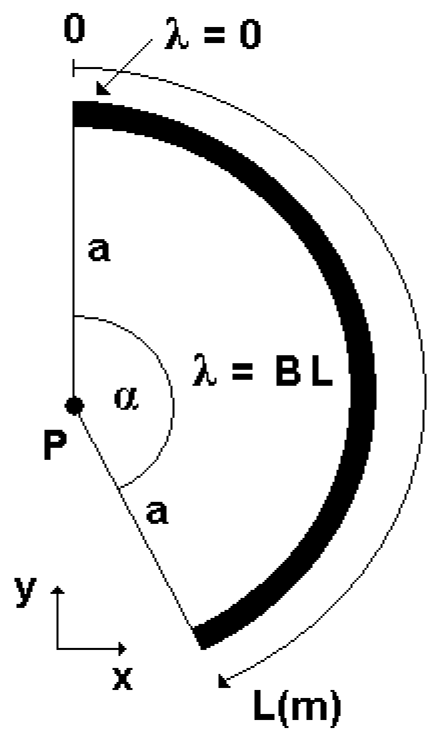
Problème de révision : La tige arquée non uniforme

Poser l'intégrale qui permet de calculer le champ électrique au point P produit par une tige en forme d'arc de cercle ayant une densité de charge non constante de la forme suivante :

$$\lambda = B\,L \qquad \text{où} \qquad B > 0$$

Voici la représentation de la situation :



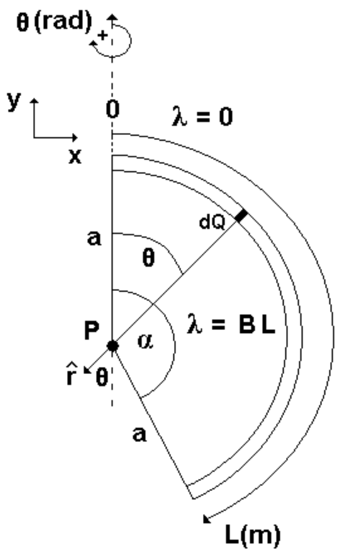
Solution : La tige arquée non uniforme

Choisissons un système d'axe θ pour mesurer l'angle de l'arc de cercle avec la correspondance suivante :

$\theta = 0$ lorsque $L = 0$
(axe θ parallèle à l'axe y)

Selon le système d'axe :

- $L = a\theta$
- $dL = a\,d\theta$
- $dQ = \lambda\,dL$
- $r = a$
- $\hat{r} = -\sin(\theta)\vec{i} - \cos(\theta)\vec{j}$



et

$$dQ = \lambda\,dL = (B\,L)dL = B(a\theta)(a\,d\theta) \Rightarrow \boxed{dQ = Ba^2\theta\,d\theta}$$

Voici l'expression du champ électrique :

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int k\frac{dQ}{r^2}\hat{r}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = \int_{\theta=0}^{\alpha} k\frac{(Ba^2\theta\ d\theta)}{(a)^2}\left(-\sin(\theta)\vec{i} - \cos(\theta)\vec{j}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = \int_{\theta=0}^{\alpha} k\,B\theta\,d\theta\left(-\sin(\theta)\vec{i} - \cos(\theta)\vec{j}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = kB\int_{\theta=0}^{\alpha} \theta\ d\theta\left(-\sin(\theta)\vec{i} - \cos(\theta)\vec{j}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = kB\left[\int_{\theta=0}^{\alpha} -\theta\sin(\theta)\ d\theta\ \vec{i} + \int_{\theta=0}^{\alpha} -\theta\cos(\theta)\ d\theta\ \vec{j}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{E} = -kB\left[\int_{\theta=0}^{\alpha} \theta\sin(\theta)\ d\theta\ \vec{i} + \int_{\theta=0}^{\alpha} \theta\cos(\theta)\ d\theta\ \vec{j}\right]}$$

Il reste à intégrer par partie …