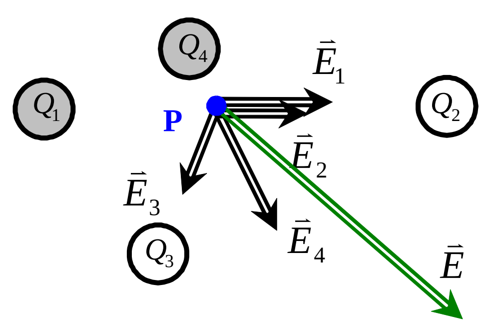


Techniques pour évaluer le champ électrique de plusieurs charges

Pour évaluer le champ électrique $\vec{E}$ en un endroit de l'espace, nous pouvons avoir recours au deux techniques :

<u>La sommation discrète</u>

La sommation discrète consiste à identifier dans l'espace toutes les charges électriques ponctuelles et toutes les sphères uniformément chargées, d'évaluer individuellement le champ électrique qu'elles génèrent à un endroit **P** de l'espace et finalement additionner le champ électrique total au point **P**.



Mathématiquement, la sommation discrète du champ électrique peut être évaluée grâce à l'équation suivante :

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i = \sum_{i=1}^{N} k \frac{Q_i}{r_i^{\,2}} \hat{r}_i$$

où $\vec{E}$: Champ électrique total (N/C)

$\vec{E}_i$: Champ électrique produit par la charge électrique Q_i (N/C)

Q_i : Charge ponctuelle #*i* qui génère le champ électrique $\vec{E}_i$ (C)

r_i : Distance entre la charge Q_i et le point **P** (m)

k : Constante de la loi de Coulomb ($9{,}00 \times 10^9 \;\mathrm{N \cdot m^2/C^2}$)

$\hat{r}_i$: Vecteur unitaire orientation de Q_i (source) vers le point **P** (cible)

N : Le nombre de charge ponctuelle

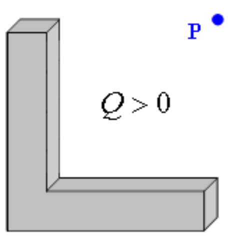
i : Indice de la charge ponctuelle ($i = 1..N$)

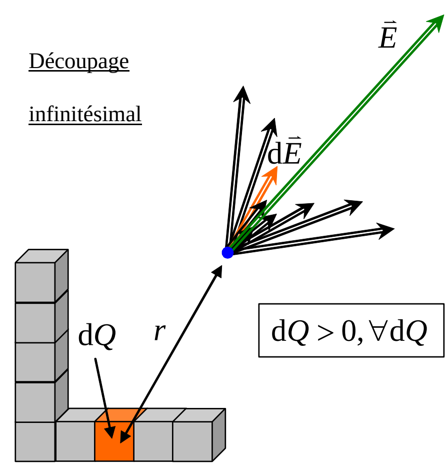
Quand utiliser cette technique ?	Lorsque les charges sont ponctuelles.
Avantage de cette technique ?	Champ électrique individuel $\vec{E}_i$ facile à évaluer.
Désavantage à cette technique ?	C'est long ! Il y a autant de terme à calculer ($\hat{r}_i, r_i$) qu'il y a de charges électriques.

La sommation continue[1]

La sommation continue consiste à découper une distribution de charge quelconque en regroupement de charge infinitésimale afin que chaque regroupement génère un champ électrique comme une charge ponctuelle et d'additionner le champ électrique total.

Exemple : Une tige en forme de « L » chargée positivement et uniformément que l'on a découpée en cube infinitésimal.

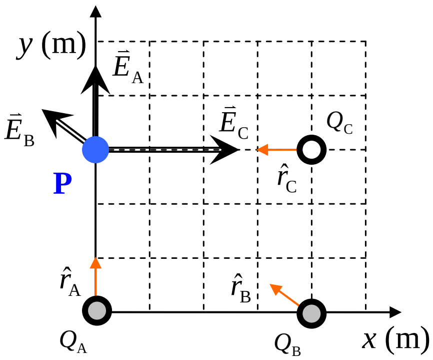


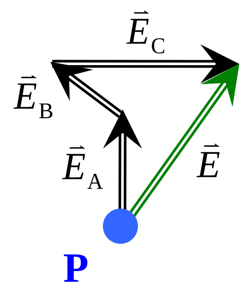


[1] Cette technique sera présentée avec beaucoup plus de détail dans les sections 1.8 et 1.10.

