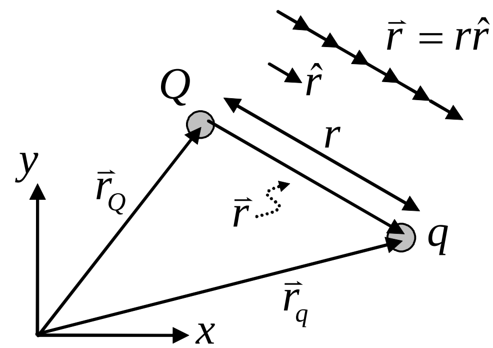
Chapitre 1.4 – Le champ électrique généré par une particule chargée

Le vecteur orientation $\hat{r}$

Lorsqu'on utilise le vecteur orientation $\hat{r}$ pour représenter un concept physique, il est important de ne pas confondre ce vecteur avec la notion de déplacement $\vec{r}$ et de distance r. Cependant, toutes ces notions sont reliées mathématiquement par les équations suivantes :

Vecteur déplacement		La distance	Vecteur orientation
$\vec{r} = \vec{r}_q - \vec{r}_Q$	$\vec{r} = r\,\hat{r}$	$r = \lVert \vec{r} \rVert$	$\hat{r} = \dfrac{\vec{r}}{r}$

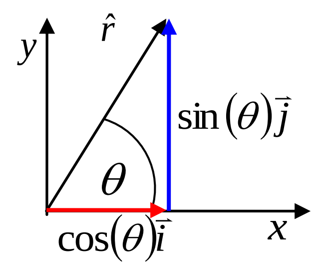


où $\hat{r}$: Vecteur unitaire orientation.
$\vec{r}$: Vecteur déplacement entre deux points.
r : Distance entre deux points ($r = |\vec{r}|$)

Dans un système d'axe xy, le vecteur unitaire $\hat{r}$ peut être décomposé de la façon suivante :

$$\hat{r} = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}$$

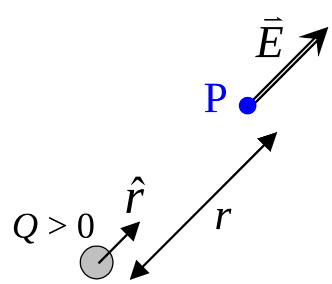
où θ est l'angle entre le vecteur $\hat{r}$ et l'axe x.



Le champ électrostatique généré par une charge ponctuelle

À partir de la loi de Coulomb en électrostatique et de la définition du champ électrique, nous pouvons définir de la façon suivante le champ électrique $\vec{E}$ généré par une charge ponctuelle Q immobile[1] à un point **P** de l'espace :

$$\vec{E} = k\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$

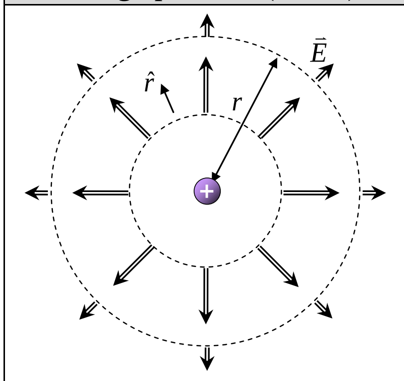
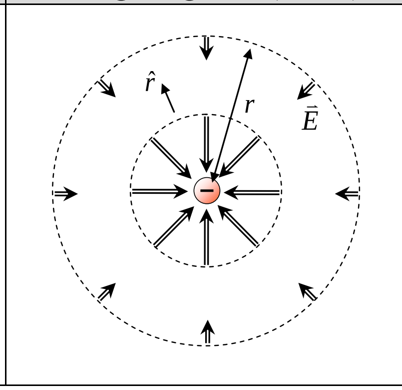
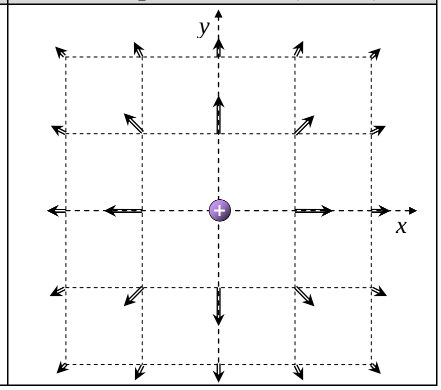


où $\vec{E}$: Champ électrique (N/C)
Q : Charge ponctuelle qui génère le champ électrique (C)
r : Distance entre la charge Q et le point **P**(m)
k : Constante de la loi de Coulomb, $k = 9{,}00\times10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2}$
$\hat{r}$: Vecteur unitaire orientation de Q (source) vers le point **P** (cible)

Lorsque la charge Q est en mouvement, la forme du champ électrique est plus complexe. La forme dépend de la vitesse et de l'accélération des charges.

