Électricité et magnétisme

Pré requis : Section 1.8

La tige polarisée

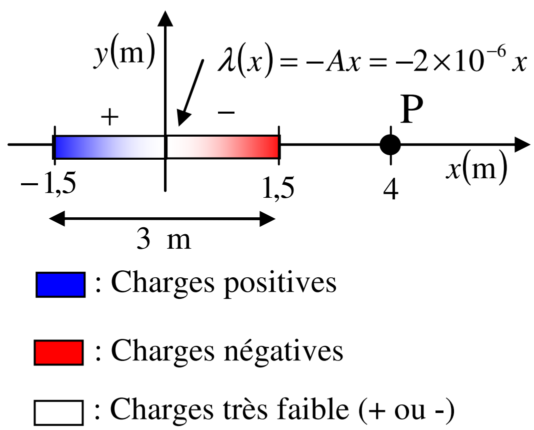
Une tige de 3 m de longueur est centrée à l'origine d'un système d'axe xy tout en étant sur l'axe x. La charge électrique totale de la tige est nulle, mais elle est polarisée donnant une distribution de charges $\lambda(x)$ en coulombs par mètre de la forme suivante :

$$\lambda(x) = -A\,x \quad \text{où} \quad A = 2\times10^{-6}\,\text{C/m}^2$$

Évaluer le champ électrique $\vec{E}$ généré par la tige à la coordonnée (x = 4 m, y = 0 m) du système d'axe.

Solution :

Voici une représentation de la distribution des charges :



Découpons notre tige en morceau de tige infinitésimale de largeur $\mathrm{d}x$ et représentons le champ électrique infinitésimal $\mathrm{d}\vec{E}$ produit par cette charge infinitésimale $\mathrm{d}Q$ à l'aide de notre système d'axe :

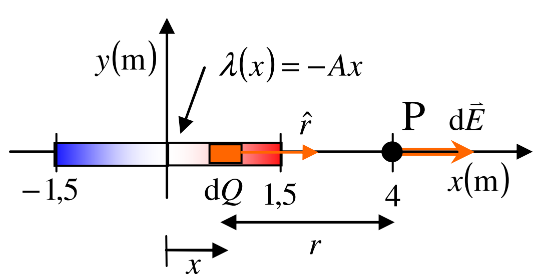
<u>Champ électrique infinitésimal :</u>

$$\mathrm{d}\vec{E} = k\frac{\mathrm{d}Q}{r^2}\hat{r}$$

et $$\mathrm{d}Q = \lambda(x)\mathrm{d}x = -Ax\,\mathrm{d}x$$

$$r = 4 - x$$

$$\hat{r} = \vec{i}$$



Pré requis : Section 1.8

Posons notre intégrale afin d'additionner toute la contribution au champ électrique de tous les $\mathrm{d}Q$ situés sur la tige entre la coordonnée $x=-1{,}5$ m et $x=1{,}5$ m :

$$\vec{E}=\int \mathrm{d}\vec{E}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}=\int k\frac{\mathrm{d}Q}{r^2}\hat{r} \qquad \text{(Remplacer } \mathrm{d}\vec{E}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}=\int k\frac{(-Ax\,\mathrm{d}x)}{(4-x)^2}(\vec{i}\,) \qquad \text{(Remplacer } r\text{, } \hat{r} \text{ et } \mathrm{d}Q\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}=-Ak\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{(4-x)^2}\vec{i} \qquad \text{(Factoriser les constantes)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{E}=-Ak\int_{x=-1,5}^{1,5}\frac{x\,\mathrm{d}x}{(4-x)^2}\vec{i}} \qquad \text{(Borne : } x=-1{,}5\to 1{,}5\text{)}$$

Afin de résoudre l'intégrale, effectuons le changement de variable suivant :

Changement de variable	Changement bornes de l'intégrale
$u=4-x \quad \Rightarrow \quad x=4-u$ $\mathrm{d}u=-\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x=-\mathrm{d}u$	$x\to-1{,}5 \quad \Rightarrow \quad u=4-(-1{,}5)=5{,}5$ $x\to 1{,}5 \quad \Rightarrow \quad u=4-(1{,}5)=2{,}5$

Alors :

$$\vec{E}=-Ak\int_{x=-1,5}^{1,5}\frac{x\,\mathrm{d}x}{(4-x)^2}\vec{i}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}=-Ak\int_{u=5,5}^{2,5}\frac{(4-u)(-\mathrm{d}u)}{(u)^2}\vec{i} \qquad \text{(Changement de variable)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}=Ak\int_{u=5,5}^{2,5}\frac{(4-u)}{(u)^2}\mathrm{d}u\,\vec{i} \qquad \text{(Factoriser signe négatif)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}=Ak\left(\int_{u=5,5}^{2,5}\frac{4}{u^2}\mathrm{d}u+\int_{u=5,5}^{2,5}\frac{-1}{u}\mathrm{d}u\right)\vec{i} \qquad \text{(Somme des intégrales)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}=Ak\left(4\int_{u=5,5}^{2,5}\frac{\mathrm{d}u}{u^2}-\int_{u=5,5}^{2,5}\frac{\mathrm{d}u}{u}\right)\vec{i} \qquad \text{(Factoriser constante dans intégrale)}$$

Pré requis : Section 1.8

$$\vec{E} = Ak\left(4\int_{u=5,5}^{2,5}\frac{\mathrm{d}u}{u^2} - \int_{u=5,5}^{2,5}\frac{\mathrm{d}u}{u}\right)\vec{i} \qquad \text{(Équation précédente)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = Ak\left(4\left[\frac{-1}{u}\right]_{5,5}^{2,5} - \left[\ln\left|u\right|\right]_{5,5}^{2,5}\right)\vec{i} \qquad \text{(Résoudre l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = Ak\left(4\left[\frac{-1}{(2,5)} - \frac{-1}{(5,5)}\right] - \left[\ln\left|(2,5)\right| - \ln\left|(5,5)\right|\right]\right)\vec{i} \qquad \text{(Évaluer l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = Ak\left(4[-0,2182] - [-0,7885]\right)\vec{i} \qquad \text{(Calcul)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = \left(2\times10^{-6}\right)\left(9\times10^{9}\right)\left(-0,0843\right)\vec{i} \qquad \text{(Calcul et remplacer } A \text{ et } k\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{E} = -1517\ \vec{i}\ \text{N/C}} \qquad \text{(Réponse)}$$