Situation 3 : ***Une superposition en deux dimensions*****.** Dans un plan *xy*, on fixe une particule **A** de 1 µC à l'origine, une particule **B** de 2 µC en (x = 4 m , y = 0) et une particule **C** de -3 µC en (x = 4 m, y = 3 m). On désire calculer la force électrique qui agit sur une particule **D** de -4 µC en (x = 0, y = 3 m).

Voici la représentation graphique du champ électrique $\vec{E}$ généré à la coordonnée **P** (x = 0, y = 3 m) où est située la particule **D** :





Évaluons individuellement le champ électrique généré par nos trois particules A, B et C au point **P** :

Particule A :

- Charge : $Q_A = 1\times10^{-6}\,\mathrm{C}$ (Voir énoncé)
- Distance : $r_A = 3\ \mathrm{m}$ (Mesure sur le schéma)
- Orientation : $\hat{r}_A = \vec{j}$ (Voir schéma)

Champ électrique de la particule A :

$$\vec{E}_A = k\frac{Q_A}{r_A^{\,2}}\hat{r}_A \quad\Rightarrow\quad \vec{E}_A = \left(9\times10^9\right)\frac{\left(1\times10^{-6}\right)}{(3)^2}\left(\vec{j}\right) \qquad \text{(Remplacer valeurs num.)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{E}_A = 1000\ \vec{j}\ \mathrm{N/C}} \qquad \text{(Évaluer } \vec{E}_A\text{)}$$

Particule C :

- Charge : $Q_C = -3\times10^{-6}\,\mathrm{C}$ (Voir énoncé)
- Distance : $r_C = 4\ \mathrm{m}$ (Mesure sur le schéma)
- Orientation : $\hat{r}_C = -\vec{i}$ (Voir schéma)

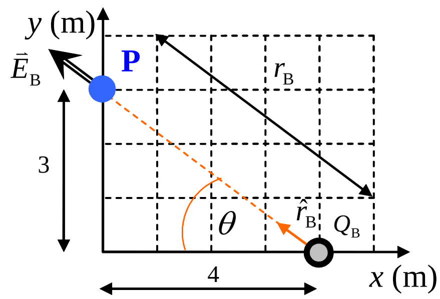
Champ électrique de la particule C :

$$\vec{E}_C = k\frac{Q_C}{r_C^{\,2}}\hat{r}_C \quad\Rightarrow\quad \vec{E}_C = \left(9\times10^9\right)\frac{\left(-3\times10^{-6}\right)}{(4)^2}\left(-\vec{i}\right) \qquad \text{(Remplacer valeurs num.)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{E}_C = 1688\ \vec{i}\ \mathrm{N/C}} \qquad \text{(Évaluer } \vec{E}_C\text{)}$$

Particule B :

- Charge : $Q_B = 2 \times 10^{-6}\,\text{C}$ (Voir énoncé)
- Distance : $r_B = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5\ \text{m}$ (Pythagore, voir schéma)



Angle d'orientation :

- $\tan(\theta) = \dfrac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \tan(\theta) = \dfrac{3}{4}$

$\Rightarrow \quad \boxed{\theta = 36{,}87°}$

Orientation :

- $\hat{r}_B = -\cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \hat{r}_B = -\cos(36{,}87°)\vec{i} + \sin(36{,}87°)\vec{j}$ (Remplacer valeurs num.)

$\Rightarrow \quad \boxed{\hat{r}_B = -0{,}8\vec{i} + 0{,}6\vec{j}}$ (Évaluer $\hat{r}_B$)

Champ électrique de la particule B :

$\vec{E}_B = k\dfrac{Q_B}{r_B^{\,2}}\hat{r}_B \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_B = \left(9\times10^9\right)\dfrac{\left(2\times10^{-6}\right)}{(5)^2}\left(-0{,}8\vec{i} + 0{,}6\vec{j}\right)$ (Remplacer valeurs num.)

$\Rightarrow \quad \vec{E}_B = 720\left(-0{,}8\vec{i} + 0{,}6\vec{j}\right)$ (Évaluer $E_B = 720\ \text{N/C}$)

$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{E}_B = \left(-576\vec{i} + 432\vec{j}\right)\text{N/C}}$ (Évaluer $\vec{E}_B$)

Évaluons le champ électrique total :

$\vec{E} = \sum \vec{E}_i \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C$ (Remplacer A,B et C)

$\Rightarrow \quad \vec{E} = \left(1000\vec{j}\right) + \left(-576\vec{i} + 432\vec{j}\right) + \left(1688\vec{i}\right)$ (Remplacer valeurs num.)

