Chapitre 6.X4 – La détection de collision en 3D

L'intersection entre deux triangles en mouvement à vitesse constante

Considérons deux triangles dont leurs trois points respectifs $\vec{P}_0$, $\vec{P}_1$ et $\vec{P}_2$ ainsi que $\vec{P}_3$, $\vec{P}_4$ et $\vec{P}_5$ sont en mouvement à vitesse constante tel que

$$\vec{P}_i = \vec{r}_i + \vec{v}_i t \quad ,$$

il y aura intersection entre ses deux triangles sous deux conditions générale et un cas particulier :

1. <u>Cas général 1 : Intersection *vertex-surface*</u>

   Intersection d'un point d'un triangle (usage de 1 point) avec le plan de l'autre triangle (usage de 3 points). Il faut que le point d'intersection soit à **l'intérieur du triangle**.
2. <u>Cas général 2 : Intersection *edge-edge* :</u>

   Intersection d'un segment d'un triangle (usage de 2 points) avec l'un des segments de l'autre triangle (usage de 2 points). Il faut que le point d'intersection soit à **l'intérieur des deux segments**.
3. <u>Cas particulier 1 : Intersection *vertex-edge* :</u>

   Dans le cas particulier où les plans des deux triangles sont coplanaires, il y a la possibilité qu'un point d'un triangle (usage de 1 point) soit en intersection avec l'un des segments de l'autre triangle (usage de 2 points). Il faut que le point d'intersection soit à **l'intérieur du segment**.
4. <u>Cas particulier 2 : Intersection *vertex-vertex* :</u>

   Dans le cas particulier où les plans des deux triangles sont coplanaires et qu'un point d'un triangle se déplace dans l'axe d'un segment de l'autre triangle, il semble nécessaire de considérer ce cas. Cependant, puisque le test de l'intersection sera réalisé sur les trois segments d'un triangle, l'intersection *vertex-edge* sera alors « testable » sur un autre segment et ce cas particulier sera évacué.

Dans ces trois cas possibles, les critères à satisfaire sont différent, mais partage un élément commun. Il est nécessaire de vérifier que <u>quatre points soient coplanaires</u> à un temps t à l'aide d'un critère[1] correspondant à la résolution d'un polynôme du 3$^{\text{ième}}$ degré

$$At^3 + Bt^2 + Ct + D = 0\,,$$

où les paramètre A, B, C et D dépendent des positions $\vec{P}_i = \vec{r}_i + \vec{v}_i t$ de chaque points des triangles.

Puisqu'il y a 6 points en tout pour les deux triangles et que l'on doit tester si quatre points sont coplanaires, nous avons à effectuer N tests que l'on peut dénombrer avec un calcul de combinatoire

$$N = \binom{n}{x} = \frac{n!}{(n-x)!\,x!}$$

où n correspond au nombre d'élément de l'ensemble et x la taille des groupe à réaliser <u>sans répétition</u>.

[1] Ce critère vous sera démontré dans les pages qui suivront.

Dans ce cas particulier à 6 points où l'on doit former des groupes de 4 points sans répétition, nous obtenons

$$N = \binom{6}{4} = \frac{6!}{(6-4)!4!} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6*5}{2*1} = 15 \text{ tests}$$

Dans le concret, nous aurons les tests suivants à réaliser :

Intersection *vertex-surface* (6)					
$\vec{P}_0$	$\vec{P}_1$	$\vec{P}_0$	$\vec{P}_3$	$\vec{P}_4$	$\vec{P}_5$
x	x	x	x		
x	x	x		x	
x	x	x			x
x		x	x	x	x
	x		x	x	x
	x	x	x	x	x

Intersection *edge-edge* (9)					
$\vec{P}_0$	$\vec{P}_1$	$\vec{P}_2$	$\vec{P}_3$	$\vec{P}_4$	$\vec{P}_5$
x	x		x	x	
x	x		x		x
x	x			x	x
x		x	x	x	
x		x	x		x
x		x		x	x
	x	x	x	x	
	x	x	x		x
	x	x		x	x

Pour chaque test, la résolution du polynôme du 3$^{\text{ième}}$ degré donnera soit :

- Aucune solution réelle (pas d'intersection possible).
- Une solution réelle (une possibilité d'intersection à vérifier)
- Trois solutions réelles (trois possibilités d'intersection à vérifier).
- Une infinité de solution réelle. Un changement d'algorithme d'intersection sera alors nécessaire, car l'intersection se réalisera en 2 dimensions. Ce cas particulier se réalise si le polynôme à résoudre est

  $$0t^3 + 0t^2 + 0t + 0 = 0 \quad .$$

  Dans ce cas particulier, il y aura une infinité de temps où les 4 points sont coplanaires et un test particulier d'intersection *vertex-edge* devra être réalisé puisqu'un point se déplace dans le plan d'un triangle ou un segment d'un triangle se déplace dans le plan de l'autre segment de l'autre triangle.