Voici quelques caractéristiques du champ électrique $\vec{E}$ généré par une charge ponctuelle q :

- Forme sphérique (champ radial)
- Possède 2 orientations (extérieure (+) et intérieure (-))
- Module du champ diminue en $1/r^2$

Charge positive ($Q > 0$)	Charge négative ($Q < 0$)	Champ Vectoriel ($Q > 0$)
		

<u>Preuve :</u>

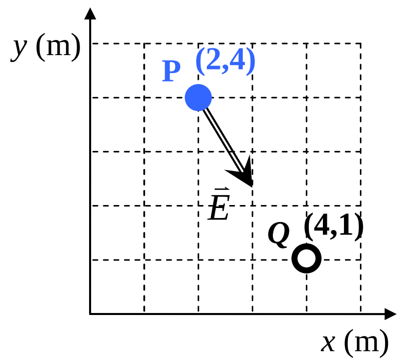
À partir de la définition de champ électrique, le terme de champ électrique lorsque la force électrique s'applique entre deux charges ponctuelles :

$$\vec{F}_e = q\vec{E} \quad \Rightarrow \quad \left(k\frac{qQ}{r^2}\hat{r}\right) = q\vec{E}$$ (Remplacer la loi de Coulomb vectorielle)

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = k\frac{Q}{r^2}\hat{r} \quad \blacksquare$$ (Simplifier la charge q qui subit la force)

Situation A : ***Le champ électrique vectoriel d'une particule.*** On désire évaluer le champ électrique au point **P (2,4)** produit par une particule Q de $-4\times10^{-6}\,\mathrm{C}$ située à la coordonnée (4,1).

Voici une représentation graphique de la situation dans un plan cartésien xy :



Nous avons les informations suivantes selon la géométrie du problème :

- La charge qui produit le champ :

$$Q=-4\times10^{-6}\,\mathrm{C}$$

- La position de la charge qui produit le champ :

$$\vec{r}_{\text{source}}=\left(4\vec{i}+\vec{j}\right)\mathrm{m}$$

- La position où l'on veut évaluer le champ :

$$\vec{r}_{\text{cible}}=\left(2\vec{i}+4\vec{j}\right)\mathrm{m}$$

- Vecteur déplacement de la source à la cible :

$$\vec{r}=\vec{r}_{\text{cible}}-\vec{r}_{\text{source}} \quad\Rightarrow\quad \vec{r}=\left(2\vec{i}+4\vec{j}\right)-\left(4\vec{i}+\vec{j}\right) \quad\Rightarrow\quad \boxed{\vec{r}=\left(-2\vec{i}+3\vec{j}\right)\mathrm{m}}$$

- La distance entre la source et la cible :

$$r=\|\vec{r}\|=\sqrt{r_x^{\,2}+r_y^{\,2}} \quad\Rightarrow\quad r=\sqrt{(-2)^2+(3)^2} \quad\Rightarrow\quad \boxed{r=\sqrt{13}\ \mathrm{m}}$$

- Orientation du champ électrique :

$$\hat{r}=\frac{\vec{r}}{r} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\hat{r}=\frac{-2\vec{i}+3\vec{j}}{\sqrt{13}}}$$

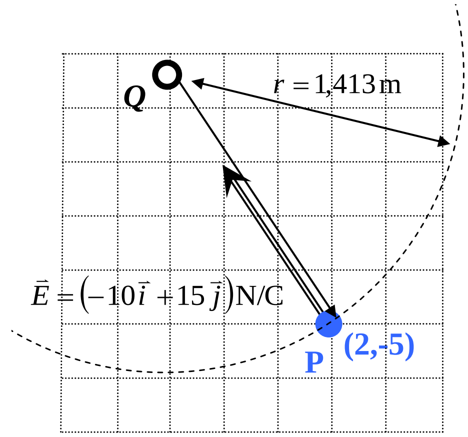
Nous avons ainsi le champ électrique suivant au point **P** produit par la charge Q :

$$\vec{E}=k\frac{Q}{r^2}\hat{r} \quad\Rightarrow\quad \vec{E}=\left(9\times10^9\right)\frac{\left(-4\times10^{-6}\right)}{\left(\sqrt{13}\right)^2}\left(\frac{-2\vec{i}+3\vec{j}}{\sqrt{13}}\right)$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\vec{E}=\left(1{,}54\ \vec{i}-2{,}30\ \vec{j}\right)\times10^3\ \mathrm{N/C}}$$

Situation B : *Où est située la charge ponctuelle.* À la coordonnée **P** (x = 2 m, y = -5 m) d'un système d'axe xy, on mesure un champ électrique $\vec{E} = \left(-10\,\vec{i} + 15\,\vec{j}\right)\times 10^3$ N/C généré par une particule de charge Q = -4 μC. Évaluez la position $\vec{r}_Q$ de la particule.

