Chapitre 6.X3 – La détection de collision en 2D

L'intersection entre un point et une forme géométrique en mouvement à vitesse constante en 2D

Considérons une point $\vec{P}_0$ ainsi qu'une forme géométrique contenant N points $\vec{P}_i$ où $i \in [1, N]$ et $N-1$ segments formés à l'aide de points consécutifs dont tous les points sont en mouvement à vitesse constante $\vec{v}$ tel que

$$\vec{P}_i = \vec{r}_i + \vec{v}_i t \quad ,$$

il y aura intersection entre le point $\vec{P}_0$ et l'un des segments de la forme géométrique sous l'une des conditions suivantes :

1. Cas général : L'intersection *vertex-edge* :
   L'intersection *vertex-edge* consiste à vérifier si le point $\vec{P}_0$ peut être en intersection avec un segment de la forme géométrique à un certain temps *t*.

2. Cas particulier : L'intersection *vertex-vertex* :
   L'intersection *vertex-vertex* consiste à vérifier si le point $\vec{P}_0$ se déplaçant dans l'axe d'un segment peut atteindre l'une des extrémités du segment.

Pour réaliser ces tests, il est nécessaire de vérifier que trois points soient colinéaires à un temps *t* à l'aide d'un critère[1] correspondant à la résolution d'un polynôme du 2ième degré

$$At^2 + Bt + C = 0 \, ,$$

où les paramètre *A*, *B* et *C* dépendent des positions $\vec{P}_i = \vec{r}_i + \vec{v}_i t$ de chacun des points en jeu.

Puisqu'il y a $N-1$ segments pour une géométrie, il faut répéter $N-1$ le critère précédent pour toutes les combinaisons possibles de point-segment.

Pour chaque test, la résolution du polynôme du 2ième degré donnera soit :

- Aucune solution réelle (pas d'intersection possible).
- Une solution réelle (une possibilité d'intersection à vérifier)
- Deux solutions réelles (deux possibilité d'intersection à vérifier).
- Une infinité de solution réelle. Un changement d'algorithme d'intersection sera alors nécessaire, car l'intersection se réalisera en 1 dimension. Ce cas particulier se réalise si le polynôme à résoudre est

  $$0t^2 + 0t + 0 = 0 \quad .$$

  Dans ce cas particulier, il y aura une infinité de temps où les 3 points sont colinéaire et un test particulier d'intersection *vertex-vertex* devra être réalisé puisqu'un point se déplace dans l'axe d'un segment.

---

[1] Ce critère vous sera démontré dans les pages qui suivront.

Après avoir obtenu les temps *t* pour obtenir les trois points colinéaire, il faut vérifier si :

- L'intersection *vertex-edge* est réalisée à l'intérieur du segment.
- Choisir l'intersection valide de moindre temps *t* positif ($t \geq 0$) s'il y en a une de valide.

Après avoir réalisé les $N-1$ tests, il faut uniquement conserver le temps *t* le plus petit. Ce temps déterminera la position du point $\vec{P}_0$ étant la position de l'intersection ainsi que la position des N points de la forme géométrique.

Remarque :

S'il y a une possibilité que des points à l'intérieur de la forme géométrique puissent entrer en intersection mutuellement, il faudra faire évoluer le système de point très judicieusement.

Les caractéristiques d'un segment en 2D

Un segment est toujours défini à l'aide de deux points $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$. On peut définir un vecteur déplacement

$$\vec{P}_{12} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$$

pour passer du point $\vec{P}_1$ au point $\vec{P}_2$. L'axe du segment est alors

$$\hat{a} = \frac{\vec{P}_{12}}{\left\| \vec{P}_{12} \right\|}$$

et la normale au segment dans le plan *xy* est alors

$$\hat{n} = \vec{k} \times \vec{a} = \left(a_y \, , \, -a_x \right)$$

où $\vec{k} = (0,0,1)$ est le vecteur unitaire selon l'axe *z* en $\Re^3$ que l'on peut utiliser pour justifier l'orientation de $\hat{n}$.