Après avoir obtenu les temps t pour obtenir les quatre points coplanaire, il faut vérifier si :

- L'intersection *vertex-surface* est réalisée à <u>l'intérieur du triangle</u>.
- L'intersection *edge-edge* est réalisée à <u>l'intérieur des deux segments</u>.
- Choisir l'intersection valide de moindre temps t positif ($t \geq 0$) s'il y en a une de valide.

Après avoir réalisé les 15 tests, il faut uniquement conserver le temps t le plus petit. Ce temps déterminera la position des 6 points des deux triangles qui seront en intersection.

Évaluer la normale à la surface d'un plan

Soit un plan formé par les trois points $\vec{P}_0$, $\vec{P}_1$ et $\vec{P}_2$, nous pouvons définir la normale à la surface $\vec{n}$ comme étant

$$\vec{n} = \left(\vec{P}_1 - \vec{P}_0\right)\times\left(\vec{P}_2 - \vec{P}_0\right)$$

<u>Preuve :</u>

En construction …

Évaluer la normale à la surface d'un plan dont les trois points sont en mouvement à vitesse constante

Soit trois points d'un plan $\vec{P}_0$, $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ et en mouvement à vitesse constante tel que

$$\vec{P}_i = \vec{r}_i + \vec{v}_i\, t \quad \forall\ i \in \{0,1,2\} \ ,$$

alors l'expression de la normale à la surface $\vec{n}$ du plan sera une fonction correspondant à un polynôme du 2[ième] degré dans le temps *t* tel que

$$\vec{n} = \vec{A}t^2 + \vec{B}t + \vec{C}$$

$$\text{où} \qquad \vec{A} = \vec{v}_{01}\times\vec{v}_{02} \ , \quad \vec{B} = \vec{r}_{01}\times\vec{v}_{02} + \vec{v}_{01}\times\vec{r}_{02} \quad \text{et} \quad \vec{C} = \vec{r}_{01}\times\vec{r}_{02}$$

$$\text{avec} \quad \vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i \quad \text{et} \quad \vec{v}_{ij} = \vec{v}_j - \vec{v}_i \ .$$

<u>Preuve :</u>

Si l'on pose que les points puissent bouger, alors nous avons :

$$\vec{P}_0 = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t \ , \qquad \vec{P}_1 = \vec{r}_1 + \vec{v}_1 t \quad \text{et} \quad \vec{P}_2 = \vec{r}_2 + \vec{v}_2 t$$

Introduisons la définition de ces trois points dans l'expression de la normale d'un plan du triangle constitué de ces trois points :

$$\vec{n} = \left(\vec{P}_1 - \vec{P}_0\right)\times\left(\vec{P}_2 - \vec{P}_0\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{n} = \left(\left(\vec{r}_1 + \vec{v}_1 t\right) - \left(\vec{r}_0 + \vec{v}_0 t\right)\right)\times\left(\left(\vec{r}_2 + \vec{v}_2 t\right) - \left(\vec{r}_0 + \vec{v}_0 t\right)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{n} = \left(\vec{r}_1 - \vec{r}_0 + \left(\vec{v}_1 - \vec{v}_0\right)t\right)\times\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_0 + \left(\vec{v}_2 - \vec{v}_0\right)t\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{n} = \left(\vec{r}_{01} + \vec{v}_{01}t\right)\times\left(\vec{r}_{02} + \vec{v}_{02}t\right) \qquad \left(\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i \quad \text{et } \vec{v}_{ij} = \vec{v}_j - \vec{v}_i\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{n} = \vec{r}_{01}\times\vec{r}_{02} + \vec{r}_{01}\times\vec{v}_{02}t + \vec{v}_{01}t\times\vec{r}_{02} + \vec{v}_{01}t\times\vec{v}_{02}t$$

$$\Rightarrow \quad \vec{n} = \vec{r}_{01}\times\vec{r}_{02} + \left(\vec{r}_{01}\times\vec{v}_{02} + \vec{v}_{01}\times\vec{r}_{02}\right)t + \left(\vec{v}_{01}\times\vec{v}_{02}\right)t^2$$

$$\Rightarrow \quad \vec{n} = \vec{A}t^2 + \vec{B}t + \vec{C} \quad \blacksquare \qquad \left(\text{Remplacer } \vec{A},\ \vec{B} \text{ et } \vec{C}\right)$$

