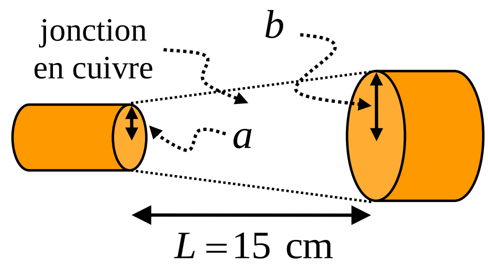
Électricité et magnétisme

Pré requis : Section 3.2

Le câble pseudo-conique

Un ingénieur doit faire la jonction entre un câble de cuivre de rayon $a = 1$ cm avec un câble de cuivre de rayon $b = 3$ cm (le câble est de forme cylindrique) séparé par une distance $L = 15$ cm. Pour ce faire, il devra construire un câble en forme de pseudo-cône (voir schéma ci-contre) afin de réaliser une transition linéaire entre le rayon a et le rayon b des deux câbles.



Déterminez la résistance du câble de jonction.

Solution :

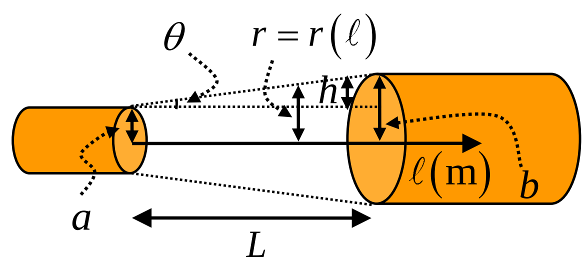
Pour déterminer la résistance du câble de jonction, nous devons considérer un petit élément de résistance du câble comme étant

$$\mathrm{d}R = \frac{\rho\,\mathrm{d}\ell}{A} = \frac{\rho\,\mathrm{d}\ell}{\pi r^2} = \frac{\rho}{\pi}\frac{\mathrm{d}\ell}{r^2}$$

où $r = r(\ell)$ est le rayon du pseudo-cône en fonction de la longueur de celui-ci.

À partir du schéma ci-contre, nous pouvons extraire des propriétés trigonométriques de notre pseudo-cône :

- $\tan(\theta) = \dfrac{b-a}{L}$
- $\tan(\theta) = \dfrac{h}{\ell}$
- $r = a + h$



En regroupant ces relations, nous pouvons définir la fonction $r = r(\ell)$ pour définir le rayon du disque à l'intérieur du pseudo-cône :

$r = a + h \quad \Rightarrow \quad r = a + (\ell \tan(\theta))$ (Remplacer avec $\tan(\theta) = \dfrac{h}{\ell}$)

$\Rightarrow \quad \boxed{r = a + \ell\left(\dfrac{b-a}{L}\right)}$ (Remplacer $\tan(\theta) = \dfrac{b-a}{L}$)

Pré requis : Section 3.2

Avec l'expression de $r = r(\ell)$, nous pouvons formuler une intégrale permettant d'évaluation la résistance R :

$$R = \int \mathrm{d}R \quad \Rightarrow \quad R = \int \frac{\rho}{\pi}\frac{\mathrm{d}\ell}{r^2} \qquad \text{(Remplacer } \mathrm{d}R = \frac{\rho}{\pi}\frac{\mathrm{d}\ell}{r^2}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{\rho}{\pi}\int \frac{\mathrm{d}\ell}{\left(a + \ell\left(\frac{b-a}{L}\right)\right)^2} \qquad \text{(Remplacer } r = a + \ell\left(\frac{b-a}{L}\right)\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{\rho}{\pi}\int \frac{\mathrm{d}\ell}{\left(a + W\ell\right)^2} \qquad \text{(Remplacer } W = \frac{b-a}{L} = \frac{(3\,\mathrm{cm})-(1\,\mathrm{cm})}{(15\,\mathrm{cm})} = 0{,}1333\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{\rho}{\pi}\int_{\ell=0}^{L} \frac{\mathrm{d}\ell}{\left(a + W\ell\right)^2} \qquad \text{(Borne : } \ell = 0 \to L\text{)}$$

Pour résoudre cette intégrale, effectuons le changement de variable suivant :

Changement de variable	Changement de borne
$u = a + W\ell$ $\mathrm{d}u = W\mathrm{d}\ell$	$\ell = 0 \quad \to \quad u = a$ $\ell = L \quad \to \quad u = a + WL$

En intégrant le changement de variable $u = a + W\ell$, nous obtenons l'intégrale suivante :

$$R = \frac{\rho}{\pi}\int_{\ell=0}^{L} \frac{\mathrm{d}\ell}{\left(a + W\ell\right)^2} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\rho}{\pi}\int_{u=a}^{a+WL} \frac{\mathrm{d}u / W}{u^2} \qquad \text{(Changement de variable)}$$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{\rho}{\pi W}\int_{u=a}^{a+WL} u^{-2}\mathrm{d}u \qquad \text{(Factoriser et réécriture)}$$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{\rho}{\pi W}\left[\frac{u^{-1}}{-1}\right]_a^{a+WL} \qquad \left(\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right)$$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{\rho}{\pi W}\left(\left(\frac{-1}{a+WL}\right) - \left(\frac{-1}{a}\right)\right) \qquad \left(\int_A^B f(x)\mathrm{d}x = F(B) - F(A)\right)$$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{\rho}{\pi W}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+WL}\right) \qquad \text{(Distribuer signe négatif)}$$

Continuons notre simplification à l'aide d'un dénominateur commun :

$$R = \frac{\rho}{\pi W}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+WL}\right) \Rightarrow \quad R = \frac{\rho}{\pi W}\left(\frac{a+WL}{a\left(a+WL\right)} - \frac{a}{a\left(a+WL\right)}\right) \quad \text{(Dénominateur commun)}$$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{\rho}{\pi W}\left(\frac{WL}{a\left(a+WL\right)}\right) \quad \text{(Additionner fraction)}$$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{\rho L}{\pi a\left(a+WL\right)} \quad \text{(Simplifier } W\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{\rho L}{\pi a\left(a+\left(\frac{b-a}{L}\right)L\right)} \quad \text{(Remplacer } W = \frac{b-a}{L}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{R = \frac{\rho L}{\pi ab}} \quad \text{(Simplifier)}$$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{\left(1,7\times10^{-8}\,\Omega\cdot\text{m}\right)\left(0,15\,\text{m}\right)}{\pi\left(0,01\text{m}\right)\left(0,03\text{m}\right)} \quad \left(\rho_{\text{cuivre}} = 1,7\times10^{8}\,\Omega\cdot\text{m}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{R = 2,705\times10^{-6}\,\Omega}$$