Évaluons la distance r entre la charge Q et le point **P** à l'aide du module du champ électrique généré par une charge ponctuelle :



Quadrillage de 5 N/C

$$E = k\frac{|Q|}{r^2} \quad\Rightarrow\quad \sqrt{E_x^{\ 2} + E_y^{\ 2}} = k\frac{|Q|}{r^2}$$

$$\Rightarrow\quad \sqrt{(-10)^2 + (15)^2}\times 10^3 = \left(9\times 10^9\right)\frac{\left|\left(-4\times 10^{-6}\right)\right|}{r^2}$$

$$\Rightarrow\quad 18{,}03\times 10^3 = \frac{36\ 000}{r^2}$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{r = 1{,}413\ \text{m}}$$

Évaluons la distance selon l'axe x et y entre la charge Q et le point **P** à l'aide de la définition vectorielle du champ électrique généré par une charge ponctuelle :

$$\vec{E} = k\frac{Q}{r^2}\hat{r} \quad\Rightarrow\quad \vec{E} = k\frac{Q}{r^3}\vec{r} \qquad \left(\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}\right)$$

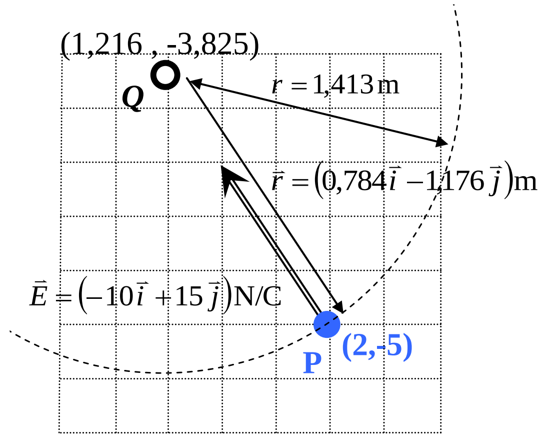
$$\Rightarrow\quad \left(E_x\vec{i} + E_y\vec{j}\right) = k\frac{Q}{r^3}\left(r_x\vec{i} + r_y\vec{j}\right) \qquad \left(\vec{r} = r_x\vec{i} + r_y\vec{j}\right)$$

$$\Rightarrow\quad E_x = k\frac{Q}{r^3}r_x \quad \text{et} \quad E_y = k\frac{Q}{r^3}r_y \qquad \text{(Séparer termes vectoriels)}$$

- En x : $\left(-10\times 10^3\right) = \left(9\times 10^9\right)\dfrac{\left(-4\times 10^{-6}\right)}{(1{,}413)^3}r_x \quad\Rightarrow\quad \boxed{r_x = 0{,}78365\ \text{m}}$
- En y : $\left(15\times 10^3\right) = \left(9\times 10^9\right)\dfrac{\left(-4\times 10^{-6}\right)}{(1{,}413)^3}r_y \quad\Rightarrow\quad \boxed{r_y = -1{,}1755\ \text{m}}$

Ceci nous donne le vecteur déplacement $\vec{r}$ de la source du champ électrique (la charge Q) à la coordonnée **P** où le champ électrique est évalué comme étant

$$\vec{r} = \left(0{,}78365\,\vec{i} - 1{,}1755\,\vec{j}\right)\text{m}$$



Quadrillage de 5 N/C

Nous pouvons évaluer la position de la charge Q à l'aide du vecteur déplacement $\vec{r}$:

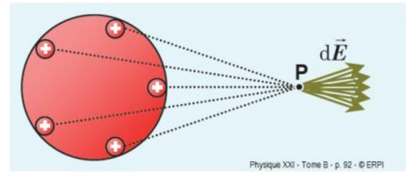
$$\vec{r} = \vec{r}_P - \vec{r}_Q \quad\Rightarrow\quad \vec{r}_Q = \vec{r}_P - \vec{r}$$

$$\Rightarrow\quad \vec{r}_Q = \left(2\,\vec{i} - 5\,\vec{j}\right) - \left(0{,}78365\,\vec{i} - 1{,}1755\,\vec{j}\right)$$