L’expression d’un plan avec une normale à la surface

On peut représenter un plan à l’aide de l’expression

$$\vec{n} \cdot \left(\vec{r} - \vec{r}_0 \right) = 0$$

où $\vec{n}$ est la normale au plan, $\vec{r}_0$ est un point de référence du plan (ex : l’origine du plan) et $\vec{r}$ est un point quelconque situé dans le plan.

<u>Preuve :</u>

Une preuve est présentée dans les notes de cours NYC – Chapitre 6.2a.

L’expression d’un plan d’un triangle formé de trois points en mouvement à vitesse constante

Avec l’usage de l’expression du plan d’un triangle

$$\vec{n} \cdot \left(\vec{r} - \vec{P}_0 \right) = 0 \quad ,$$

nous intégrons l’expression du mouvement des points ce qui donne l’expression de la normale à la surface

$$\vec{n} = \vec{r}_{01} \times \vec{r}_{02} + \left(\vec{r}_{01} \times \vec{v}_{02} + \vec{v}_{01} \times \vec{r}_{02} \right) t + \left(\vec{v}_{01} \times \vec{v}_{02} \right) t^2$$

ce qui nous permet d’obtenir l’expression d’un plan constitué de trois points en mouvement

$$\vec{n} \cdot \left(\vec{r} - \left(\vec{r}_0 + \vec{v}_0 t \right) \right) = 0 \quad \text{avec} \quad \vec{P}_0 = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$$

où $\vec{r}$ est un point quelconque faisant parti du plan du triangle. Cette équation correspond à résoudre un polynôme du $3^{\text{ième}}$ degré pour chaque position $\vec{r}$ à déterminer dans le plan du triangle.

Le critère de quatre points coplanaires en mouvement à vitesse constante

Considérons quatre points $\vec{P}_0$, $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ et $\vec{P}_3$ pouvant bouger à vitesse constante. Nous pouvons déterminer plusieurs temps *t* où les quatre points seront coplanaires (situé dans un plan unique). Pour ce faire, nous pouvons considérer les points $\vec{P}_0$, $\vec{P}_1$ et $\vec{P}_2$ comme faisant parti d'un triangle et que le plan du triangle sera défini par l'équation

$$\vec{n} \cdot \left(\vec{r} - \left(\vec{r}_0 + \vec{v}_0 t\right)\right) = 0$$

avec

$$\vec{n} = \vec{r}_{01} \times \vec{r}_{02} + \left(\vec{r}_{01} \times \vec{v}_{02} + \vec{v}_{01} \times \vec{r}_{02}\right)t + \left(\vec{v}_{01} \times \vec{v}_{02}\right)t^2$$

où $\vec{r}$ devra correspondre à la position du quatrième point $\vec{P}_3$. Ainsi, les points seront coplanaires lorsque

$$\vec{n} \cdot \left(\left(\vec{r}_3 + \vec{v}_3 t\right) - \left(\vec{r}_0 + \vec{v}_0 t\right)\right) = 0 \quad \text{où} \quad \vec{r} = \vec{P}_3 = \vec{r}_3 + \vec{v}_3 t$$

Ce qui correspond à développer un polynôme du 3$^{\text{ième}}$ degré et à le solutionner dans le temps *t* et qui donne l'expression

$$At^3 + Bt^2 + Ct + D = 0$$

où

$$A = \left(\vec{v}_{01} \times \vec{v}_{02}\right) \cdot \vec{v}_{03} \ , \quad B = \left(\vec{v}_{01} \times \vec{v}_{02}\right) \cdot \vec{r}_{03} + \left(\vec{r}_{01} \times \vec{v}_{02} + \vec{v}_{01} \times \vec{r}_{02}\right) \cdot \vec{v}_{03}$$

$$, C = \left(\vec{r}_{01} \times \vec{v}_{02} + \vec{v}_{01} \times \vec{r}_{02}\right) \cdot \vec{r}_{03} + \vec{r}_{01} \times \vec{r}_{02} \cdot \vec{v}_{03} \ , D = \vec{r}_{01} \times \vec{r}_{02} \cdot \vec{r}_{03} \qquad \text{avec} \quad \vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i \quad \text{et} \quad \vec{v}_{ij} = \vec{v}_j - \vec{v}_i \ .$$

