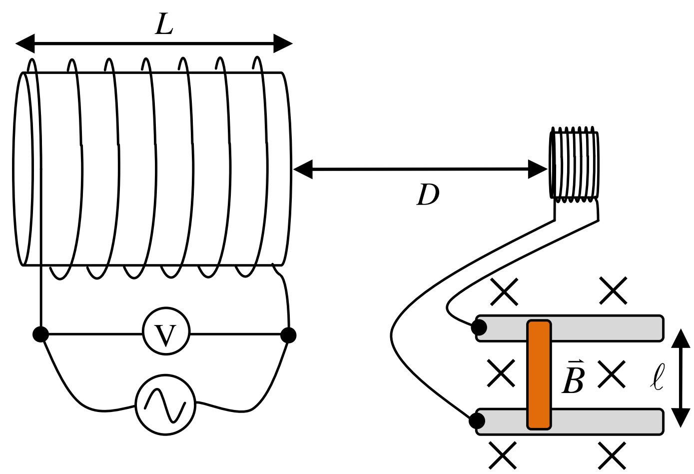
Électricité et magnétisme

Pré requis : Section 5.4

# Moteur linéaire à distance

Un solénoïde de 7000 tours de 20 cm de rayon et de longueur $L$ = 60 cm est alimenté par une source alternative. On observe à l'aide d'un voltmètre que la différence de potentiel aux bornes du solénoïde passe de 30 V à 475 V en 2,5 s à un taux constant. Le filage utilisé pour constituer le solénoïde correspond à une résistance de 120 Ω.




Une portion du champ magnétique généré par le solénoïde est interceptée par une bobine de 800 tours. La bobine possède rayon de 5 cm et elle est située à une distance $D$ = 55 cm d'une extrémité du solénoïde.

La bobine est centrée sur l'axe du solénoïde et le plan de la bobine est parallèle aux spires du solénoïde tel qu'illustré sur le schéma ci-haut. Nous allons supposer que le champ magnétique évalué sur l'axe central du solénoïde est constant (module et orientation) sur l'ensemble de la surface de la bobine.

La bobine est connectée à un circuit représentant un moteur linéaire dont la résistance est de 12 mΩ. La tige du moteur possède une masse de 150 g et une longueur $\ell$ = 6 cm. Le moteur linéaire est plongé dans un champ magnétique perpendiculaire au plan du moteur linéaire de 0,4 T.

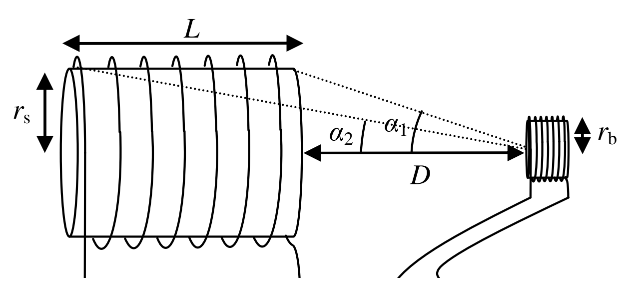
a) Évaluez l'électromotance induite dans la bobine.

b) Sachant que la tige est initialement immobile, évaluez la vitesse de la tige du moteur linéaire après 2 s de variation de la tension aux bornes du solénoïde. L'*auto-induction* est négligeable dans ce moteur linéaire.

## Solution :

Afin d'évaluer le champ magnétique généré par le solénoïde le long de son axe, nous aurons besoin de l'équation

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2}\left|\cos(\alpha_2) - \cos(\alpha_1)\right| .$$



Évaluons les paramètres géométriques nécessaires au calcul de cette équation. Il est à noté qu'il faudra évaluer un courant initial $I_i$ et un courant final $I_f$ puisque la différence de potentiel $\Delta V$ aux bornes du solénoïde varie dans le temps :

- $\tan(\alpha_1) = \dfrac{r_s}{D} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \arctan\left(\dfrac{(0,20)}{(0,55)}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_1 = 19,98°}$
- $\tan(\alpha_2) = \dfrac{r_s}{D+L} \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = \arctan\left(\dfrac{(0,20)}{(0,55)+(0,60)}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_2 = 9,866°}$
- $n = \dfrac{N_s}{L} \quad \Rightarrow \quad n = \dfrac{(7000)}{(0,60)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{n = 11666,6 \ \text{tours/m}}$
- $\Delta V_i = RI_i \quad \Rightarrow \quad (30) = (120)I_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_i = 0,25 \ \text{A}}$
- $\Delta V_f = RI_f \quad \Rightarrow \quad (475) = (120)I_f \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_f = 3,958 \ \text{A}}$

