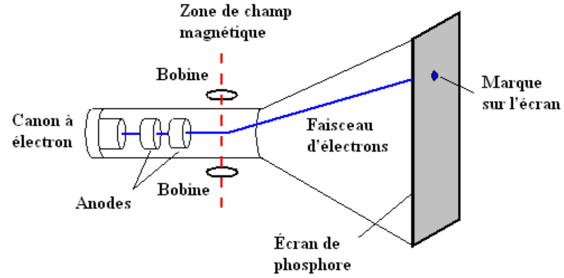
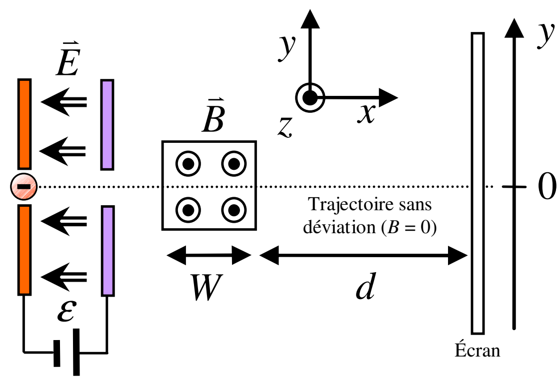
Écran cathodique

Un écran cathodique est constitué d'un canon à électron accéléré par des anodes et dévié par un champ magnétique uniforme qui varie dans le temps. Selon le module et le sens du champ magnétique, le faisceau d'électron est dévié vers un écran de phosphore. La collision entre les électrons et le phosphore produit une lumière et marque temporairement l'écran.



Considérons la situation simplifiée suivante :

Dans un écran cathodique, un faisceau d'électrons initialement immobile et propulsé par une différence de potentiel ΔV de 14500 V pénètre dans une zone de champ magnétique B constant orienté selon l'axe z positif sur une distance W de 2 cm et continue son déplacement avant d'être intercepté par un écran de phosphore (voir schéma ci-contre). La distance d entre la fin de la zone de champ magnétique et l'écran est de 14 cm.



Si le module du champ magnétique B est de 0,008 T, évaluer la position y du faisceau d'électrons lorsqu'il percute l'écran de phosphore.

Solution :

Évaluons l'énergie cinétique des électrons après leur propulsion grâce à la différence de potentiel ΔV :

$$K_f + U_f = K_i + U_i \quad \Rightarrow \quad K_f = U_i - U_f \qquad (K_i = 0 \text{ et isoler } K_f)$$

$$\Rightarrow \quad K_f = -\Delta U$$

$$\Rightarrow \quad K_f = -q\Delta V$$

$$\Rightarrow \quad K_f = -(-1{,}6\times 10^{-19})(+14500)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{K_f = 2{,}320\times 10^{-15}\ \text{J}}$$

Évaluons la vitesse des électrons après leur propulsion :

$$K_0 = \frac{1}{2} m v_0^{\,2} \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{2K_0}{m}}$$

$$\Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{2\left(2{,}320\times10^{-15}\right)}{\left(9{,}11\times10^{-31}\right)}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_0 = 7{,}137\times10^{7}\ \text{m/s}}$$

<u>Remarque :</u>

En comparatif avec la vitesse de la lumière, les électrons se déplacent à $v_0 = 0{,}238c$ selon une définition classique de l'énergie cinétique. Pour avoir un résultat plus précis, il faudrait utiliser une définition relativiste de l'énergie cinétique :

$$K_0 = (\gamma - 1)mc^2 \qquad \text{où} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

Évaluons la force magnétique appliquée sur les électrons lorsque ceux-ci pénètre dans le champ magnétique afin d'évaluer où sera le centre de la trajectoire circulaire :

$$\vec{F}_{\text{m}} = q\vec{v}\times\vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{\text{m}} = (-e)\left(v_0\vec{i}\right)\times\left(B\vec{k}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{\text{m}} = -ev_0B\left(\vec{i}\times\vec{k}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{\text{m}} = -ev_0B\left(-\vec{j}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{\text{m}} = ev_0B\,\vec{j}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{\text{m}} = \left(1{,}6\times10^{-19}\right)\left(7{,}137\times10^{7}\right)\left(0{,}008\right)\vec{j}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{F}_{\text{m}} = 9{,}135\times10^{-14}\ \vec{j}\ \text{N}}$$

Puisque la force magnétique est dans le sens positif de l'axe y, <u>le centre de la trajectoire circulaire sera au-dessus de la coordonnée où les particules entre dans le champ magnétique</u>.