<u>Preuve :</u>

$$\vec{n} \cdot \left(\left(\vec{r}_3 + \vec{v}_3 t\right) - \left(\vec{r}_0 + \vec{v}_0 t\right)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{n} \cdot \left(\vec{r}_3 - \vec{r}_0 + \left(\vec{v}_3 - \vec{v}_0\right)t\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{n} \cdot \left(\vec{r}_{03} + \vec{v}_{03} t\right) = 0 \qquad \left(\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i \quad \text{et} \quad \vec{v}_{ij} = \vec{v}_j - \vec{v}_i\right)$$

$$\Rightarrow \quad \left(\vec{r}_{01} \times \vec{r}_{02} + \left(\vec{r}_{01} \times \vec{v}_{02} + \vec{v}_{01} \times \vec{r}_{02}\right)t + \left(\vec{v}_{01} \times \vec{v}_{02}\right)t^2\right) \cdot \left(\vec{r}_{03} + \vec{v}_{03} t\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\vec{r}_{01} \times \vec{r}_{02} + \left(\vec{r}_{01} \times \vec{v}_{02} + \vec{v}_{01} \times \vec{r}_{02}\right)t + \left(\vec{v}_{01} \times \vec{v}_{02}\right)t^2\right) \cdot \left(\vec{r}_{03} + \vec{v}_{03} t\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} &\vec{r}_{01} \times \vec{r}_{02} \cdot \vec{r}_{03} + \left(\vec{r}_{01} \times \vec{v}_{02} + \vec{v}_{01} \times \vec{r}_{02}\right)t \cdot \vec{r}_{03} + \left(\vec{v}_{01} \times \vec{v}_{02}\right)t^2 \cdot \vec{r}_{03} \\ &+ \vec{r}_{01} \times \vec{r}_{02} \cdot \vec{v}_{03} t + \left(\vec{r}_{01} \times \vec{v}_{02} + \vec{v}_{01} \times \vec{r}_{02}\right)t \cdot \vec{v}_{03} t + \left(\vec{v}_{01} \times \vec{v}_{02}\right)t^2 \cdot \vec{v}_{03} t = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} &\vec{r}_{01} \times \vec{r}_{02} \cdot \vec{r}_{03} + \left(\vec{r}_{01} \times \vec{v}_{02} + \vec{v}_{01} \times \vec{r}_{02}\right) \cdot \vec{r}_{03} t + \left(\vec{v}_{01} \times \vec{v}_{02}\right) \cdot \vec{r}_{03} t^2 \\ &+ \vec{r}_{01} \times \vec{r}_{02} \cdot \vec{v}_{03} t + \left(\vec{r}_{01} \times \vec{v}_{02} + \vec{v}_{01} \times \vec{r}_{02}\right) \cdot \vec{v}_{03} t^2 + \left(\vec{v}_{01} \times \vec{v}_{02}\right) \cdot \vec{v}_{03} t^3 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} &\left[\vec{r}_{01} \times \vec{r}_{02} \cdot \vec{r}_{03}\right] \\ &+ \left[\left(\vec{r}_{01} \times \vec{v}_{02} + \vec{v}_{01} \times \vec{r}_{02}\right) \cdot \vec{r}_{03} + \vec{r}_{01} \times \vec{r}_{02} \cdot \vec{v}_{03}\right]t \\ &+ \left[\left(\vec{v}_{01} \times \vec{v}_{02}\right) \cdot \vec{r}_{03} + \left(\vec{r}_{01} \times \vec{v}_{02} + \vec{v}_{01} \times \vec{r}_{02}\right) \cdot \vec{v}_{03}\right]t^2 \\ &+ \left[\left(\vec{v}_{01} \times \vec{v}_{02}\right) \cdot \vec{v}_{03}\right]t^3 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad At^3 + Bt^2 + Ct + D = 0 \quad \blacksquare \qquad \text{(Changement de variable)}$$

L'expression d'un plan par interpolation

La représentation d'un plan avec deux paramètres d'interpolation *ua et ub* prend la forme des expressions

$$\vec{r} = \vec{r}_0\left(1-u_\mathrm{A}-u_\mathrm{B}\right)+u_\mathrm{A}\vec{r}_{01}+u_\mathrm{B}\vec{r}_{02} \qquad \text{que l'on peut écrire sous la forme} \qquad \vec{r} = \vec{r}_0 + u_\mathrm{A}\vec{r}_{01}+u_\mathrm{B}\vec{r}_{02}$$

où $\vec{r}_{01} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$ et $\vec{r}_{02} = \vec{r}_2 - \vec{r}_0$ représente la base du plan.

