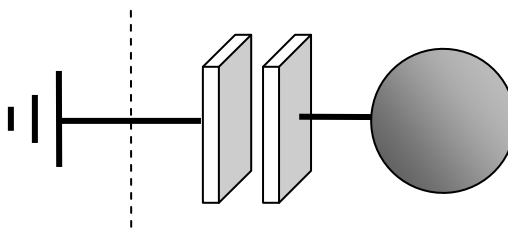


Problème de révision : Partage d'énergie entre plaque et sphère

Un condensateur plan dont les armatures sont carrées de $0,5\text{ m}$ de côté et séparées par une distance de 2 cm possède une énergie de $3,8\ \mu\text{J}$. Un plastique de constante diélectrique égale à $2,3$ sépare les deux armatures du condensateur.



On branche la borne négative du condensateur à une mise à la terre et on branche la borne positive du condensateur à une sphère conductrice neutre de $0,4\text{ m}$ de rayon à l'aide de deux minces fils conducteurs tel qu'illustré sur le schéma ci-haut.

On suppose que la mise à la terre est située à une très grande distance du condensateur et de la sphère et que la sphère est suffisamment loin du condensateur pour qu'elle génère un champ électrique négligeable entre les deux plaques du condensateur.

- a) Évaluez l'énergie du condensateur plan à l'équilibre électrostatique.
- b) Y a-t-il conservation de l'énergie potentielle électrique dans cette situation ?

Solution : Partage d'énergie entre plaque et sphère

Évaluons la capacité du condensateur plan dans le vide :

$$\begin{aligned}C_{\text{vide}} = \frac{\epsilon_0 A}{d} &\Rightarrow C_{\text{vide}} = \frac{\epsilon_0 (L^2)}{d} && \text{(Remplacer } A = L^2 \text{)} \\ &\Rightarrow C_{\text{vide}} = \frac{(8,85 \times 10^{-12})(0,5)^2}{(0,02)} && \text{(Remplacer valeurs num.)} \\ &\Rightarrow \boxed{C_{\text{vide}} = 1,106 \times 10^{-10} \text{ F}} && \text{(Évaluer } C_{\text{vide}} \text{)}\end{aligned}$$

Évaluons la capacité du condensateur plan avec le diélectrique :

$$\begin{aligned}C = K C_{\text{vide}} &\Rightarrow C = (2,3)(1,106 \times 10^{-10}) && \text{(Remplacer valeurs num.)} \\ &\Rightarrow \boxed{C = 2,544 \times 10^{-10} \text{ F}} && \text{(Évaluer } C, \text{ la capacité avec diélectrique)}\end{aligned}$$

Évaluons la charge électrique q séparée dans le condensateur plan à partir de l'énergie :

$$\begin{aligned}U_e = \frac{1}{2} C \Delta V^2 &\Rightarrow U_e = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} && \text{(Remplacer } C = q / \Delta V \text{)} \\ &\Rightarrow q = \sqrt{2U_e C} && \text{(Isoler } q \text{)} \\ &\Rightarrow q = \sqrt{2(3,8 \times 10^{-6})(2,544 \times 10^{-10})} && \text{(Remplacer valeurs num.)} \\ &\Rightarrow \boxed{q = 4,397 \times 10^{-8} \text{ C}} && \text{(Évaluer } q, \text{ la charge du condensateur)}\end{aligned}$$

Remarque :

La différence de potentiel aux bornes du condensateur est de **172,8 V**.

Évaluons l'expression de la charge électrique sur la sphère et sur la plaque positive du condensateur plan après avoir atteint l'équilibre statique :

$$q = q_{\text{plaque}} + q_{\text{sphère}}$$

où q : Charge initiale sur la plaque du condensateur (C)

q_{plaque} : Charge finale sur la plaque à l'équilibre électrostatique (C)

$q_{\text{sphère}}$: Charge finale sur la sphère à l'équilibre électrostatique (C)

Évaluons l'expression du potentiel électrique sur nos surfaces. Puisque la mise à la terre est très loin de la sphère et du condensateur, nous avons un potentiel électrique égal à zéro à l'infini et à la mise à la terre :

Sphère (condensateur sphérique) :

• Capacité de la sphère : $C_{\text{sphère}} = \frac{r}{k} \Rightarrow C_{\text{sphère}} = \frac{(0,4)}{(9 \times 10^9)}$
 $\Rightarrow \boxed{C_{\text{sphère}} = 4,444 \times 10^{-11} \text{ F}}$

• Potentiel de la sphère : $V_{\text{sphère}} = \frac{q_{\text{sphère}}}{C_{\text{sphère}}}$ et $\boxed{V_{\infty} = 0}$

Condensateur plan :

• Potentiel du condensateur : $V_{\text{plaque}} = \frac{q_{\text{plaque}}}{C}$ et $\boxed{V_{\infty} = 0}$

Puisque la sphère et la plaque positive sont reliées par un fil conducteur, ils sont au même potentiel électrique. Égalisons l'expression de nos potentiels afin d'évaluer la charge restante sur la plaque :

$$V_{\text{sphère}} = V_{\text{plaque}} \quad (\text{Condition équilibre électrostatique})$$

$$\Rightarrow \frac{q_{\text{sphère}}}{C_{\text{sphère}}} = \frac{q_{\text{plaque}}}{C} \quad (\text{Remplacer } V_{\text{sphère}} \text{ et } V_{\text{plaque}})$$

$$\Rightarrow \frac{(q - q_{\text{plaque}})}{C_{\text{sphère}}} = \frac{q_{\text{plaque}}}{C} \quad (\text{Remplacer avec } q = q_{\text{plaque}} + q_{\text{sphère}})$$