$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{E} = \left(1112\vec{i} + 1432\vec{j}\right)\text{N/C}}$ (Évaluer $\vec{E}$)

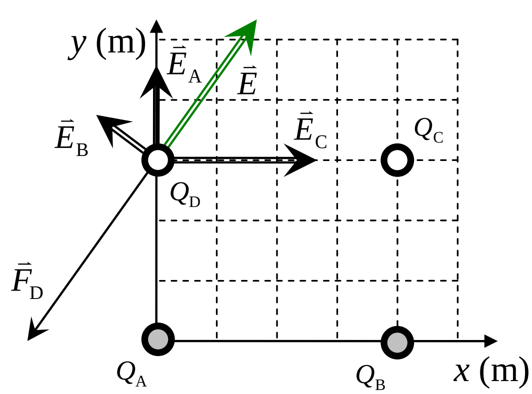
Évaluons la force appliquée sur la particule D située à la coordonnée **P** : ($q_D = -4\times10^{-6}\,\text{C}$)

$\vec{F} = q\vec{E}$

$\Rightarrow \quad \vec{F}_D = q_D\vec{E}$

$\Rightarrow \quad \vec{F}_D = \left(-4\times10^{-6}\right)\left(1112\vec{i} + 1432\vec{j}\right)$

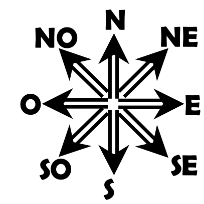
$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{F}_D = \left(-4{,}448\vec{i} - 5{,}728\vec{j}\right)\times10^{-4}\,\text{N}}$



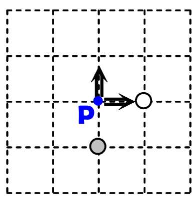
et $F_D = \sqrt{(-4{,}448)^2 + (-5{,}728)^2}\times10^{-4}$

$= 7{,}252\times10^{-4}\,\text{N}$

Situation 4 : ***L'orientation du champ résultant.*** Sur chacun des schémas qui suivent, on a indiqué la position de particules positives (ronds pleins : ●) et de particules négatives (ronds creux : ○) *Toutes les particules ont la même charge en valeur absolue.* Pour chaque situation, on désire déterminer l'orientation du champ électrique résultant au point P situé au centre de la grille. (On désire exprimer la réponse à l'aide des orientations cardinales indiquées ci-contre.)

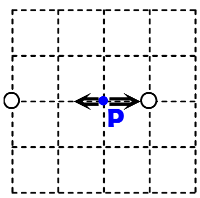


(a)



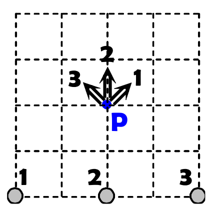
Au point P, la charge négative (rond creux) génère un champ orienté vers elle, donc vers l'est (E); la charge positive (rond plein) génère un champ qui s'éloigne d'elle, donc vers le nord (N). Par conséquent, le champ résultant est orienté vers le nord-est : **NE**.

(b)



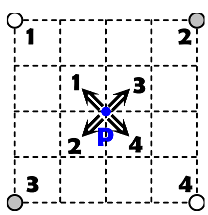
La charge de gauche génère un champ orienté vers elle, donc vers l'ouest; la charge de droite génère un champ orienté vers elle, donc vers l'est. Comme la charge de droite est la plus rapprochée du point P, le champ qu'elle génère est plus grand. Ainsi, le champ résultant est orienté vers l'est : **E**.

(c)



La charge 1 génère un champ orienté NE; la charge 2 génère un champ orienté N; la charge 3 génère un champ orienté NO. Les composantes des champs 1 et 3 selon la direction est-ouest s'annulent. Par conséquent, le champ résultant au point P est orienté vers le nord : **N**.

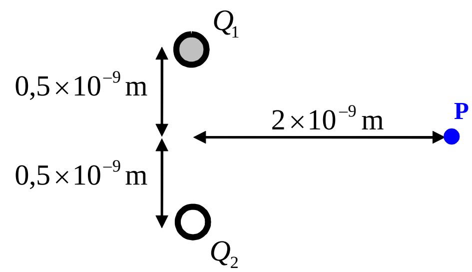
(d)



Les charges négatives 1 et 4 génèrent des champs orientés vers elles; les charges positives 2 et 3 génèrent des champs qui s'éloignent » d'elles. Par symétrie, le champ électrique au point P est nul : ainsi, il ne possède pas d'orientation!