Le critère du point intérieur à un triangle par coordonnée barycentrique

Soit un triangle formé des trois points $\vec{r}_0$, $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$, alors une point $\vec{r}$ sera situé dans un triangle si l'ensemble des <u>quatre points sont coplanaire</u> et si

$$u_\mathrm{A} \in [0,1] \quad \text{et} \quad u_\mathrm{B} \in [0,1] \quad \text{avec} \quad u_\mathrm{A}+u_\mathrm{B} \le 1$$

Avec les calculs

$$u_\mathrm{A} = \frac{(\vec{w}\cdot\vec{r}_{01})(\vec{r}_{02}\cdot\vec{r}_{02})-(\vec{w}\cdot\vec{r}_{02})(\vec{r}_{01}\cdot\vec{r}_{02})}{(\vec{r}_{01}\cdot\vec{r}_{01})(\vec{r}_{02}\cdot\vec{r}_{02})-(\vec{r}_{01}\cdot\vec{r}_{02})^2} \qquad \text{et} \qquad u_\mathrm{B} = \frac{(\vec{w}\cdot\vec{r}_{02})(\vec{r}_{01}\cdot\vec{r}_{01})-(\vec{w}\cdot\vec{r}_{01})(\vec{r}_{01}\cdot\vec{r}_{02})}{(\vec{r}_{01}\cdot\vec{r}_{01})(\vec{r}_{02}\cdot\vec{r}_{02})-(\vec{r}_{01}\cdot\vec{r}_{02})^2}$$

avec

$$\vec{w} = \vec{r} - \vec{r}_0 \ , \quad \vec{r}_{01} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0 \quad \text{et} \quad \vec{r}_{02} = \vec{r}_2 - \vec{r}_0 \ .$$

Les paramètre u_A et u_B correspondent au coordonnée barycentrique associé au triangle de points $\vec{r}_0$, $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$

Tel que le point d'intersection $\vec{r}$ est évaluée grâce à l'équation

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + u_\mathrm{A}\vec{r}_{01}+u_\mathrm{B}\vec{r}_{02}$$

<u>Preuve :</u>

Vous pouvez consulter les notes NYC – Chapitre 6.2b pour plus de détail.

Le critère de l'intersection *vertex-surface*

Pour vérifier s'il y a une intersection entre un point en mouvement et la surface d'un triangle en mouvement, il faut :

1) Évaluer les temps t où les 4 points sont coplanaires à l'aide de l'expression
$$At^3 + Bt^2 + Ct + D = 0 .$$

2) Pour tous les temps $t \geq 0$, obtenir la position des quatre points en mouvement à l'aide de l'équation
$$\vec{P}_i = \vec{r}_i + \vec{v}_i \, t \quad \forall \; i \in \{0, 1, 2, 3\}$$
qui correspond à la position de l'intersection pour le point en mouvement (3) et la position du triangle pour les 3 autres points (0, 1, 2) .

3) Identifier les points d'intersection à l'intérieur du triangle en mouvement en utilisant le critère des coordonnées barycentriques
$$u_{\mathrm{A}} \in [0, 1] \;\text{ ainsi que }\; u_{\mathrm{B}} \in [0, 1] \quad \text{avec} \quad u_{\mathrm{A}} + u_{\mathrm{B}} \leq 1$$

4) Déterminer le temps le plus petit où il y a intersection à l'intérieur du triangle.

L'expression d'une droite par interpolation

La représentation d'une droite avec un paramètre d'interpolation u prend la forme des expressions

$$\vec{P} = (1-u)\vec{r}_0 + u\,\vec{r}_1 \qquad \text{que l'on peut écrire sous la forme} \qquad \vec{P} = \vec{r}_0 + u\,\vec{r}_{01}$$

où $\vec{r}_{01} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$ représentant l'axe de la droite. Si le paramètre d'interpolation u varie entre $[0, 1]$, alors le point $\vec{P}$ est sur l'axe de la droite entre les extrémités $\vec{r}_0$ et $\vec{r}_1$. Autrement, le point $\vec{P}$ sera sur l'axe de la droite, mais à l'extérieur des extrémités.

