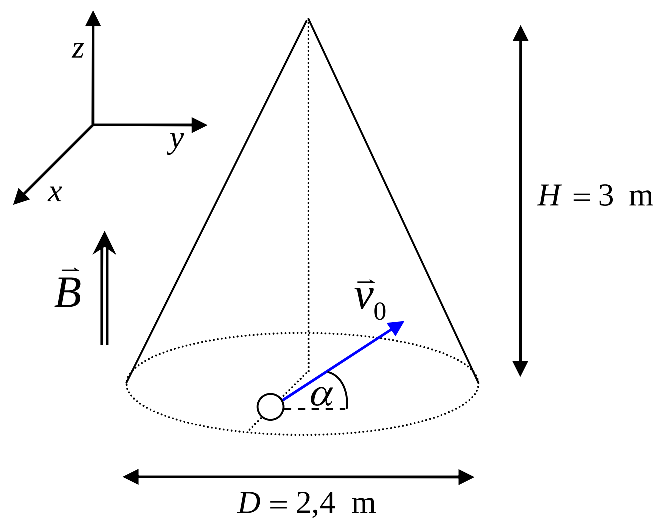
Problème de révision : Champ magnétique dans un cône

Un muon μ^- (particule élémentaire ayant une charge $-e$ et une masse de $1{,}88\times10^{-28}\ \text{kg}$) pénètre dans un cône (diamètre D = 2,4 m , hauteur H = 3 m) par la base circulaire avec une vitesse $v_0 = 2{,}2\times10^5\ \text{m/s}$ selon un angle $\alpha = 20°$ par rapport au plan de la base circulaire. Un champ magnétique $\vec{B} = 3\times10^{-4}\,\vec{k}\ \text{T}$ règne à l'intérieur du cône et il est aligné parallèlement à l'axe du cône tel qu'illustré sur le schéma ci-contre. La position d'entrée du muon est telle que le muon effectue un mouvement hélicoïdal à l'intérieur du cône centré sur l'axe du cône.



Évaluez le nombre de tours effectués ou la fraction de tour effectué par le muon dans son mouvement hélicoïdale avant d'enter en collision avec la structure du cône.

Solution : Champ magnétique dans un cône

Évaluons la vitesse du muon dans le plan de la base du cône. Cette vitesse correspond à la vitesse perpendiculaire au champ magnétique :

$$v_\perp = v_0 \cos(\alpha) \quad \Rightarrow \quad v_\perp = \left(2{,}2\times10^5\right)\cos(20°)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_\perp = 2{,}067\times10^5\ \text{m/s}}$$

Évaluons l'expression du rayon de la trajectoire circulaire du mouvement hélicoïdale à partir de la force magnétique et de l'accélération centripète :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad F_\text{m} = ma_C$$

$$\Rightarrow \quad \left(q v_\perp B\right) = m\left(\frac{{v_\perp}^2}{r}\right)$$

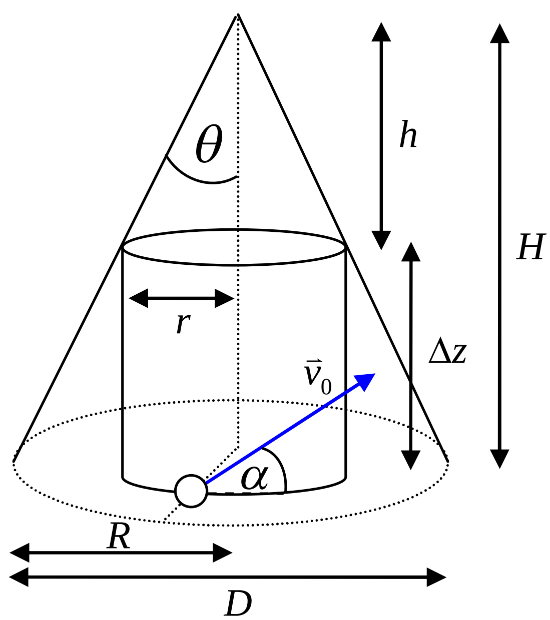
$$\Rightarrow \quad \boxed{r = \frac{mv_\perp}{qB}}$$

À partir de l'expression du rayon de la trajectoire circulaire d'une particule chargée dans un champ magnétique, évaluons le rayon de la trajectoire hélicoïdale :

$$r = \frac{mv_\perp}{qB} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{\left(1{,}88\times10^{-28}\right)\left(2{,}067\times10^5\right)}{\left(1{,}6\times10^{-19}\right)\left(3\times10^{-4}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{r = 0{,}8096\ \text{m}}$$

Évaluons l'angle θ au sommet du cône :



$$\tan(\theta) = \frac{R}{H} \quad \Rightarrow \quad \tan(\theta) = \frac{(D/2)}{H}$$

$$\Rightarrow \quad \tan(\theta) = \frac{(2{,}4)/2}{(3)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\theta = 21{,}80°}$$

Évaluons la distance h entre le sommet du cône et l'endroit où il y aura intersection du cône avec la trajectoire hélicoïdale de forme cylindrique :

$$\tan(\theta) = \frac{r}{h} \quad \Rightarrow \quad \tan(21{,}80°) = \frac{(0{,}8096)}{h}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{h = 2{,}024\ \text{m}}$$

Évaluons le déplacement le long de l'axe z correspondant à la hauteur du mouvement hélicoïdal :

$$\Delta z = H - h \quad \Rightarrow \quad \Delta z = (3) - (2{,}024)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta z = 0{,}976 \text{ m}}$$

Évaluons la vitesse du muon parallèle au champ magnétique responsable du mouvement rectiligne de l'hélicoïdale :

$$v_{//} = v_0 \sin(\alpha) \quad \Rightarrow \quad v_{//} = \left(2{,}2 \times 10^5\right)\sin(20°)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_{//} = 7{,}524 \times 10^4 \text{ m/s}}$$

Évaluons le temps requis pour effectuer le mouvement selon l'axe z :

$$\Delta z = v_{//}\Delta t \quad \Rightarrow \quad (0{,}976) = \left(7{,}524 \times 10^4\right)\Delta t$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta t = 1{,}297 \times 10^{-5} \text{ s}}$$

Évaluons le nombre de tour(s) N dans le mouvement hélicoïdal à partir de l'équation du MUA dans accélération :

$$d = v_{\perp}\Delta t \quad \Rightarrow \quad (2\pi rN) = v_{\perp}\Delta t \qquad \text{(Distance : } d = 2\pi rN\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad N = \frac{v_{\perp}\Delta t}{2\pi r} \qquad \text{(Isoler } N\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad N = \frac{\left(2{,}067 \times 10^5\right)\left(1{,}297 \times 10^{-5}\right)}{2\pi(0{,}8096)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{N = 0{,}527 \text{ tour}}$$