# Problème de révision – Bouilloire et condensateur

Une bouilloire expérimentale fournie une puissance moyenne de 2200 W lorsqu'elle est branchée à une source alternative sinusoïdale de 280 V et -280 V. On l'utilise pour chauffer 50 mL d'eau ($C_{eau} = 4186 \ \text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$) initialement à une température de 20 $^{\text{o}}$C. Au lieu d'utiliser une « source traditionnelle » pour chauffer l'eau, on utilise un condensateur de $20000 \ \mu\text{F}$ chargé à 100 V pour alimenter la bouilloire.

En supposant que l'élément chauffant de la bouilloire est ohmique et que le reste du circuit est de résistance nulle, évaluez l'augmentation de la température de l'eau après un déchargement du condensateur de 30%.

<u>Rappel :</u> La relation entre le volume de l'eau et sa masse est de $1 \ \text{mL} \leftrightarrow 1 \ \text{g}$ .

# Solution : Bouilloire et condensateur

Évaluons la résistance de la bouilloire à partir de la puissance moyenne libérée par la bouilloire et de l'électromotance de la source alternative :

$$P = \frac{(\Delta V)^2}{R} \quad \Rightarrow \quad \overline{P} = \frac{(\varepsilon_{eff})^2}{R} \qquad \text{(Puissance moyenne avec } \Delta V \to \varepsilon_{eff}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{P} = \frac{\left(\varepsilon_0 / \sqrt{2}\right)^2}{R} \qquad \text{(Électromotance efficace : } \varepsilon_{eff} = \varepsilon_0 / \sqrt{2}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{{\varepsilon_0}^2}{2\overline{P}} \qquad \text{(Isoler } R\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{(280)^2}{2(2200)} \qquad \text{(Remplacer valeurs num.)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{R = 17{,}82 \ \Omega} \qquad \text{(Évaluer } R\text{)}$$

Évaluons le temps de déchargement du condensateur. Un déchargement de 30% signifie qu'il reste 70% de la charge initiale :

$$q = q_0 e^{-t/RC} \quad \Rightarrow \quad (0{,}7\, q_0) = q_0 e^{-t/RC} \qquad \text{(Remplacer } q = 0{,}7 q_0\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad 0{,}7 = e^{-t/RC} \qquad \text{(Simplifier } q_0\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \ln(0{,}7) = -t / RC \qquad \text{(Applique ln de chaque côté)}$$

$$\Rightarrow \quad t = -RC \ln(0{,}7) \qquad \text{(Isoler } t\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad t = -(17{,}82)\left(20000 \times 10^{-6}\right)\ln(0{,}7) \qquad \text{(Replacer valeurs num.)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{t = 0{,}1271 \ s} \qquad \text{(Évaluer } t\text{)}$$

Évaluons l'expression de la différence de potentiel aux bornes du condensateur en fonction du temps à partir de l'équation de la charge dans un condensateur qui évolue dans le temps dans un circuit *RC* :

$$q = q_0 e^{-t/RC} \quad \Rightarrow \quad (CV) = (CV_0) e^{-t/RC} \qquad \text{(Remplacer } q = CV\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad V = V_0 e^{-t/RC} \qquad \text{(Isoler } V\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{V(t) = V_0 e^{-t/RC}} \qquad \text{(Réaliser que } V = V(t) \text{ dans circuit } RC\text{)}$$

Évaluons l'expression de la puissance perdue par le condensateur en fonction du temps à partir de la différence de potentielle aux bornes du condensateur :

$$P = \frac{(\Delta V)^2}{R} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{(V(t))^2}{R} \qquad \text{(Remplacer } \Delta V = V(t)\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad P = \frac{\left(V_0 e^{-t/RC}\right)^2}{R} \qquad \text{(Remplacer } V(t)\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{P = \frac{V_0^{\ 2} e^{-2t/RC}}{R}} \qquad \text{(Développer le carré)}$$

Évaluons l'expression de l'énergie $E$ perdu par le condensateur en fonction du temps $t$ de déchargement. Cette énergie sera transmise à l'eau sous forme thermique :

$$P = \frac{dE}{dt} \quad \Rightarrow \quad dE = Pdt \qquad \text{(Isoler } dE\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \int_{E=0}^{E} dE = \int_{t=0}^{t} Pdt \qquad \text{(Appliquer l'intégrale et poser bornes)}$$

$$\Rightarrow \quad E = \int_{t=0}^{t} Pdt \qquad \text{(Résoudre et évaluer l'intégrale sur } E\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad E = \int_{t=0}^{t} \left( \frac{V_0^{\ 2} e^{-2t/RC}}{R} \right) dt \qquad \text{(Remplacer } P\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{V_0^{\ 2}}{R} \int_{t=0}^{t} e^{-2t/RC} dt} \qquad \text{(Factoriser constantes)}$$