Le calcul du point d'intersection entre deux droites coplanaires

Soit les positions $\vec{r}_0$ et $\vec{r}_1$ formant une droite A et les point $\vec{r}_2$ et $\vec{r}_3$ formant une droite B où ces trois points sont coplanaires, le point de l'intersection $\vec{P}$ entre ses deux droites peut être obtenu par les deux calculs

$$\vec{P} = \vec{r}_0 + u_{\mathrm{A}}\vec{r}_{01} \qquad \text{et} \qquad \vec{P} = \vec{r}_2 + u_{\mathrm{B}}\vec{r}_{23}$$

où

$$u_{\mathrm{A}} = \frac{\vec{r}_{23\perp} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_0)}{\vec{r}_{23\perp} \cdot \vec{r}_{01}} \qquad \text{et} \qquad u_{\mathrm{B}} = \frac{\vec{r}_{01\perp} \cdot (\vec{r}_0 - \vec{r}_2)}{\vec{r}_{01\perp} \cdot \vec{r}_{23}}$$

avec

$$\vec{r}_{01} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0 \;\;,\;\; \vec{r}_{23} = \vec{r}_3 - \vec{r}_2 \,,\;\; \vec{n} = \vec{r}_{01} \times \vec{r}_{23} \,,\;\; \vec{r}_{01\perp} = \vec{n} \times \vec{r}_{01} \;\; \text{et} \;\; \vec{r}_{23\perp} = \vec{n} \times \vec{r}_{23} \;\; .$$

Si u_{A} et u_{B} sont dans l'intervalle $[0, 1]$, alors l'intersection est à l'intérieur des deux droites.

<u>Preuve :</u>

Soit une droite A avec paramètre d'interpolation u_{A} tel que $\vec{P}_{\mathrm{A}} = \vec{r}_0 + u_{\mathrm{A}}\vec{r}_{01}$ et une droite B avec paramètre d'interpolation u_{B} tel que $\vec{P}_{\mathrm{B}} = \vec{r}_2 + u_{\mathrm{B}}\vec{r}_{23}$, le point d'intersection $\vec{P}$ des deux droites doit satisfaire l'égalité $\vec{P} = \vec{P}_{\mathrm{A}} = \vec{P}_{\mathrm{B}}$ ce qui nous donne l'équation à résoudre

$$\vec{r}_0 + u_{\mathrm{A}}\vec{r}_{01} = \vec{r}_2 + u_{\mathrm{B}}\vec{r}_{23}$$

où les deux termes u_{A} et u_{B} sont inconnus. Puisque nous ne disposons que d'une seule équation, utilisons une stratégie afin de faire disparaître une de ces deux variables de l'équation.

Pour ce faire, évaluons un vecteur $\vec{n}$ normale au plan formé par les deux droites par le calcul

$$\vec{n} = \vec{r}_{01} \times \vec{r}_{23} \quad .$$

Construisons un vecteur $\vec{r}_{01\perp}$ perpendiculaire à $\vec{r}_{01}$ et un vecteur $\vec{r}_{23\perp}$ perpendiculaire à $\vec{r}_{23}$ tout en étant dans le plan des deux droites ce qui s'obtient par le calcul

$$\vec{r}_{01\perp} = \vec{n} \times \vec{r}_{01} \qquad \text{et} \qquad \vec{r}_{23\perp} = \vec{n} \times \vec{r}_{23} \quad .$$