$$\Rightarrow \frac{q}{C_{\text{sphère}}} - \frac{q_{\text{plaque}}}{C_{\text{sphère}}} = \frac{q_{\text{plaque}}}{C} \quad (\text{Distribution})$$

$$\Rightarrow \frac{q}{C_{\text{sphère}}} = \frac{q_{\text{plaque}}}{C_{\text{sphère}}} + \frac{q_{\text{plaque}}}{C} \quad (\text{Isoler termes avec } q_{\text{plaque}})$$

$$\Rightarrow \frac{q}{C_{\text{sphère}}} = q_{\text{plaque}} \left(\frac{1}{C_{\text{sphère}}} + \frac{1}{C} \right) \quad (\text{Factoriser } q_{\text{plaque}})$$

$$\Rightarrow q_{\text{plaque}} = \frac{q}{C_{\text{sphère}}} \left(\frac{1}{C_{\text{sphère}}} + \frac{1}{C} \right)^{-1} \quad (\text{Isoler } q_{\text{plaque}})$$

$$\Rightarrow q_{\text{plaque}} = \frac{(4,397 \times 10^{-8})}{(4,444 \times 10^{-11})} \left(\frac{1}{(4,444 \times 10^{-11})} + \frac{1}{(2,544 \times 10^{-10})} \right)^{-1} \quad (\text{Rem. valeurs num.})$$

$$\Rightarrow \boxed{q_{\text{plaque}} = 3,743 \times 10^{-8} \text{ C}} \quad (\text{Évaluer } q_{\text{plaque}})$$

Évaluons la charge sur la sphère :

$$q = q_{\text{plaque}} + q_{\text{sphère}} \Rightarrow (4,397 \times 10^{-8}) = (3,743 \times 10^{-8}) + q_{\text{sphère}} \quad (\text{Rem. valeurs num.})$$
$$\Rightarrow \boxed{q_{\text{sphère}} = 6,54 \times 10^{-9} \text{ C}} \quad (\text{Évaluer } q_{\text{sphère}})$$

Évaluons le potentiel à la surface de la sphère et de la plaque à l'équilibre électrostatique :

$$\bullet V_{\text{sphère}} = \frac{q_{\text{sphère}}}{C_{\text{sphère}}} \Rightarrow V_{\text{sphère}} = \frac{(6,54 \times 10^{-9})}{(4,444 \times 10^{-11})} \Rightarrow \boxed{V_{\text{sphère}} = 147,16 \text{ V}}$$
$$\bullet V_{\text{plaque}} = \frac{q_{\text{plaque}}}{C} \Rightarrow V_{\text{plaque}} = \frac{(3,743 \times 10^{-8})}{(2,544 \times 10^{-10})} \Rightarrow \boxed{V_{\text{plaque}} = 147,13 \text{ V}}$$

Ces deux potentiels sont égaux à la 4^{ième} décimal en raison des chiffres significatifs gardés. Nous garderons ainsi la valeur suivante du potentiel électrique à l'équilibre électrostatique :

$$V_{\text{sphère}} = V_{\text{plaque}} = 147,1 \text{ V}$$

Remarque :

Le potentiel de la plaque après le transfert des charges (**147,1 V**) est plus petit que le potentiel électrique avant le transfert de la charge (**172,8 V**). Le partage des charges entre la plaque et la sphère produit alors une diminution du potentiel électrique d'origine. Il y aura alors moins d'énergie dans le condensateur après l'équilibre électrostatique.

Évaluons l'énergie dans le condensateur plan à l'équilibre électrostatique :

$$U_e = \frac{1}{2} C \Delta V^2 \Rightarrow U_e = \frac{1}{2} (2,544 \times 10^{-10}) (147,1)^2$$
$$\Rightarrow \boxed{U_e = 2,752 \times 10^{-6} \text{ J}} \quad (\mathbf{a})$$

Évaluons l'énergie potentielle électrique associée à la sphère (condensateur sphérique) :

$$U_{e(\text{sphère})} = \frac{1}{2} C_{\text{sphère}} \Delta V^2 \Rightarrow U_{e(\text{sphère})} = \frac{1}{2} (4,444 \times 10^{-11}) (147,1)^2$$
$$\Rightarrow \boxed{U_{e(\text{sphère})} = 4,808 \times 10^{-7} \text{ J}}$$

Il est important de préciser à cette étape qu'il n'y aura pas de terme d'énergie potentielle électrique $U_{e(\text{plaque-sphère})}$ entre le condensateur plan et la sphère, car nous avons précisé dans l'énoncé que la distance entre le condensateur plan et la sphère était très grande. Ainsi,

$$U_{e(\text{plaque-sphère})} = 0$$

Vérifions s'il y a conservation de l'énergie :

$$\begin{aligned} E_f &= E_i + W_{nc} \Rightarrow U_{ef} = U_{ei} + W_{nc} \\ &\Rightarrow (2,752 \times 10^{-6} + 4,808 \times 10^{-7}) = (3,8 \times 10^{-6}) + W_{nc} \\ &\Rightarrow \boxed{W_{nc} = -5,67 \times 10^{-7} \text{ J}} \end{aligned}$$

On constate que le déplacement des charges électriques pour atteindre l'équilibre produit une réorganisation moins énergétiques des charges. Il y a donc moins d'énergie potentielle électrique dans cette nouvelle organisation. On remarque également que la sphère possède moins d'énergie ($U_e = 4,81 \times 10^{-7} \text{ J}$) que la perte d'énergie ($W_{nc} = -5,65 \times 10^{-7} \text{ J}$) qu'il y a eu durant le transfert des charges.

(b) Il n'y a donc pas conservation de l'énergie potentielle électrique lors du transfert de charge de la plaque à la sphère.