Chapitre 6.X2 – La détection de collision

La détection de collision en mouvement à vitesse constante

Considérons une l'objet **A** en mouvement à vitesse constante tel que sa position est décrite par l'équation

$$\vec{r}_{\mathrm{A}} = \vec{r}_{\mathrm{A0}} + \vec{v}_{\mathrm{A}} t$$

où t correspond au temps écoulé depuis $t = 0$ permettant à l'objet **A** d'effectuer son déplacement à vitesse constante $\vec{v}_{\mathrm{A}}$.

Un objet **A** de position $\vec{r}_{\mathrm{A}}$ entrera en collision avec un objet **B** de position $\vec{r}_{\mathrm{B}}$ si ceux-ci se séparent par une certaine distance D_{colision} tel que

$$\left\| \vec{r}_{\mathrm{A}} - \vec{r}_{\mathrm{B}} \right\| = D_{\mathrm{collision}}$$

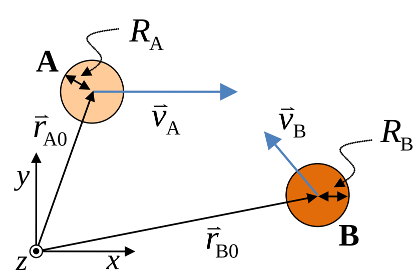
où l'expression mathématique de D_{colision} dépend de la forme géométrique des deux objets.

En résolvant l'équation précédente pour t, nous obtenons trois scénarios possibles :

Intersection dans la direction de $\vec{v}_{\mathrm{A}}$ (si l'objet **A** avancait)	Intersection dans la direction opposée à $\vec{v}_{\mathrm{A}}$ (si l'objet **A** reculait)	Aucune intersection possible entre l'objet **A** et **B**
$t > 0$	$t < 0$	$t = \{impossible\}$

La détection de collision entre deux sphères en mouvement à vitesse constante

Considérons deux sphères **A** et **B** de rayon R_{A} et R_{B} positionnées initialement selon les vecteurs $\vec{r}_{\mathrm{A0}}$ et $\vec{r}_{\mathrm{B0}}$ et se déplaçant à vitesse constante $\vec{v}_{\mathrm{A}}$ et $\vec{v}_{\mathrm{B}}$. Les deux sphères sont à l'extérieur de l'une de l'autre.



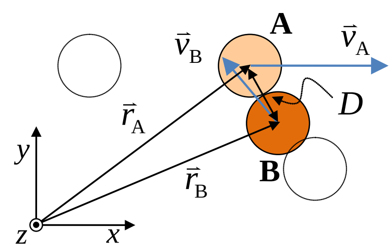
Mouvement avant la collision.

Les équations du mouvement du centre de nos deux sphères seront

$$\vec{r}_{\mathrm{A}} = \vec{r}_{\mathrm{A0}} + \vec{v}_{\mathrm{A}} t \quad \text{et} \quad \vec{r}_{\mathrm{B}} = \vec{r}_{\mathrm{B0}} + \vec{v}_{\mathrm{B}} t \quad .$$

Nous pouvons établir qu'il y aura collision entre nos deux sphères *seulement s'il y a une possibilité* que la distance centre à centre D de nos deux sphères soit égale à

$$D = R_{\mathrm{A}} + R_{\mathrm{B}} .$$



Lieu de la collision *si possible*.

En développant cette idée, nous arrivons à la conclusion que le temps t requis pour déterminer le lieu de la collision (s'il y en a collision) s'obtient par la résolution du polynôme du 2ième degré

$$At^2 + Bt + C = 0$$

avec

$$A = \vec{v}\cdot\vec{v}\ ,\quad B = 2\vec{r}_0\cdot\vec{v} \quad \text{et} \quad C = \vec{r}_0\cdot\vec{r}_0 - D^2$$

lorsque

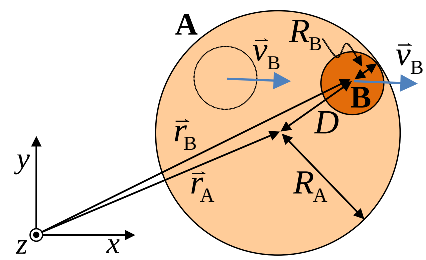
$$\vec{r}_0 = \vec{r}_{\mathrm{B0}} - \vec{r}_{\mathrm{A0}}\ ,\quad \vec{v} = \vec{v}_{\mathrm{B}} - \vec{v}_{\mathrm{A}} \quad \text{et} \quad D = R_{\mathrm{A}} + R_{\mathrm{B}}\ .$$