Évaluons la variation du champ magnétique $\Delta B$ le long de l'axe du solénoïde à une distance $D$ de celui-ci :

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2}\left|\cos(\alpha_2) - \cos(\alpha_1)\right|$$

$$\Rightarrow \quad \Delta B = \frac{\mu_0 n \,\Delta I}{2}\left|\cos(\alpha_2) - \cos(\alpha_1)\right|$$

$$\Rightarrow \quad \Delta B = \frac{\mu_0 n (I_f - I_i)}{2}\left|\cos(\alpha_2) - \cos(\alpha_1)\right|$$

$$\Rightarrow \quad \Delta B = \frac{(4\pi\times 10^{-7})(11666,6)((3,958)-(0,25))}{2}\left|\cos(9,866) - \cos(19,98)\right|$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta B = 1,234\times 10^{-3}\,\text{T}}$$

Évaluons la surface de chaque spire de la bobine :

$$A_{\text{spire}} = \pi r_b^{\,2} \quad \Rightarrow \quad A_{\text{spire}} = \pi (0,05)^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A_{\text{spire}} = 7,854\times 10^{-3}\,\text{m}^2}$$

Pré requis : Section 5.4

Évaluons l'électromotance induite $\varepsilon_{\text{ind}}$ dans la bobine à partir de la loi de Faraday en supposant que le champ magnétique $B$ est constant (module et orientation) sur l'ensemble de la surface des spires :

$$\varepsilon_{\text{ind}} = \left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{\text{ind}} = \frac{\Delta(BA\cos(\theta))}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{\text{ind}} = \frac{\Delta(B(N_{\text{b}}A_{\text{spire}})\cos(0°))}{\Delta t} \qquad (A = N_{\text{b}}A_{\text{spire}},\ \theta = 0°)$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{\text{ind}} = N_{\text{b}}A_{\text{spire}}\frac{\Delta B}{\Delta t} \qquad \text{(Factoriser les constantes)}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{\text{ind}} = (800)(7{,}854\times10^{-3})\frac{(1{,}234\times10^{-3})}{(2{,}5)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_{\text{ind}} = 3{,}1014\times10^{-3}\ \text{V}} \qquad \textbf{(a)}$$

Évaluons la vitesse limite $v_{\text{lim}}$ du moteur linéaire :

$$v_{\text{lim}} = \frac{\varepsilon}{B\ell} \quad \Rightarrow \quad v_{\text{lim}} = \frac{(\varepsilon_{\text{ind}})}{B\ell}$$

$$\Rightarrow \quad v_{\text{lim}} = \frac{(3{,}1014\times10^{-3})}{(0{,}4)(0{,}06)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_{\text{lim}} = 0{,}1292\ \ \text{m/s}}$$

À partir de l'équation de la vitesse d'un moteur linéaire (sans auto-induction), évaluons la vitesse de la tige après un temps $t$ = 2 s sachant qu'elle était initialement immobile :

$$v(t) = v_{\text{lim}}\left[1 + \left(\frac{v_0}{v_{\text{lim}}} - 1\right)e^{-\frac{\ell^2B^2}{mR}t}\right] \qquad \text{(Équation de la vitesse)}$$

$$\Rightarrow \quad v(t) = v_{\text{lim}}\left(1 - e^{-\frac{\ell^2B^2}{mR}t}\right) \qquad (v_0 = 0\text{, simplification})$$

$$\Rightarrow \quad v(t) = (0{,}1292)\left(1 - e^{-\frac{(0{,}06)^2(0{,}4)^2}{(0{,}150)(12\times10^{-3})}(2)}\right) \qquad \text{(Remplacer valeurs numériques)}$$

$$\Rightarrow \quad v(t) = (0{,}1292)(1 - (0{,}5273)) \qquad \text{(Calcul)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v(t=2) = 0{,}06107\ \ \text{m/s}} \qquad \textbf{(b)} \qquad \text{(Évaluer } v\text{)}$$