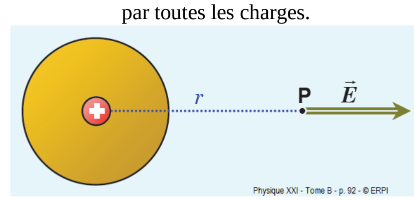
$$\Rightarrow\quad \boxed{\vec{r}_Q = \left(1{,}216\,\vec{i} - 3{,}825\,\vec{j}\right)\ \text{m}}$$

Le champ électrique généré par une coquille sphérique uniformément chargée

Le champ électrique E généré par une coquille sphérique uniformément chargée de charge totale Q_{tot} est équivalent au champ électrique généré par une charge ponctuelle unique Q_{tot} située au centre de la sphère. Le module champ diminue en fonction du carré de la distance r et est nul à l'intérieur de la sphère :



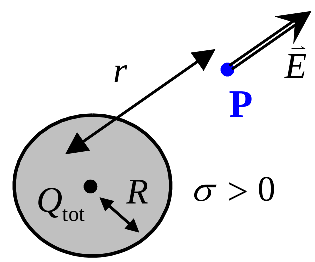
Le champ électrique total au point P correspond à la superposition linéaire des champs générés par toutes les charges.



Le champ électrique au point P est équivalent à celui généré par une seule particule regroupant l'ensemble de la charge au centre de la sphère.

À l'extérieur de la sphère :	À l'intérieur de la sphère :
$(r > R)$	$(r < R)$
$E = k\dfrac{\lvert Q_{tot}\rvert}{r^2}$	$E = 0$

où E : Module du champ E généré au point **P** (N/C)
Q_{tot} : La charge totale sur la sphère, $Q_{tot} = \sigma A$ (C)
r : Distance entre le centre de la sphère et le point **P** (m)
σ : La densité de charge surfacique (C/m^2)
A : Aire de la sphère, $A = 4\pi R^2$ (m^2)
R : Rayon de la sphère (m)
k : Constante de la loi de Coulomb, $k = 9{,}00\times 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2}$



Preuve :

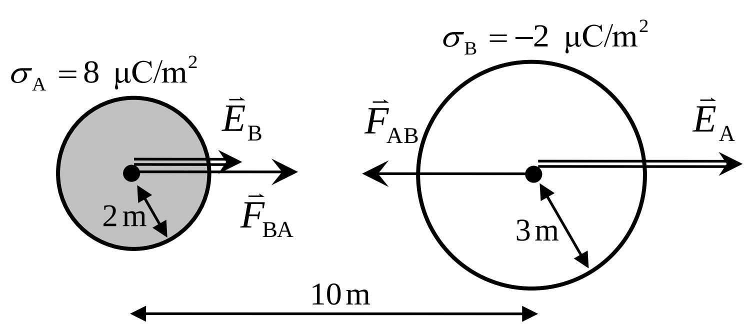
La preuve sera présentée dans la section 1.10 en raison de la nécessité d'une technique de calcul plus complexe.

Situation C : ***Deux sphères chargées.*** Une sphère A de 2 m de rayon possède une densité de charge surfacique de 8 μC/m^2 et une sphère B de 3 m de rayon possède une densité de charge surfacique de -2 μC/m^2. Les deux sphères sont séparées par 10 m par rapport à leur centre. Quel est le module de la force électrique appliquée sur les sphères?

Voici la représentation graphique de la situation :

Remarque :

- $\lvert\vec{F}_{AB}\rvert = \lvert\vec{F}_{BA}\rvert$ par action-réaction.
- $\lvert\vec{E}_A\rvert \neq \lvert\vec{E}_B\rvert$ car la charge totale sur chaque sphère n'est pas identique ($\lvert Q_A\rvert > \lvert Q_B\rvert$).



Évaluons l'expression de la charge totale sur chaque sphère :

$$Q = \sigma A \quad \Rightarrow \quad Q = \sigma\left(4\pi R^2\right) \qquad \text{(Aire d'une sphère, } A = 4\pi R^2\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{Q = 4\pi\sigma R^2} \qquad \text{(Réécriture)}$$