Introduisons ces nouveaux vecteurs à l'aide d'un produit scalaire dans notre équation à résoudre afin d'obtenir des solutions aux termes u_{A} et u_{B} :

$$\vec{r}_0 + u_{\mathrm{A}}\vec{r}_{01} = \vec{r}_2 + u_{\mathrm{B}}\vec{r}_{23} \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_{01\perp}\cdot\left(\vec{r}_0 + u_{\mathrm{A}}\vec{r}_{01}\right) = \vec{r}_{01\perp}\cdot\left(\vec{r}_2 + u_{\mathrm{B}}\vec{r}_{23}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}_{01\perp}\cdot\vec{r}_0 + u_{\mathrm{A}}\vec{r}_{01\perp}\cdot\vec{r}_{01} = \vec{r}_{01\perp}\cdot\vec{r}_2 + u_{\mathrm{B}}\vec{r}_{01\perp}\cdot\vec{r}_{23}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}_{01\perp}\cdot\vec{r}_0 = \vec{r}_{01\perp}\cdot\vec{r}_2 + u_{\mathrm{B}}\vec{r}_{01\perp}\cdot\vec{r}_{23} \qquad \left(\vec{r}_{01\perp} \perp \vec{r}_{01} \Rightarrow \vec{r}_{01\perp}\cdot\vec{r}_{01} = 0\right)$$

$$\Rightarrow \quad u_{\mathrm{B}} = \frac{\vec{r}_{01\perp}\cdot\vec{r}_0 - \vec{r}_{01\perp}\cdot\vec{r}_2}{\vec{r}_{01\perp}\cdot\vec{r}_{23}}$$

$$\Rightarrow \quad u_{\mathrm{B}} = \frac{\vec{r}_{01\perp}\cdot\left(\vec{r}_0 - \vec{r}_2\right)}{\vec{r}_{01\perp}\cdot\vec{r}_{23}} \quad \blacksquare \ (1)$$

$$\vec{r}_0 + u_{\mathrm{A}}\vec{r}_{01} = \vec{r}_2 + u_{\mathrm{B}}\vec{r}_{23} \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_{23\perp}\cdot\left(\vec{r}_0 + u_{\mathrm{A}}\vec{r}_{01}\right) = \vec{r}_{23\perp}\cdot\left(\vec{r}_2 + u_{\mathrm{B}}\vec{r}_{23}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \ldots$$

$$\Rightarrow \quad u_{\mathrm{A}} = \frac{\vec{r}_{23\perp}\cdot\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_0\right)}{\vec{r}_{23\perp}\cdot\vec{r}_{01}} \quad \blacksquare \ (2)$$

Le critère de l'intersection *edge-edge*

Pour vérifier s'il y a une intersection entre deux segments provenant de deux triangles en mouvement, il faut que :

1) Évaluer les temps t où les 4 points sont coplanaires à l'aide de l'expression
$$At^3 + Bt^2 + Ct + D = 0 .$$

2) Pour tous les temps $t \geq 0$, obtenir la position des quatre points en mouvement à l'aide de l'équation
$$\vec{P}_i = \vec{r}_i + \vec{v}_i\, t \quad \forall \ i \in \{0, 1, 2, 3\}$$
qui correspondent aux quatre points désignant les deux segments coplanaires.

3) Pour tous les temps positifs, déterminer les coordonnées du point de l'intersection en utilisant
$$u_{\mathrm{A}} = \frac{\vec{r}_{23\perp}\cdot\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_0\right)}{\vec{r}_{23\perp}\cdot\vec{r}_{01}} \quad \text{et} \quad u_{\mathrm{B}} = \frac{\vec{r}_{01\perp}\cdot\left(\vec{r}_0 - \vec{r}_2\right)}{\vec{r}_{01\perp}\cdot\vec{r}_{23}}$$

   et vérifiez si l'intersection est à l'intérieur des deux droites avec $u_{\mathrm{A}} \in [0,1]$ et $u_{\mathrm{B}} \in [0,1]$.

4) Déterminer le temps le plus petit où il y a intersection à l'intérieur des deux segments.

Le critère de trois points colinéaires

Soit trois points $\vec{P}_0$, $\vec{P}_1$ et $\vec{P}_2$ dans une système d'axe cartésien. Ces trois points seront colinéaires si

$$\vec{n} = \left(\vec{P}_1 - \vec{P}_0\right) \times \left(\vec{P}_2 - \vec{P}_0\right) = 0$$

Preuve :
Dire qu'avec une normale à la surface nulle … les points sont colinéaires …

Évaluer le moment où trois points en mouvement sont colinéaires

Soit trois points d'un triangle $\vec{P}_0$, $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ et en mouvement à vitesse constante tel que

$$\vec{P}_i = \vec{r}_i + \vec{v}_i\, t \quad \forall\ i \in \{0,1,2\} \ ,$$

alors ces trois points seront colinéaires à un temps t sous la condition de la résolution des polynômes du 2^ième^ degré suivants :