Il est important de préciser que ce calcul s'applique uniquement à une collision extérieure entre deux sphères. Si une sphère **B** se déplace à l'intérieur d'une grande sphère **A** immobile, le critère à satisfaire sera plutôt

$$\left\|\vec{r}_{\mathrm{A}} - \vec{r}_{\mathrm{B}}\right\| = R_{\mathrm{A}} - R_{\mathrm{B}}$$

ce qui donne la définition

$$D = R_{\mathrm{A}} - R_{\mathrm{B}}\quad .$$



Situation d'une collision entre une sphère **B** en mouvement à l'intérieur d'une sphère **A** immobile.

Preuve :

Évaluons cette distance D entre nos deux sphères grâce aux deux vecteurs positions $\vec{r}_{\mathrm{A}}$ et $\vec{r}_{\mathrm{B}}$ par le calcul

$$D = \left\|\vec{r}_{\mathrm{B}} - \vec{r}_{\mathrm{A}}\right\|.$$

Développons cette expression à partir des équations du mouvement de la sphère **A** et **B** :

$$D = \left\|\vec{r}_{\mathrm{B}} - \vec{r}_{\mathrm{A}}\right\| \quad\Rightarrow\quad D = \left\|\left(\vec{r}_{\mathrm{B0}} + \vec{v}_{\mathrm{B}}t\right) - \left(\vec{r}_{\mathrm{A0}} + \vec{v}_{\mathrm{A}}t\right)\right\| \qquad (\vec{r}_{\mathrm{A}} = \vec{r}_{\mathrm{A0}} + \vec{v}_{\mathrm{A}}t \ \text{ et } \ \vec{r}_{\mathrm{B}} = \vec{r}_{\mathrm{B0}} + \vec{v}_{\mathrm{B}}t)$$

$$\Rightarrow\quad D = \left\|\vec{r}_{\mathrm{B0}} - \vec{r}_{\mathrm{A0}} + \left(\vec{v}_{\mathrm{B}} - \vec{v}_{\mathrm{A}}\right)t\right\| \qquad \text{(Regrouper et factoriser } t\text{)}$$

$$\Rightarrow\quad D = \left\|\vec{r}_0 + \vec{v}t\right\| \qquad (\vec{r}_0 = \vec{r}_{\mathrm{B0}} - \vec{r}_{\mathrm{A0}} \ \text{ et } \ \vec{v} = \vec{v}_{\mathrm{B}} - \vec{v}_{\mathrm{A}})$$

En exploitant le calcul du produit scalaire[1], nous pouvons formuler un polynôme du 2ième degré selon le temps t qui permettra d'identifier le moment de la collision *s'il y a lieu* :

$$D = \left\|\vec{r}_0 + \vec{v}t\right\| \quad\Rightarrow\quad D^2 = \left\|\vec{r}_0 + \vec{v}t\right\|^2 \qquad \text{(Mettre au carré)}$$

$$\Rightarrow\quad D^2 = \left(\vec{r}_0 + \vec{v}t\right)\cdot\left(\vec{r}_0 + \vec{v}t\right) \qquad \text{(Propriété : } \left\|\vec{A}\right\|^2 = \vec{A}\cdot\vec{A}\text{)}$$

$$\Rightarrow\quad D^2 = \vec{r}_0\cdot\vec{r}_0 + 2\vec{r}_0\cdot\vec{v}t + \vec{v}\cdot\vec{v}t^2 \qquad \text{(Distribution)}$$

$$\Rightarrow\quad \vec{v}\cdot\vec{v}t^2 + 2\vec{r}_0\cdot\vec{v}t + \vec{r}_0\cdot\vec{r}_0 - D^2 = 0 \qquad \text{(Regrouper les termes)}$$

$$\Rightarrow\quad At^2 + Bt + C = 0 \quad \blacksquare$$

---

[1] Produit scalaire : $\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

Nous pouvons obtenir les solutions de temps t par le calcul

$$t = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad .$$

Les scénarios possibles à interpréter sont les suivants :

- $t = impossilbe$ lorsque $B^2 - 4AC < 0$:

  Cette solution signifie **qu'il n'y aura pas de collision** entre la sphère **A** et **B**.

