Électricité et magnétisme

Pré requis : Section 2.8

Les deux condensateurs sphériques

On charge positivement un condensateur sphérique (une sphère conductrice) A de 5 cm de rayon avec une énergie de 9 μJ. À une très grande distance de la sphère A, on charge positivement un autre condensateur sphérique B de 8 cm de rayon avec une énergie de 4 μJ. On pousse sur les deux sphères pour les rapprocher et elles sont immobilisées à une distance centre à centre de 3 m. Par la suite, on relie les deux sphères à l'aide d'un mince fil conducteur.

À l'équilibre électrostatique, évaluez la variation de l'énergie potentielle électrique totale (sphère A, sphère B et système A-B) depuis les deux chargements.

Remarque : On suppose que le fil qui relie les deux sphères est neutre et que les deux sphères possèdent une densité surfacique de charge uniforme en raison de la grande distance qui les séparent comparativement à leur diamètre.

Solution :

Évaluons la capacité de nos deux sphères conductrices :

$$C = \frac{R}{k}$$

$$C_A = \frac{R_A}{k} \quad \Rightarrow \quad C_A = \frac{(0{,}05)}{(9\times10^9)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_A = 5{,}556\times10^{-12}\,\mathrm{F}}$$

$$C_B = \frac{R_B}{k} \quad \Rightarrow \quad C_B = \frac{(0{,}08)}{(9\times10^9)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_B = 8{,}889\times10^{-12}\,\mathrm{F}}$$

Évaluons la charge initiale de nos deux sphères avec la capacité des sphères conductrices et leur énergie initiale :

$$U_e = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \quad \Rightarrow \quad q = \sqrt{2U_e C}$$

$$q_A = \sqrt{2U_{eA}C_A} \quad \Rightarrow \quad q_A = \sqrt{2(9\times10^{-6})(5{,}556\times10^{-12})} \quad \Rightarrow \quad \boxed{q_A = 10\times10^{-9}\,\mathrm{C}}$$

$$q_B = \sqrt{2U_{eB}C_B} \quad \Rightarrow \quad q_B = \sqrt{2(4\times10^{-6})(8{,}889\times10^{-12})} \quad \Rightarrow \quad \boxed{q_B = 8{,}433\times10^{-9}\,\mathrm{C}}$$

Électricité et magnétisme

Pré requis : Section 2.8

Évaluons l'énergie potentielle électrique du système AB lorsque les deux sphères sont éloignées par une très grande distance :

$$U_{eAB\infty} = k\frac{q_A q_B}{r_\infty} \quad \Rightarrow \quad U_{eAB\infty} = k\frac{q_A q_B}{(\infty)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_{eAB\infty} = 0}$$

Par curiosité, évaluons l'énergie potentielle électrique du système AB lorsque les deux sphères sont séparées par 3 m :

$$U_{eAB} = k\frac{q_A q_B}{r} \quad \Rightarrow \quad U_{eAB} = \left(9\times10^9\right)\frac{\left(10\times10^{-9}\right)\left(8{,}433\times10^{-9}\right)}{(3)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_{eAB} = 0{,}253\times10^{-6}\,\text{J}}$$

Évaluons la charge totale sur les deux sphères :

$$q_{tot} = q_A + q_B \quad \Rightarrow \quad q_{tot} = \left(10\times10^{-9}\right) + \left(8{,}433\times10^{-9}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{q_{tot} = 18{,}43\times10^{-9}\,\text{C}}$$

Effectuons la séparation des charges après l'équilibre statique. Évaluons la charge sur la sphère A et la sphère B afin d'avoir un potentiel électrique commun sur chaque sphère :

$$q_{tot} = Q_{tot} = Q_A + Q_B \qquad \text{et} \qquad Q_A \neq Q_B$$

Remarque : q_A et q_B désigne la charge sur les sphères A et B **avant** l'équilibre statique.
Q_A et Q_B désigne la charge sur les sphères A et B **après** l'équilibre statique.