Exercice

Exercice A : *Un dipôle électrique*. Un dipôle est un groupe de deux charges de même module mais de signes contraires séparées par une petite distance. Considérons un dipôle de charges $Q_1 = 4{,}8\times10^{-19}\,\mathrm{C}$ et $Q_2 = -4{,}8\times10^{-19}\,\mathrm{C}$ séparées verticalement par une distance de $0{,}5\times10^{-9}\,\mathrm{m}$ (voir schéma ci-dessous). On désire **(a)** évaluer le champ résultant au point P, **(b)** la force électrique sur un proton placé en P, **(c)** la force électrique sur un électron placé en P. **(d)** Où doit-on placer une 3ième charge ***e*** pour annuler le champ au point P. **(e)** Reprenez **(c)** avec une charge de **–*e***.



Solution

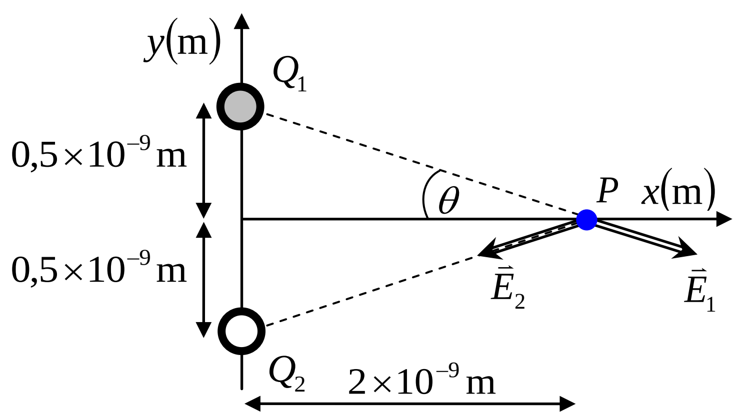
Exercice A : *Un dipôle électrique*.

Représentons graphiquement les vecteurs à évaluer :

$Q_1 = 4{,}8\times10^{-19}\,\mathrm{C}$

et

$Q_2 = -4{,}8\times10^{-19}\,\mathrm{C}$



Voici nos données et nos mesures : ($r^2 = r_1^{\,2} = r_2^{\,2}$)

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad\Rightarrow\quad r^2 = \left(0{,}5\times10^{-9}\right)^2 + \left(2\times10^{-9}\right)^2$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{r^2 = 4{,}25\times10^{-18}\ \mathrm{m}^2}$$

$$\tan(\theta) = \frac{y}{x} \quad\Rightarrow\quad \tan(\theta) = \frac{\left(0{,}5\times10^{-9}\right)}{\left(2\times10^{-9}\right)}$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\theta = 14{,}04^\circ}$$

Évaluons le module du champ électrique produit par chacune des charges :

$$E = k\frac{Q}{r^2} \quad \Rightarrow \quad E_1 = k\frac{Q_1}{r_1^2} = \left(9\times10^9\right)\frac{\left(4{,}8\times10^{-19}\right)}{\left(4{,}25\times10^{-18}\right)} \qquad \text{(Remplacer val. num.)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E_1 = 1{,}02\times10^9 \text{ N/C}}$$

$$\text{et} \quad \boxed{E_2 = E_1 = 1{,}02\times10^9 \text{ N/C}} \qquad \text{(car } r_1 = r_2 \text{ , } |Q_1| = |Q_2|\text{)}$$

Reconstruisons nos vecteurs $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ à l'aide du module et le l'angle $\theta = 14{,}04°$:

$$\vec{E} = E\cos(\theta)\vec{i} + E\sin(\theta)\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_1 = E_1\cos(\theta)\vec{i} - E_1\sin(\theta)\vec{j} \qquad \text{(Respect schéma)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{E}_1 = \left(0{,}9895\times10^9\,\vec{i} - 0{,}2475\times10^9\,\vec{j}\right)\text{N/C}} \qquad \text{(Remplacer et calcul)}$$

$$\text{et} \quad \vec{E}_2 = -E_2\cos(\theta)\vec{i} - E_2\sin(\theta)\vec{j} \qquad \text{(Respect schéma)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{E}_2 = \left(-0{,}9895\times10^9\,\vec{i} - 0{,}2475\times10^9\,\vec{j}\right)\text{N/C}} \qquad \text{(Remplacer et calcul)}$$

