Électricité et magnétisme

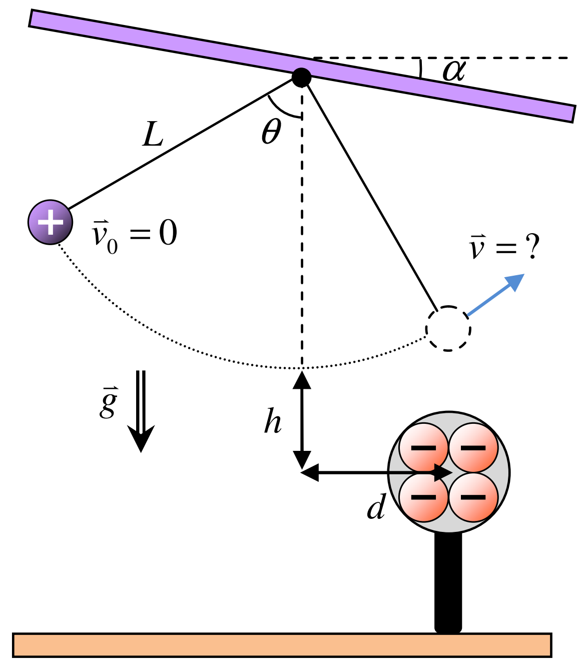
Pré requis : Section 2.5

Le pendule chargé

Un pendule de masse $m = 50$ g et de longueur $L = 1{,}5$ m est suspendu à la verticale au centre d'une plaque chargée positivement (PPIUC). La plaque est inclinée avec un angle $\alpha = 10°$ sous l'horizontale et elle génère un champ électrique de module $E_P = 50\,000$ N/C. Une sphère portant une charge $Q = -1{,}5$ μC est située à une hauteur $h = 0{,}2$ m sous le pendule.

On déplace la sphère horizontalement sur une distance $d = 0{,}3$ m du côté droit et on élève le pendule du côté gauche afin que la corde du pendule soit tendue et qu'elle forme un angle $\theta = 60°$ par rapport à la verticale (voir schéma ci-contre).

On charge le pendule avec une charge $q = 4$ μC et on le lâche. Évaluer le module de la vitesse du pendule lorsque celui-ci sera au-dessus de la sphère.

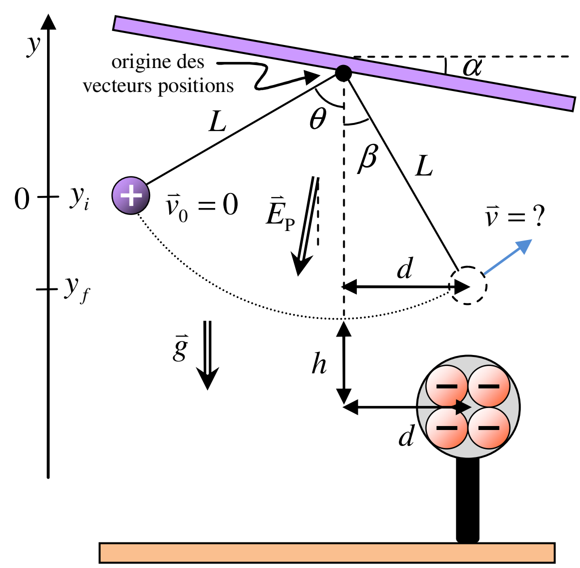


(Schéma après le déplacement de la sphère et du pendule)

Solution :

Considérons un système d'axe ayant comme origine **le point de fixation du pendule** pour positionner la sphère et le pendule à la situation initiale et finale.

Utilisons un aye y pour mesurer la hauteur du pendule telle que $y = 0$ est située à la position initiale du pendule.



Évaluons l'inclinaison de la corde β lorsque le pendule est situé à la position finale :

$$\sin(\beta) = \frac{d}{L} \quad \Rightarrow \quad \beta = \arcsin\left(\frac{d}{L}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \beta = \arcsin\left(\frac{(0{,}3)}{(1{,}5)}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\beta = 11{,}54°}$$

Électricité et magnétisme

Pré requis : Section 2.5

Évaluons les vecteurs positions de la sphère et du pendule à la position initiale et finale :

- Position de la sphère :

$$\vec{r}_S = d\,\vec{i} - (L+h)\,\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_S = (0{,}3)\vec{i} - ((1{,}5)+(0{,}2))\,\vec{j}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{r}_S = (0{,}3\,\vec{i} - 1{,}7\,\vec{j})\ \text{m}}$$