Critère avec base orthogonale	Critère avec base *xyz*
$\vec{A}\cdot\hat{u}\, t_u^{\,2} + \vec{B}\cdot\hat{u}\, t_u + \vec{C}\cdot\hat{u} = 0$ $\forall\ \hat{u} \in \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$	$A_x t_x^{\,2} + B_x t_x + C_x = 0$ $A_y t_y^{\,2} + B_y t_y + C_y = 0$ $A_z t_z^{\,2} + B_z t_z + C_z = 0$

où $\quad \vec{A} = \vec{v}_{01} \times \vec{v}_{02}$, $\vec{B} = \vec{r}_{01} \times \vec{v}_{02} + \vec{v}_{01} \times \vec{r}_{02}$ et $\vec{C} = \vec{r}_{01} \times \vec{r}_{02}$

avec $\quad \vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$, $\vec{v}_{ij} = \vec{v}_j - \vec{v}_i$.

C'est l'intersection des ensembles solutions en t_u qui déterminera s'il y a un temps t où les trois points $\vec{P}_0$, $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ sont colinéaires simultanément.

Cependant, il est important de préciser que vous des raisons numériques, il faut un niveau de tolérance dans le calcul des racines du polynôme du 2^ième^ degré. Un calcul avec un discriminant $\Delta < 0$ donne une solution complexe. Par contre, un calcul avec un Δ faiblement négatif ($\Delta \to 0^-$) peut considérer sa future composante complexe comme négligeable et ainsi permettre l'analyse du terme réel. Ce cas se produit lorsqu'il y a seulement un temps t où les points sont colinéaires.

Preuve :

$$\text{Si } \vec{n} = 0 \text{, alors } \vec{i} \cdot \left(\vec{A} t_i^{\,2} + \vec{B} t_i + \vec{C} \right) = 0 \quad \text{et solutionner } t_i = \{ t_{i1} , t_{i2} \}$$
$$\text{Si } \vec{n} = 0 \text{, alors } \vec{j} \cdot \left(\vec{A} t_j^{\,2} + \vec{B} t_j + \vec{C} \right) = 0 \quad \text{et solutionner } t_j = \{ t_{j1} , t_{j2} \}$$
$$\text{Si } \vec{n} = 0 \text{, alors } \vec{k} \cdot \left(\vec{A} t_k^{\,2} + \vec{B} t_k + \vec{C} \right) = 0 \quad \text{et solutionner } t_k = \{ t_{k1} , t_{k2} \}$$

S'il existe un temps t tel que $\vec{n} = 0$, alors la projection de $\vec{n}$ avec une base orthogonal $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sera nécessairement égal à zéro pour les trois vecteurs de la base. Ainsi, l'intersection des ensembles solutions donnera un ou deux temps communs et sera alors le ou les temps où la colinéarité se réalisera (s'il y a colinéarité). ■

Le critère de l'intersection *vertex-edge*

Pour vérifier s'il y a une intersection entre un point $\vec{P}_0$ et un segment formé par les deux points $\vec{P}_1$ et $\vec{P}_2$ provenant d'un triangle en mouvement, il faut que :

1) Évaluer les trois ensembles de solution de temps *t* où les 3 points sont colinéaires à l'aide des expressions

$$A_x t_x^{\,2} + B_x t_x + C_x = 0$$
$$A_y t_y^{\,2} + B_y t_y + C_y = 0$$
$$A_z t_z^{\,2} + B_z t_z + C_z = 0$$

2) Effectuer l'intersection des ensembles solutions (porter attention aux erreurs numériques comme $\Delta \to 0^-$) et conserver les temps positifs.
3) Pour tous les temps $t \geq 0$, obtenir la position des trois points en mouvement à l'aide de l'équation

$$\vec{P}_i = \vec{r}_i + \vec{v}_i \, t \quad \forall \ i \in \{0, 1, 2, 3\}$$

4) Pour tous les temps positifs, déterminer si l'intersection est à l'intérieur du segment à l'aide des deux critères

$$\left(\vec{P}_0 - \vec{P}_1\right) \cdot \left(\vec{P}_2 - \vec{P}_1\right) \geq 0 \quad \text{et} \quad \left(\vec{P}_0 - \vec{P}_2\right) \cdot \left(\vec{P}_2 - \vec{P}_1\right) \leq 0$$

5) Déterminer le temps le plus petit où il y a intersection à l'intérieur des deux segments.