Dessin

en développement

Le déterminant dans $\Re^2$

Le calcul du déterminant de deux vecteurs $\vec{A} = \left(A_x \, , A_y\right)$ et $\vec{B} = \left(B_x \, , B_y\right)$ dans $\Re^2$ est égal à l'expression

$$\det\left(\vec{A}, \vec{B}\right) = \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} = A_x B_y - A_y B_x \quad .$$

Représentation graphique du déterminant

En construction …

Le critère de trois points colinéaires en 2D

Considérons trois points $\vec{P}_0$, $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ dans un plan cartésien *xy* en deux dimensions tel que

$$\vec{P}_0 = \left(P_{x0}, P_{y0}\right) \ , \ \vec{P}_1 = \left(P_{x1}, P_{y1}\right) \ \text{ et } \ \vec{P}_2 = \left(P_{x2}, P_{y2}\right),$$

nous pouvons vérifier si ces trois point sont colinéaires à l'aide du calcul du déterminant

$$\det\left(\vec{P}_1 - \vec{P}_0 \,, \vec{P}_2 - \vec{P}_0\right) = 0 \quad .$$

On peut développer ce calcul à l'aide de l'équation

$$\det\left(\vec{P}_{01}, \vec{P}_{02}\right) = \begin{vmatrix} P_{x01} & P_{y01} \\ P_{x02} & P_{y02} \end{vmatrix} = P_{x01}P_{y02} - P_{y01}P_{x02} = 0$$

où

$$\vec{P}_{01} = \vec{P}_1 - \vec{P}_0 \quad \text{et} \quad \vec{P}_{02} = \vec{P}_2 - \vec{P}_0 \ .$$

Preuve :

En construction …

Le pseudo produit vectoriel dans $\Re^2$

…

$$\vec{A} \tilde{\times} \vec{B} = \det\left(\vec{A}, \vec{B}\right) = A_x B_y - A_y B_x$$

Preuve :

Considérons deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ dans un plan cartésien *xy* dans $\Re^2$ que l'on peut associer à un plan cartésien *xyz* dans $\Re^3$ trois dimensions comme étant

$$\vec{A}^+ = \left(A_x, A_y, 0\right) \ \text{ et } \ \vec{B}^+ = \left(B_x, B_y, 0\right)$$

La composante *z* du produit vectoriel $\vec{A}^+$ et $\vec{B}^+$ donne

$$\left(\vec{A}^+ \times \vec{B}^+\right)_z = A_x B_y - A_y B_x$$

qui est exactement égal au déterminant

$$\det\left(\vec{A}, \vec{B}\right) = A_x B_y - A_y B_x \ .$$

Avec une simplification de notation

$$\vec{A} \tilde{\times} \vec{B} = \left(\vec{A}^+ \times \vec{B}^+\right)_z \ ,$$

nous avons alors

$$\vec{A} \tilde{\times} \vec{B} = \det\left(\vec{A}, \vec{B}\right) \ . \ \blacksquare$$

Le critère de trois points colinéaires en mouvement à vitesse constante en 2D

Soit trois points $\vec{P}_0$, $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ en deux dimensions en mouvement à vitesse constante où la position $\vec{r}$ en fonction du temps t dépend de la vitesse $\vec{v}$ tel que

$$\vec{P}_i = \vec{r}_i + \vec{v}_i\, t \quad \forall\ i \in \{0,1,2\} \quad ,$$

alors le temps t où ces trois points seront colinéaires sera déterminé par la résolution d'un polynôme du 2$^{\text{ième}}$ degré

$$At^2 + Bt + C = 0$$

avec

$$A = \det(\vec{v}_{01}\,,\,\vec{v}_{02}) \quad , \quad B = \det(\vec{r}_{01}\,,\,\vec{v}_{02}) + \det(\vec{v}_{01}\,,\,\vec{r}_{02}) \quad \text{et} \quad C = \det(\vec{r}_{01}\,,\,\vec{r}_{02})$$

avec

$$\vec{r}_{i\,j} = \vec{r}_j - \vec{r}_i \quad \text{et} \quad \vec{v}_{i\,j} = \vec{v}_j - \vec{v}_i \quad .$$

<u>Preuve :</u>

Si l'on pose que les points puissent bouger, alors nous avons :

$$\vec{P}_0 = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t \quad , \qquad \vec{P}_1 = \vec{r}_1 + \vec{v}_1 t \quad \text{et} \qquad \vec{P}_2 = \vec{r}_2 + \vec{v}_2 t$$

Introduisons la définition de ces trois points dans l'expression constitué de ces trois points :

