Électricité et magnétisme

Pré requis : Section 3.6

Le spa

Un spa est un bassin d’eau munie de quatre composants électriques : une entrée électrique branchée sur 240 V avec résistance interne correspondant à la source du circuit, un moteur (pousser l’eau), d’une soufflerie (formation de bulle d’air) et d’un élément chauffant (chauffer l’eau).

Un spa

Le modèle qui sera analysé sera constitué d’un moteur de 58 Ω, d’une soufflerie de résistance R_s ainsi qu’une seconde de 70 Ω branchée en série et d’un élément chauffant de résistance R_c. Les composants sont connectés entre eux tel qu’il est illustré sur le schéma ci-contre où la mise sous tension des composants est contrôlée par des interrupteurs électroniques (résistance nulle).

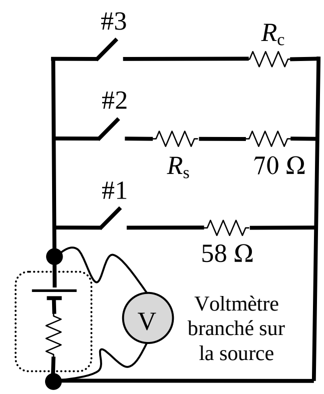


Schéma du circuit du spa lorsqu’aucun composant n’est sous tension

Lorsque le spa fonctionne uniquement avec le moteur (interrupteur #1 fermé), un voltmètre branché sur la source affichera 232 V.

a) Quelle est la résistance interne de l’entrée électrique ?

b) Quelle est la puissance du moteur lorsque ce composant est mis sous tension uniquement ?

c) Lorsque le moteur change de vitesse, la puissance électrique consommée par le moteur est doublée. Quelle est la résistance du moteur lors du changement de vitesse ?
Conseil : Exploitez $P = RI^2$ pour représenter votre puissance doublée et n’oubliez pas la présence de la résistance interne dans votre raisonnement.

Lorsque l’on met sous tension l’ensemble des composants du spa (interrupteur #1, #2 et #3 fermés), un voltmètre et un ampèremètre branchés tel qu’illustré sur le schéma ci-contre indiqueront 135 V et 11,8 A.

d) Déterminez la résistance R_s de la 1re soufflerie.

e) Déterminez la résistance R_c de l’élément chauffant.

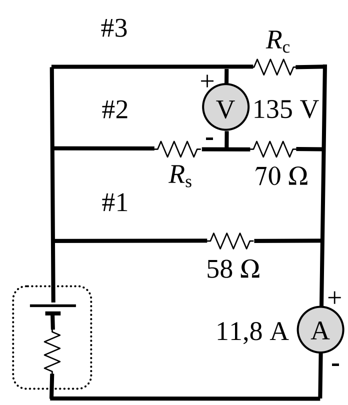


Schéma du circuit du spa tous les composants sont sous tension.

Pré requis : Section 3.6

Solution :

Lorsque le moteur est uniquement sous tension, nous pouvons décrire le circuit grâce à la loi de Kirchhoff suivante :

$$\varepsilon - rI - R_{\mathrm{m}} I = 0$$

Cette équation nous donne accès à l'équation suivante qui sera exploité prochainement :

$$\varepsilon - rI - R_{\mathrm{m}} I = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon - (r + R_m) I = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I = \frac{\varepsilon}{r + R_m}}$$

Évaluons le courant qui circule dans le moteur (58 Ω) lorsque celui-ci est sous tension seul en exploitant la mesure du voltmètre à 232 V :

$$\Delta V = R_{\mathrm{m}} I \quad \Rightarrow \quad (232\,\mathrm{V}) = (58\,\Omega) I \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = 4\ \mathrm{A}}$$

Évaluons la résistance interne de la source en exploitant la mesure du voltmètre à 232 V ainsi que le courant de 4 A qui circule dans le circuit :

$$\Delta V = \varepsilon - rI \quad \Rightarrow \quad (232\,\mathrm{V}) = (240\,\mathrm{V}) - r(4\,\mathrm{A}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{r = 2\ \Omega} \qquad \textbf{(a)}$$

Évaluons la puissance du moteur lorsque celui-ci est uniquement sous tension :

$$P = \frac{\Delta V^2}{R_{\mathrm{m}}} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{(232\,\mathrm{V})^2}{(58\,\Omega)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = 928\ \mathrm{W}} \qquad \textbf{(b)}$$

Développons une équation du 2^e^ degré pour évaluons la nouvelle résistance du moteur lorsque celui-ci change de vitesse :

$$P_2 = 2P \quad \Rightarrow \quad RI^2 = 2P$$

$$\Rightarrow \quad R\left(\frac{\varepsilon}{r + R}\right)^2 = 2P$$

$$\Rightarrow \quad \frac{R\varepsilon^2}{r^2 + 2rR + R^2} = 2P$$

$$\Rightarrow \quad R\varepsilon^2 = 2P\left(r^2 + 2rR + R^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad R\varepsilon^2 = \left(2r^2 P + 4rPR + 2PR^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{2PR^2 + \left(4rP - \varepsilon^2\right)R + 2r^2 P = 0}$$

Développons ce polynôme du 2^{e} degré ($ax^2 + bx + c = 0$) avec des valeurs numériques :

$$2PR^2 + \left(4rP - \varepsilon^2\right)R + 2r^2P = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2(928\,\mathrm{W})R^2 + \left(4(2\,\Omega)(928\,\mathrm{W}) - (240\,\mathrm{V})^2\right)R + 2(2\,\Omega)^2(928\,\mathrm{W}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 1856R^2 - 50176R + 7424 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{29R^2 - 784R + 116 = 0} \qquad \text{(Diviser par 64)}$$

Résolvons notre polynôme du 2^{e} degré :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{-(-784) \pm \sqrt{(-784)^2 - 4(29)(116)}}{2(29)}$$

$$\Rightarrow \quad R = \{\ 0{,}1489\,\Omega\ ,\ 26{,}8857\,\Omega\ \}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{R = 26{,}8857\,\Omega}$$ **(c)** (résistance à utiliser)

P.S. Avec la résistance à 0,1489 **Ω**, le courant débité par la source serait beaucoup plus élevé que 60 A étant traditionnellement la limite autorisée pour une ligne électrique pour alimenter un spa. Depuis, la grande majorité de l'énergie serait dépensée dans la résistance interne ce qui endommagerait l'entrée électrique.