Évaluons le rayon de la trajectoire circulaire des électrons :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad F_{\text{m}} = ma_{\text{C}} \qquad \text{(Force magnétique } F_{\text{m}} \text{ parallèle à } a_{\text{C}}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad qv_{\perp}B = m\frac{v_{\perp}^{\,2}}{r} \qquad \left(F_{\text{m}} = qv_{\perp}B \ \text{ et } \ a_{\text{C}} = \frac{v_{\perp}^{\,2}}{r}\right)$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{mv_{\perp}}{qB} \qquad \text{(Isoler } r\text{)}$$

$$r = \frac{mv_\perp}{qB} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{(9{,}11\times 10^{-31})(7{,}137\times 10^{7})}{(1{,}6\times 10^{-19})(0{,}008)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{r = 5{,}079\times 10^{-2}\ \mathrm{m}}$$

<u>Remarque :</u>

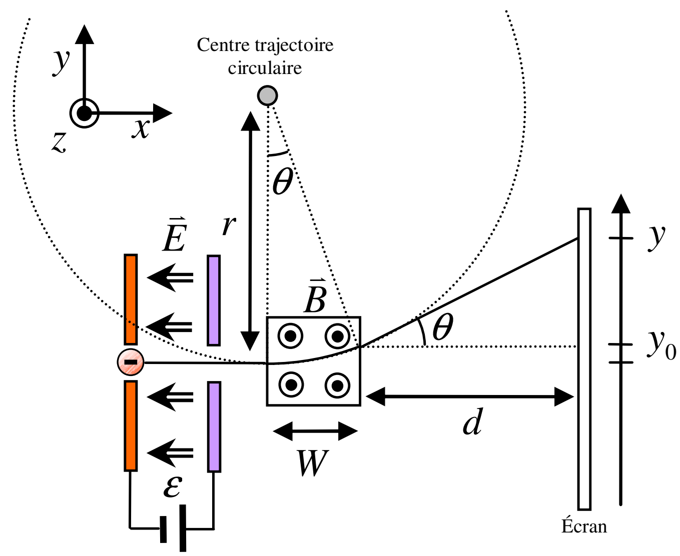
En relativité restreinte, lorsque une force est perpendiculaire à la vitesse d'une particule (comme dans le cas présent), la $2^{\text{ième}}$ loi de Newton prendre la forme suivante ce qui aurait pour effet de modifier l'expression du rayon r de la trajectoire circulaire :

$$F_\perp = \gamma m a \qquad \text{où} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Nous pouvons conclure que les électrons vont effectuer une déviation vers le haut (sens positif de l'axe y).

On remarque qu'il y a un arc de cercle θ effectué sur un cercle de rayon r suivit d'une trajectoire rectiligne dont l'orientation est désignée par l'angle θ par rapport à l'axe x.

La coordonnée y désigne la coordonnée finale des électrons.



Évaluons l'axe de cercle θ effectué par les électrons dans leur trajectoire circulaire :

$$W = r\sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad \theta = \arcsin\left(\frac{W}{r}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \arcsin\left(\frac{(2\times 10^{-2})}{(5{,}079\times 10^{-2})}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\theta = 23{,}19°}$$

Évaluons le déplacement selon l'axe y effectué par les électrons dans leur trajectoire circulaire. Ce déplacement correspondra à la coordonnée initiale y_0 du mouvement à vitesse constante :

$$y_0 = r - r\cos(\theta) \quad \Rightarrow \quad y_0 = r(1-\cos(\theta))$$

$$\Rightarrow \quad y_0 = \left(5{,}079\times10^{-2}\right)\left(1-\cos(23{,}19°)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y_0 = 4{,}103\times10^{-3}\ \text{m}}$$

Évaluons l'orientation du vecteur vitesse <u>après le passage</u> dans le champ magnétique B :

$$\vec{v}_0 = v_{x0}\vec{i} + v_{y0}\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_0 = v_0\cos(\theta)\vec{i} + v_0\sin(\theta)\vec{j}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_0 = \left(7{,}137\times10^{7}\right)\cos(23{,}19°)\vec{i} + \left(7{,}137\times10^{7}\right)\sin(23{,}19°)\vec{j}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_0 = \left(6{,}560\,\vec{i} + 2{,}810\,\vec{j}\right)\times10^{7}\ \text{m/s}}$$

Évaluons le temps de parcours t de la trajectoire rectiligne :

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad \Rightarrow \quad d = v_{x0}t$$

$$\Rightarrow \quad \left(14\times10^{-2}\right) = \left(6{,}560\times10^{7}\right)t$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{t = 2{,}134\times10^{-9}\ \text{s}}$$

Évaluons la position y des électrons sur l'écran :

$$y = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \quad \Rightarrow \quad y = y_0 + v_{y0}t$$

$$\Rightarrow \quad y = \left(4{,}103\times10^{-3}\right) + \left(2{,}810\times10^{7}\right)\left(2{,}134\times10^{-9}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y = 6{,}407\ \ \text{cm}}$$