$V_A = V_B \quad \Rightarrow \quad k\dfrac{Q_A}{r_A} = k\dfrac{Q_B}{r_B}$ (Potentiel charge ponctuelle : $V = k\dfrac{Q}{r}$)

$\Rightarrow \quad \dfrac{Q_A}{r_A} = \dfrac{\left(Q_{tot} - Q_A\right)}{r_B}$ (Simplifier k, remplacer $Q_B = Q_{tot} - Q_A$)

$\Rightarrow \quad \dfrac{Q_A}{r_A} + \dfrac{Q_A}{r_B} = \dfrac{Q_{tot}}{r_B}$ (Développer la fraction et isoler termes en Q_A)

$\Rightarrow \quad Q_A\left(\dfrac{r_B + r_A}{r_A r_B}\right) = \dfrac{Q_{tot}}{r_B}$ (Factorier Q_A et dénominateur commun)

$\Rightarrow \quad \boxed{Q_A = \dfrac{r_A Q_{tot}}{r_B + r_A}}$ (Isoler Q_A et simplifier r_B)

$\Rightarrow \quad Q_A = \dfrac{(0{,}05)\left(18{,}43\times10^{-9}\right)}{(0{,}08) + (0{,}05)}$ (Remplacer valeurs numériques)

$\Rightarrow \quad \boxed{Q_A = 7{,}0895\times10^{-9}\,\text{C}}$ (Évaluer Q_A)

Nous pouvons maintenant évaluer la charge sur la sphère B :

$$Q_{\text{tot}} = Q_{\text{A}} + Q_{\text{B}} \quad \Rightarrow \quad \left(18{,}43\times10^{-9}\right) = \left(7{,}0895\times10^{-9}\right) + Q_{\text{B}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{Q_{\text{B}} = 11{,}34\times10^{-9}\ \text{C}}$$

Évaluons l'énergie potentielle électrique du système AB lorsque les deux sphères sont rapprochées et à l'équilibre statique :

$$U_{\text{eAB(après)}} = k\frac{Q_{\text{A}}Q_{\text{B}}}{r} \quad \Rightarrow \quad U_{\text{eAB(après)}} = k\frac{\left(7{,}0895\times10^{-9}\right)\left(11{,}43\times10^{-9}\right)}{(3)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{U_{\text{eAB(après)}} = 0{,}2413\times10^{-6}\ \text{J}}$$

Évaluons l'énergie potentielle électrique emmagasinée sur chaque sphère à partir de la charge de celles-ci :

$$U_{\text{eA(après)}} = \frac{1}{2}\frac{{Q_{\text{A}}}^2}{C_{\text{A}}} \quad \Rightarrow \quad U_{\text{eA(après)}} = \frac{1}{2}\frac{\left(7{,}0895\times10^{-9}\right)^2}{\left(5{,}556\times10^{-12}\right)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_{\text{eA(après)}} = 4{,}5235\times10^{6}\ \text{J}}$$

$$U_{\text{eB(après)}} = \frac{1}{2}\frac{{Q_{\text{B}}}^2}{C_{\text{B}}} \quad \Rightarrow \quad U_{\text{eB(après)}} = \frac{1}{2}\frac{\left(11{,}34\times10^{-9}\right)^2}{\left(8{,}889\times10^{-12}\right)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_{\text{eB(après)}} = 7{,}238\times10^{6}\ \text{J}}$$

Voici un tableau décrivant l'évolution de l'énergie potentielle électrique ainsi que la variation totale :

Énergie	Éloignée	Rapproché	À l'équilibre statique (rapproché)	Variation (ΔU_{e})
U_{eA}	$9\ \mu\text{J}$	$9\ \mu\text{J}$	$4{,}5235\ \mu\text{J}$	$-4{,}477\ \mu\text{J}$
U_{eB}	$4\ \mu\text{J}$	$4\ \mu\text{J}$	$7{,}238\ \mu\text{J}$	$+3{,}238\ \mu\text{J}$
U_{eAB}	$0\ \mu\text{J}$	$0{,}253\ \mu\text{J}$	$0{,}2413\ \mu\text{J}$	$+0{,}2413\ \mu\text{J}$
			Sommaire :	$-0{,}9976\ \mu\text{J}$