- Position du pendule initiale :

$$\vec{r}_i = -L\sin(\theta)\vec{i} - L\cos(\theta)\,\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_i = -(1{,}5)\sin(60°)\vec{i} - (1{,}5)\cos(60°)\,\vec{j}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{r}_i = (-1{,}30\,\vec{i} - 0{,}75\,\vec{j})\ \text{m}}$$

- Position du pendule finale :

$$\vec{r}_f = d\,\vec{i} - L\cos(\beta)\,\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_f = (0{,}3)\vec{i} - (1{,}5)\cos(11{,}54°)\,\vec{j}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{r}_f = (0{,}3\,\vec{i} - 1{,}47\,\vec{j})\ \text{m}}$$

Évaluons le vecteur déplacement $\vec{s}$ de notre pendule :

$$\vec{s} = \vec{r}_f - \vec{r}_i \quad \Rightarrow \quad \vec{s} = (0{,}3\,\vec{i} - 1{,}47\,\vec{j}) - (-1{,}30\,\vec{i} - 0{,}75\,\vec{j}) \qquad (s = 1{,}7545\ \text{m})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{s} = (1{,}6\,\vec{i} - 0{,}72\,\vec{j})\ \text{m}} \qquad \vec{s} = (d + L\sin(\theta))\,\vec{i} + L(\cos(\theta) - \cos(\beta))\,\vec{j}$$

(Solution algébrique)

Évaluons la distance entre notre pendule et la sphère lorsque le pendule occupe la position initiale et finale :

$$\vec{r}_{Si} = \vec{r}_S - \vec{r}_i \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_{Si} = (0{,}3\,\vec{i} - 1{,}7\,\vec{j}) - (-1{,}30\,\vec{i} - 0{,}75\,\vec{j})$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}_{Si} = (1{,}6\,\vec{i} - 0{,}95\,\vec{j})\ \text{m}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{r_{Si} = 1{,}861\ \text{m}} \qquad r_{Si} = \sqrt{(d + L\sin(\theta))^2 + (-L - h + L\cos(\theta))^2}$$

(Solution algébrique)

$$\vec{r}_{Sf} = \vec{r}_S - \vec{r}_f \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_{Sf} = (0{,}3\,\vec{i} - 1{,}7\,\vec{j}) - (0{,}3\,\vec{i} - 1{,}47\,\vec{j})$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}_{Sf} = -0{,}23\,\vec{j}\ \text{m}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{r_{Sf} = 0{,}23\ \text{m}} \qquad r_{Sf} = |L(\cos(\beta) - 1) - h|$$

(Solution algébrique)

Électricité et magnétisme

Pré requis : Section 2.5

Évaluons le vecteur champ électrique $\vec{E}_{\mathrm{P}}$ généré par la plaque chargée :

$$\vec{E}_{\mathrm{P}} = E_{x\mathrm{P}}\,\vec{i} + E_{y\mathrm{P}}\,\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_{\mathrm{P}} = -E_{\mathrm{P}}\sin(\alpha)\,\vec{i} - E_{\mathrm{P}}\cos(\alpha)\,\vec{j} \qquad \text{(Projection)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}_{\mathrm{P}} = -(50\,000)\sin(10°)\,\vec{i} - (50\,000)\cos(10°)\,\vec{j} \qquad \text{(Remplacer)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{E}_{\mathrm{P}} = (-0{,}868\,\vec{i} - 4{,}924\,\vec{j})\times 10^{4}\ \mathrm{N/C}} \qquad \text{(Calcul)}$$

Évaluons l'énergie potentielle électrique associée au système pendule-sphère à la situation initiale et finale :

- $$U_{\mathrm{eS}i} = k\frac{qQ_{\mathrm{S}}}{r_{\mathrm{S}i}} \quad \Rightarrow \quad U_{\mathrm{eS}i} = (9\times 10^{9})\frac{(4\times 10^{-6})(-1{,}5\times 10^{-6})}{(1{,}861)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_{\mathrm{eS}i} = -0{,}0290\ \mathrm{J}}$$

- $$U_{\mathrm{eS}f} = k\frac{qQ_{\mathrm{S}}}{r_{\mathrm{S}f}} \quad \Rightarrow \quad U_{\mathrm{eS}f} = (9\times 10^{9})\frac{(4\times 10^{-6})(-1{,}5\times 10^{-6})}{(0{,}23)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_{\mathrm{eS}f} = -0{,}2348\ \mathrm{J}}$$

Évaluons l'énergie potentielle gravitationnelle associée au système pendule-Terre à la situation initiale et finale :

$y_i = 0$ et $y_f = -0{,}72\ \mathrm{m}$ (provenant de la composante y de $\vec{s}$)