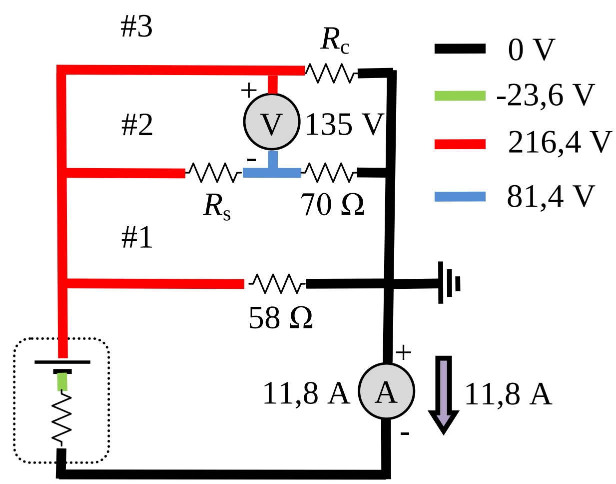
Pour résoudre le circuit lorsque le moteur, la soufflerie et l'élément chauffant sont sous tension, nous allons exploiter la mise à la terre pour représenter l'évolution du voltage dans le circuit.

Évaluons la différence de potentiel de la résistance interne lorsqu'un courant de 11,8 A y circule :

$$\Delta V = RI \quad \Rightarrow \quad \Delta V = (2\,\Omega)(11{,}8\,\mathrm{A})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta V = 23{,}6\ \mathrm{V}}$$

Avec cette différence de potentiel, nous pouvons établir le potentiel électrique dans le circuit partout dans le circuit en exploitant la mesure de 135 V du voltmètre (voir schéma ci-contre).



Évaluons les courants circulant dans le moteur (58 Ω) ainsi que dans la branche de la soufflerie en exploitant la différence de potentiel sur la 2[e] soufflerie (70 Ω) :

$$\Delta V = RI \quad \Rightarrow \quad (216{,}4\,\mathrm{V} - 0\mathrm{V}) = (58\,\Omega) I_\mathrm{m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_\mathrm{m} = 3{,}731\ \mathrm{A}}$$

$$(81{,}4\,\mathrm{V} - 0\,\mathrm{V}) = (70\,\Omega) I_\mathrm{s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_\mathrm{s} = 1{,}163\ \mathrm{A}}$$

Appliquons la loi des nœuds sur le nœud N_1 pour déterminer un courant dans une branche :

$$\sum I_\mathrm{entrant} = \sum I_\mathrm{sortant}$$

$$\Rightarrow \quad (3{,}731\,\mathrm{A}) + I = (11{,}8\,\mathrm{A})$$

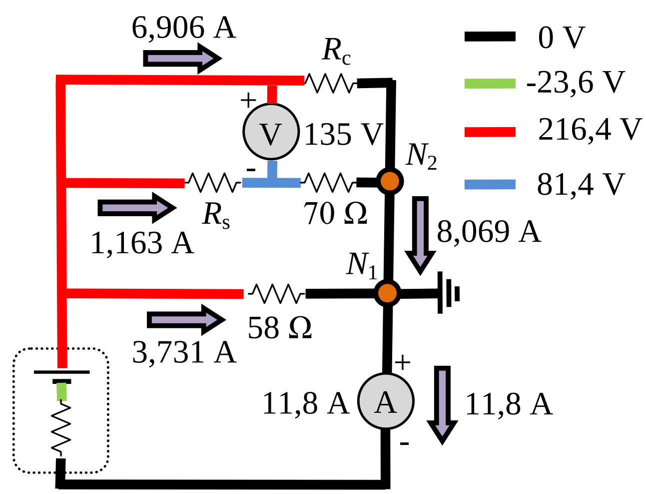
$$\Rightarrow \quad \boxed{I = 8{,}069\ \mathrm{A}}$$

Appliquons la loi des nœuds sur le nœud N_2 pour déterminer un courant dans la branche de l'élément chauffant :

$$\sum I_\mathrm{entrant} = \sum I_\mathrm{sortant}$$

$$\Rightarrow \quad I + (1{,}163\,\mathrm{A}) = (8{,}069\,\mathrm{A})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I = 6{,}906\ \mathrm{A}}$$



Évaluons nos deux résistances R_s et R_c à l'aide de la loi d'Ohm :

$$\Delta V = RI \quad \Rightarrow \quad (216{,}4\,\mathrm{V} - 81{,}4\,\mathrm{V}) = R_\mathrm{s}(1{,}163\,\mathrm{A}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_\mathrm{s} = 116{,}08\ \Omega} \qquad \textbf{(d)}$$

$$\Rightarrow \quad (216{,}4\,\mathrm{V} - 0\,\mathrm{V}) = R_\mathrm{c}(6{,}906\,\mathrm{A}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_\mathrm{c} = 31{,}34\ \Omega} \qquad \textbf{(e)}$$