Évaluons le champ électrique total :

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{E} = -0{,}495\times10^9\,\vec{j} \text{ N/C}} \qquad \textbf{(a)}$$

Un proton possède une charge de $e = 1{,}6\times10^{-19}$ C. Voici la force appliquée sur celui-ci au point P :

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = \left(1{,}6\times10^{-19}\right)\left(-0{,}495\times10^9\,\vec{j}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{F} = -7{,}92\times10^{-11}\,\vec{j} \text{ N}} \qquad \textbf{(b)}$$

Un électron possède une charge $-e = -1{,}6\times10^{-19}$ C. Voici la force appliquée sur celui-ci au point P :

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = \left(-1{,}6\times10^{-19}\right)\left(-0{,}495\times10^9\,\vec{j}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{F} = 7{,}92\times10^{-11}\,\vec{j} \text{ N}} \qquad \textbf{(c)}$$

Pour avoir un champ électrique nul au point P, il faut ajouter une charge Q_3 qui produira un champ électrique $\vec{E}_3$ et satisfaire l'équation suivante :

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_{\text{résultant}} + \vec{E}_3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{E}_3 = -\vec{E}_{\text{résultant}} = 0{,}495\times10^9\,\vec{j} \text{ N/C}}$$

Appliquons la loi de Coulomb au champ électrique $\vec{E}_3$ et calculons la position de la charge :

$$\vec{E}_3 = k\frac{Q_3}{r_3^{\,2}}\hat{r}_3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k\frac{Q_3}{r_3^{\,2}}\hat{r}_3 = 0{,}495\times10^9\,\vec{j}}$$

Nous remarquons que :

$\hat{r}_3 = \pm\vec{j}$ $\quad\Rightarrow\quad$ Q_3 est sous le point P ou au-dessus du point P.

Évaluons la distance entre la charge Q_3 et le point P sachant que la charge est égale à $|Q_3| = 1{,}6\times10^{-19}\,\text{C}$. Utilisons le module du champ électrique E_3 :

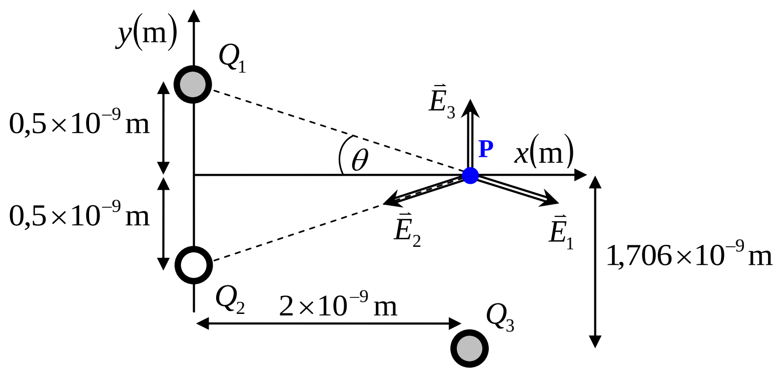
$$E_3 = k\frac{Q_3}{r_3^{\,2}} = 0{,}495\times10^9 \quad \Rightarrow \quad r_3^{\,2} = k\frac{Q_3}{0{,}495\times10^9}$$

$$\Rightarrow \quad r_3^{\,2} = \left(9\times10^9\right)\frac{\left(1{,}6\times10^{-19}\right)}{0{,}495\times10^9}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{r_3 = 1{,}706\times10^{-9}\ \text{m}}$$

(d) $\quad Q_3 = 1{,}6\times10^{-19}\,\text{C}$

Puisque la charge est positive, le champ électrique point vers l'extérieur de la charge. Puisque le champ électrique au point P point vers le haut ($\vec{E}_3 = 0{,}5\times10^9\,\vec{j}$), il faut que la charge soit placée sous le point P à une distance de $1{,}706\times10^{-9}$ m.



(e) $\quad Q_3 = -1{,}6\times10^{-19}\,\text{C}$

Puisque la charge est négative, le champ électrique point vers l'intérieur de la charge. Puisque le champ électrique au point P point vers le haut ($\vec{E}_3 = 0{,}5\times10^9\,\vec{j}$), il faut que la charge soit placée au-dessus du point P à une distance de $1{,}706\times10^{-9}$ m.