Évaluons la charge totale sur chaque sphère :

$$Q_{\mathrm{A}} = 4\pi\sigma_{\mathrm{A}} R_{\mathrm{A}}^{\;2} \quad \Rightarrow \quad Q_{\mathrm{A}} = 4\pi\left(8\times10^{-6}\right)(2)^2 \qquad \text{(Remplacer valeur numérique)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{Q_{\mathrm{A}} = 4{,}021\times10^{-4}\,\mathrm{C}} \qquad \text{(Évaluer } Q_{\mathrm{A}}\text{)}$$

$$Q_{\mathrm{B}} = 4\pi\sigma_{\mathrm{B}} R_{\mathrm{B}}^{\;2} \quad \Rightarrow \quad Q_{\mathrm{B}} = 4\pi\left(-2\times10^{-6}\right)(3)^2 \qquad \text{(Remplacer valeur numérique)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{Q_{\mathrm{B}} = -2{,}262\times10^{-4}\,\mathrm{C}} \qquad \text{(Évaluer } Q_{\mathrm{B}}\text{)}$$

Évaluons le champ électrique produit par la sphère B au centre de la sphère A :

$$E = k\frac{\left|Q_{\mathrm{tot}}\right|}{r^2} \quad \Rightarrow \quad E_{\mathrm{B}} = k\frac{\left|\left(Q_{\mathrm{B}}\right)\right|}{\left(r_{\mathrm{BA}}\right)^2} \qquad \text{(Appliquer à la sphère B)}$$

$$\Rightarrow \quad E_{\mathrm{B}} = \left(9\times10^9\right)\frac{\left|\left(-2{,}262\times10^{-4}\right)\right|}{(10)^2} \qquad \text{(Remplacer valeur numérique)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E_{\mathrm{B}} = 2{,}036\times10^4\,\mathrm{N/C}} \qquad \text{(Évaluer } E_{\mathrm{B}}\text{)}$$

Évaluons la force électrique appliquée entre les deux sphères à partir du champ électrique E_{B} et de l'expression de la force électrique appliquée sur la sphère A :

$$F_{\mathrm{e}} = |q|E \quad \Rightarrow \quad F_{\mathrm{e}} = \left|Q_{\mathrm{A}}\right|\left(E_{\mathrm{B}}\right) \qquad \text{(Appliquer à la sphère A)}$$

$$\Rightarrow \quad F_{\mathrm{e}} = \left|4{,}021\times10^{-4}\right|\left(2{,}036\times10^4\right) \qquad \text{(Remplacer valeur numérique)}$$

$$\Rightarrow \quad F_{\mathrm{e}} = 8{,}187\ \mathrm{N} \qquad \text{(Évaluer } F_{\mathrm{e}}\text{)}$$

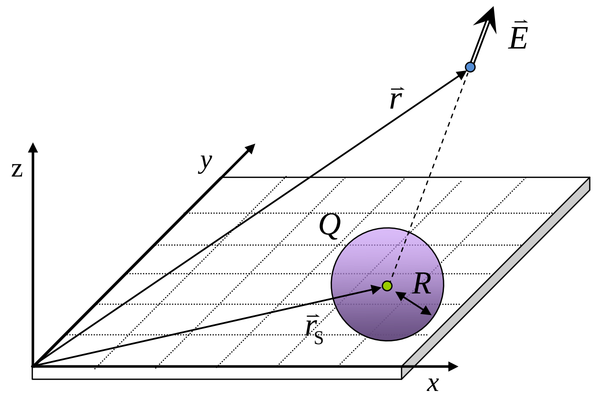
$$\Rightarrow \quad \boxed{F_{\mathrm{e}} = F_{\mathrm{AB}} = F_{\mathrm{BA}} = 8{,}187\ \mathrm{N}} \qquad \text{(Action-réaction)}$$

Le champ électrique d'une sphère uniformément chargée à l'aide des vecteurs positions (complément informatique)

À partir de la position $\vec{r}_S$ d'une sphère uniformément chargée de rayon *R*, nous pouvons évaluer le champ électrique à une position $\vec{r}$ grâce à l'équation suivante :

$$\vec{E} = \left\{ \begin{array}{ll} kQ\dfrac{\vec{R}_S}{\left\|\vec{R}_S\right\|^3} & \text{si } \left\|\vec{R}_S\right\| > R \\ 0 & \text{si } \left\|\vec{R}_S\right\| \le R \end{array} \right\}$$

où $\vec{R}_S = \vec{r} - \vec{r}_S$



où $\vec{E}$: Le champ électrique généré par la charge ponctuelle (N/C).
Q : La charge qui génère le champ (C).
$\vec{r}$: Le vecteur position où le champ électrique est évalué (m).
$\vec{r}_S$: Le vecteur position de la sphère (m).
R : Le rayon de la sphère (m).
k : Constante de la loi de Coulomb, $k = 9{,}00 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$.

<u>Preuve :</u>

En construction …