- $t = \{t_1\}$ lorsque $B^2 - 4AC = 0$:

  Cette solution signifie qu'il y aura **qu'une seule collision** entre la sphère **A** et **B**. Cette situation est habituellement très rare à obtenir, car le manque d'exactitude des valeurs numériques dans les calculs rendre la condition $B^2 - 4AC = 0$ difficile à obtenir.

- $t = \{t_1 , t_2\}$ lorsque $B^2 - 4AC > 0$:

  Cette solution signifie **qu'il y aura deux collisions** entre la sphère **A** et **B**. Le temps le plus petit mais positif représente habituellement la solution physique, car elle se réalise en premier lieu. Un **temps négatif** devra être **exclu de l'interprétation**, car cela correspond à une collision avec deux sphères s'éloignant ce qui signifie qu'elle pouvait se chevaucher (ce qui n'est pas acceptable).

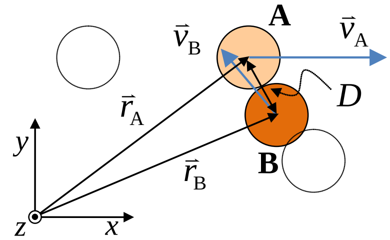
Déterminer le lieu de la collision ainsi que la normale à la surface dans la collision entre deux sphères

On peut déterminer la position de la sphère **A** et **B** au lieu de la collision au temps t de la collision qui a été validé par les critères précédents par les équations

$$\vec{r}_\text{A} = \vec{r}_\text{A0} + \vec{v}_\text{A} t$$

et

$$\vec{r}_\text{B} = \vec{r}_\text{B0} + \vec{v}_\text{B} t \, .$$



À la collision extérieure des deux sphères.

La normale à la surface de la sphère **B** sera

$$\hat{n}_\text{B} = \frac{\vec{r}_\text{A} - \vec{r}_\text{B}}{\left|\vec{r}_\text{A} - \vec{r}_\text{B}\right|}$$

et la normale à la surface de la sphère **A** sera

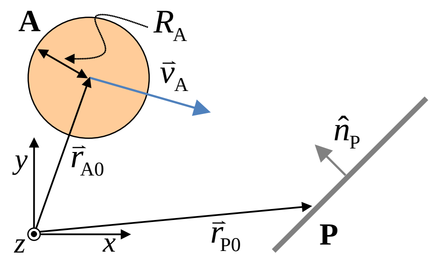
$$\hat{n}_\text{A} = \frac{\vec{r}_\text{B} - \vec{r}_\text{A}}{\left|\vec{r}_\text{B} - \vec{r}_\text{A}\right|} = -\hat{n}_\text{B}$$

Selon la nature de la collision[2] (élastique, inélastique, parfaitement inélastique), les vitesses de nos sphères **A** et **B** seront modifiées, mais empêchant celles-ci de se chevaucher.

[2] Ce sujet est abordé au chapitre 3.10 et 3.11.

La détection de collision entre une sphère en mouvement à vitesse constante et un plan infini immobile

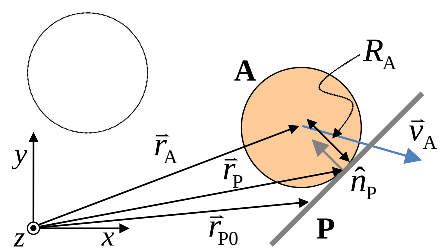
Considérons une sphère **A** de rayon R_A positionnées initialement selon les vecteurs $\vec{r}_{A0}$ et se déplaçant à vitesse constante $\vec{v}_A$. Cette sphère se déplace dans un environnement où est situé un plan **P** immobile représenté mathématiquement par une normale à la surface unitaire $\hat{n}_P$ et une coordonnée $\vec{r}_{P0}$ située sur le plan.