- $$U_{\mathrm{g}i} = mgy_i \quad \Rightarrow \quad U_{\mathrm{g}i} = (0{,}05)(9{,}8)(0) \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_{\mathrm{g}i} = 0}$$

- $$U_{\mathrm{g}f} = mgy_f \quad \Rightarrow \quad U_{\mathrm{g}f} = (0{,}05)(9{,}8)(-0{,}72) \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_{\mathrm{g}f} = -0{,}3528\ \mathrm{J}}$$

Évaluons la variation de l'énergie potentielle électrique associée au déplacement du pendule dans le champ électrique généré par la plaque :

$$\Delta U_{\mathrm{eP}} = q\Delta V_{\mathrm{P}} \qquad (\Delta U_{\mathrm{e}} = q\Delta V)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta U_{\mathrm{eP}} = q(-\vec{E}_{\mathrm{P}}\cdot\vec{s}) \qquad (\Delta V = -\vec{E}\cdot\vec{s} = -Es\cos(\theta_{Es}))$$

$$\Rightarrow \quad \Delta U_{\mathrm{eP}} = -q(\vec{E}_{\mathrm{P}}\cdot\vec{s}) \qquad \text{(Factoriser signe négatif)}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta U_{\mathrm{eP}} = -q(E_{x\mathrm{P}}s_x + E_{y\mathrm{P}}s_y) \qquad (\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta U_{\mathrm{eP}} = -q((-0{,}868)(1{,}6) + (-4{,}924)(-0{,}72))\times 10^{4} \qquad \text{(Remplacer)}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta U_{\mathrm{eP}} = -q(-1{,}389 + 3{,}545)\times 10^{4} \qquad (\textbf{P.S.}\ \ \theta_{Es} = 75{,}773°)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta U_{\mathrm{eP}} = -(4\times 10^{-6})(2{,}156\times 10^{4}) \qquad (\textbf{P.S.}\ \ \Delta V_{\mathrm{P}} = -2{,}156\times 10^{4}\ \mathrm{V})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta U_{\mathrm{eP}} = -0{,}08624\ \mathrm{J}} \qquad \text{(Calcul)}$$

Électricité et magnétisme

Pré requis : Section 2.5

À partir de la conservation de l'énergie, évaluons l'énergie cinétique du pendule lors de la situation finale :

$$E_f = E_i + W_{\text{nc}} \quad \text{(Conservation de l'énergie)}$$

$$\Rightarrow \quad E_f = E_i \quad (W_{\text{nc}} = 0)$$

$$\Rightarrow \quad K_f + U_f = K_i + U_i \quad (E = K + U)$$

$$\Rightarrow \quad K_f + U_f = U_i \quad (K_i = 0 \text{ car } v_i = 0)$$

$$\Rightarrow \quad K_f + \left(U_{\text{eS}f} + U_{\text{g}f} + U_{\text{eP}f}\right) = \left(U_{\text{eS}i} + U_{\text{g}i} + U_{\text{eP}i}\right) \quad (U = U_{\text{eS}} + U_{\text{g}} + U_{\text{eP}})$$

$$\Rightarrow \quad K_f + U_{\text{eS}f} + U_{\text{g}f} + U_{\text{eP}f} - U_{\text{eP}i} = U_{\text{eS}i} + U_{\text{g}i} \quad \text{(Former terme } U_{\text{eP}f} - U_{\text{eP}i}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad K_f + U_{\text{eS}f} + U_{\text{g}f} + \Delta U_{\text{eP}} = U_{\text{eS}i} + U_{\text{g}i} \quad (\Delta U_{\text{eP}} = U_{\text{eP}f} - U_{\text{eP}i})$$

$$\Rightarrow \quad K_f = U_{\text{eS}i} - U_{\text{eS}f} + U_{\text{g}i} - U_{\text{g}f} - \Delta U_{\text{eP}} \quad \text{(Isoler } K_f\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad K_f = (-0{,}0290) - (-0{,}2348) + (0) - (-0{,}3528) - (-0{,}08624) \quad \text{(Remplacer)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{K_f = 0{,}64484 \text{ J}} \quad \text{(Calcul)}$$

Évaluons la vitesse de pendule lors de la situation finale à partir de son énergie cinétique :

$$K_f = \frac{1}{2} m v_f^{\,2} \quad \Rightarrow \quad v_f = \sqrt{\frac{2K_f}{m}} \quad \text{(Isoler } v_f\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad v_f = \sqrt{\frac{2(0{,}64484)}{(0{,}050)}} \quad \text{(Remplacer)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_f = 5{,}079 \text{ m/s}} \quad \text{(Calcul)}$$