Évaluons l'intégrale précédente sachant que :

$$\frac{d\, e^{ax}}{dx} = e^{ax} \frac{d(ax)}{dx} = a\, e^{ax} \quad \Leftrightarrow \quad \int e^{ax} dx = \frac{e^{f(x)}}{a}$$

$$E = \frac{V_0^{\ 2}}{R} \int_{t=0}^{t} e^{-2t/RC} dt \quad \Rightarrow \quad E = \frac{V_0^{\ 2}}{R} \left[ \frac{e^{-2t/RC}}{-2/RC} \right]_0^t \qquad \text{(Résoudre l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{V_0^{\ 2}}{R} \left( \frac{e^{-2t/RC}}{-2/RC} - \frac{1}{-2/RC} \right) \qquad \text{(Évaluer l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{V_0^{\ 2}}{R} \left( -\frac{RCe^{-2t/RC}}{2} + \frac{RC}{2} \right) \qquad \text{(Réécriture)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{CV_0^{\ 2}}{2} \left(1 - e^{-2t/RC}\right)} \qquad \text{(Simplifier } R\text{)}$$

Évaluons la perte d'énergie durant 0,1271 s :

$$E = \frac{CV_0^{\ 2}}{2}\left(1 - e^{-2t/RC}\right) \qquad \text{(Équation précédente)}$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{\left(20000\times10^{-6}\right)\left(100\right)^2}{2}\left(1 - e^{-2(0,1271)/(17,82)\left(20000\times10^{-6}\right)}\right) \qquad \text{(Remplacer valeurs num.)}$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{\left(20000\times10^{-6}\right)\left(100\right)^2}{2}\left(0,5139\right) \qquad \text{(Calcul)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E = 51,39 \ \text{J}} \qquad \text{(Évaluer } E\text{)}$$

Évaluons la variation de la température de l'eau après de gain d'énergie provenant du condensateur : ( $50 \ \text{mL} = 0,050 \ \text{kg}$ )

$$Q = mC\Delta T \quad \Rightarrow \quad \left(51,39\right) = \left(0,050\right)\left(4186\right)\Delta T \qquad \text{(Remplacer valeurs num.)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta T = 0,2455°\text{C}} \qquad \text{(Évaluer } \Delta T\text{)}$$

Évaluons la température finale de l'eau :

$$T_f = T_i + \Delta T \quad \Rightarrow \quad T_f = \left(20\right) + \left(0,2455\right) \qquad \text{(Remplacer valeurs num.)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T_f = 20,246°\text{C}} \qquad \text{(Évaluer } T_f\text{)}$$

**<u>Remarque :</u>**

Afin d'accélérer la résolution de ce problème, nous pouvons utiliser l'équation de l'énergie d'un condensateur :

$$U_{\text{e}} = \frac{1}{2}CV^2$$

L'énergie initiale du condensateur à 100 V sera :

$$U_{\text{e}(100\%)} = \frac{1}{2}CV_0^{\ 2} \quad \Rightarrow \quad U_{\text{e}(100\%)} = \frac{1}{2}\left(20000\times10^{-6}\right)\left(100\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_{\text{e}(100\%)} = 100 \ \text{J}}$$

Lorsque le condensateur est déchargé de 30%, son voltage finale est à 70% ce qui donne une énergie de :

$$U_{\text{e}(70\%)} = \frac{1}{2}C\left(0,7V_0\right)^2 \Rightarrow \quad U_{\text{e}(70\%)} = \frac{1}{2}\left(20000\times10^{-6}\right)\left(0,7\left(100\right)\right)^2 \Rightarrow \quad \boxed{U_{\text{e}(70\%)} = 49 \ \text{J}}$$

La variable d'énergie du condensateur sera :

$$\Delta E = U_{\text{e}(100\%)} - U_{\text{e}(70\%)} \Rightarrow \quad \Delta E = \left(100\right) - \left(49\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta E = 51 \ \text{J}}$$