	$\det\left(\vec{P}_1 - \vec{P}_0\,,\,\vec{P}_2 - \vec{P}_0\right) = 0$	(Critère de trois points colinéaires)
$\Rightarrow$	$\left(\vec{P}_1 - \vec{P}_0\right) \tilde{\times} \left(\vec{P}_2 - \vec{P}_0\right) = 0$	(Expression en pseudo prod. vect.)
$\Rightarrow$	$\left((\vec{r}_1 + \vec{v}_1 t) - (\vec{r}_0 + \vec{v}_0 t)\right) \tilde{\times} \left((\vec{r}_2 + \vec{v}_2 t) - (\vec{r}_0 + \vec{v}_0 t)\right) = 0$	(Remplacer $\vec{P}_i = \vec{r}_i + \vec{v}_i\, t \ \ \forall\ i \in \{0,1,2\}$)
$\Rightarrow$	$\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_0 + (\vec{v}_1 - \vec{v}_0)t\right) \tilde{\times} \left(\vec{r}_2 - \vec{r}_0 + (\vec{v}_2 - \vec{v}_0)t\right) = 0$	(Regrouper termes)
$\Rightarrow$	$\left(\vec{r}_{01} + \vec{v}_{01} t\right) \tilde{\times} \left(\vec{r}_{02} + \vec{v}_{02} t\right) = 0$	($\vec{r}_{i\,j} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$ et $\vec{v}_{i\,j} = \vec{v}_j - \vec{v}_i$)
$\Rightarrow$	$\vec{r}_{01} \tilde{\times} \vec{r}_{02} + \vec{r}_{01} \tilde{\times} \vec{v}_{02} t + \vec{v}_{01} t \tilde{\times} \vec{r}_{02} + \vec{v}_{01} t \tilde{\times} \vec{v}_{02} t = 0$	(Distribution du pseudo produit vectoriel)
$\Rightarrow$	$\vec{r}_{01} \tilde{\times} \vec{r}_{02} + \left(\vec{r}_{01} \tilde{\times} \vec{v}_{02} + \vec{v}_{01} \tilde{\times} \vec{r}_{02}\right)t + \vec{v}_{01} \tilde{\times} \vec{v}_{02}\, t^2 = 0$	(Factoriser terme en t)
$\Rightarrow$	$\det(\vec{r}_{01}\,,\,\vec{r}_{02}) + \left(\det(\vec{r}_{01}\,,\,\vec{v}_{02}) + \det(\vec{v}_{01}\,,\,\vec{r}_{02})\right)t + \det(\vec{v}_{01}\,,\,\vec{v}_{02})t^2 = 0$	(Expression en déterminant)
$\Rightarrow$	$At^2 + Bt + C = 0 \quad \blacksquare$	(Remplacer $\bar{A}$, $\bar{B}$ et $\bar{C}$)

Le critère du point intérieur à un segment

Considérons un point $\vec{P}_0$ situé sur l'axe d'un segment formé par les points $\vec{P}_1$ et $\vec{P}_2$. Pour vérifier si le point $\vec{P}_0$ est à l'intérieur du segment, il faut satisfaire les deux critères suivants :

Dessin

en construction …

1) $\left(\vec{P}_0 - \vec{P}_1\right)\cdot\left(\vec{P}_2 - \vec{P}_1\right) \geq 0$ (à l'intérieur de $\vec{P}_1$)
2) $\left(\vec{P}_0 - \vec{P}_2\right)\cdot\left(\vec{P}_2 - \vec{P}_1\right) \leq 0$ (à l'intérieur de $\vec{P}_2$)

Le critère de l'intersection *vertex-edge* en 2D

Pour vérifier s'il y a une intersection entre un point $\vec{P}_0$ et un segment formé par les deux points $\vec{P}_1$ et $\vec{P}_2$ en mouvement à vitesse constante, il faut :

1) Évaluer les temps *t* où les trois points $\vec{P}_0$, $\vec{P}_1$ et $\vec{P}_2$ sont colinéaires à l'aide de l'expression

$$At^2 + Bt + C = 0 \quad .$$

2) Pour tous les temps $t \geq 0$, obtenir la position des trois points en mouvement à l'aide de l'équation

$$\vec{P}_i = \vec{r}_i + \vec{v}_i\, t \quad \forall\ i \in \{0, 1, 2, 3\} \quad .$$

3) Pour tous les temps positifs, vérifier que le point d'intersection est à l'intérieur du segment à l'aide des deux critères

$$\left(\vec{P}_0 - \vec{P}_1\right)\cdot\left(\vec{P}_2 - \vec{P}_1\right) \geq 0 \quad \text{et} \quad \left(\vec{P}_0 - \vec{P}_2\right)\cdot\left(\vec{P}_2 - \vec{P}_1\right) \leq 0$$

4) Déterminer le temps le plus petit où il y a intersection à l'intérieur des deux segments.

Le critère de l'intersection *vertex-vertex*

En développement …

On peut utiliser le critère de l'intersection sphère-sphère (plus coûteux).

On peut utiliser une version alternative plus rapide (en développement).