Mouvement avant la collision.

L'équation du mouvement du centre de notre sphère **A** sera

$$\vec{r}_A = \vec{r}_{A0} + \vec{v}_A t \; .$$



Lieu de la collision *si possible*.

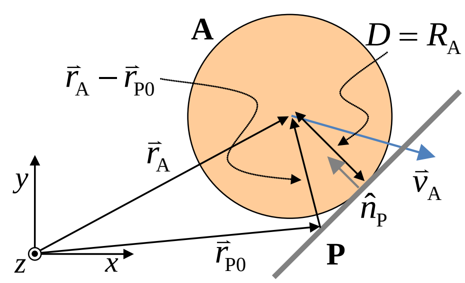
Nous pouvons établir qu'il y aura collision entre notre sphère et notre plan *seulement s'il y a une possibilité* que la distance D entre le centre de notre sphère $\vec{r}_A$ et un point particulier $\vec{r}_P$ du plan soit égale au rayon R_A de la sphère **A** ce qui peut être écrit mathématiquement sous la forme

$$D = R_A = \left\| \vec{r}_A - \vec{r}_P \right\| \; .$$

Cependant, le point $\vec{r}_P$ peut être difficile à déterminer sur un plan, car il nécessite deux informations puisque le plan est en deux dimensions. Pour contourner cette difficulté, on peut utiliser le critère

$$D = \left\| \left(\vec{r}_A - \vec{r}_{P0} \right) \cdot \hat{n}_P \right\|$$

pour déterminer s'il y a une collision.



Situation d'une collision sur le devant du plan.

En développant cette idée, nous arrivons à la conclusion que le temps t requis pour déterminer le lieu de la collision (s'il y en a collision) s'obtient par la résolution du polynôme du $2^{\text{ième}}$ degré

$$At^2 + Bt + C = 0$$

avec

$$A = v^2 \, , \quad B = 2R_0 v \quad \text{et} \quad C = {R_0}^2 - D^2$$

lorsque

$$R_0 = \left(\vec{r}_{A0} - \vec{r}_{P0} \right) \cdot \hat{n}_P \quad , \; v = \vec{v}_A \cdot \hat{n}_P \quad \text{et} \;\; D = R_A \quad .$$

Preuve :

Remplaçons l'expression de $\vec{r}_{\mathrm{A}}$ dans notre critère

$$D = \left\| \left(\vec{r}_{\mathrm{A}} - \vec{r}_{\mathrm{P0}} \right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{P}} \right\|$$

pour déterminer la collision et isolons le temps t de cette expression pour trouver le moment de la collision *s'il y a une* :

$D = \left\| \left(\vec{r}_{\mathrm{A}} - \vec{r}_{\mathrm{P0}} \right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{P}} \right\|$	$\Rightarrow$	$D = \left\| \left(\left(\vec{r}_{\mathrm{A0}} + \vec{v}_{\mathrm{A}} t \right) - \vec{r}_{\mathrm{P0}} \right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{P}} \right\|$	($\vec{r}_{\mathrm{A}} = \vec{r}_{\mathrm{A0}} + \vec{v}_{\mathrm{A}} t$)
	$\Rightarrow$	$D = \left\| \left(\vec{r}_{\mathrm{A0}} - \vec{r}_{\mathrm{P0}} + \vec{v}_{\mathrm{A}} t \right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{P}} \right\|$	(Réécriture)
	$\Rightarrow$	$D = \left\| \left(\vec{r}_0 + \vec{v}_{\mathrm{A}} t \right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{P}} \right\|$	($\vec{r}_0 = \vec{r}_{\mathrm{A0}} - \vec{r}_{\mathrm{P0}}$)
	$\Rightarrow$	$D = \left\| \left(\vec{r}_0 \cdot \hat{n}_{\mathrm{P}} + \vec{v}_{\mathrm{A}} \cdot \hat{n}_{\mathrm{P}}\, t \right) \right\|$	(Distribuer $\hat{n}_{\mathrm{P}}$)
	$\Rightarrow$	$D = \left\| \left(R_0 + v t \right) \right\|$	($R_0 = \vec{r}_0 \cdot \hat{n}_{\mathrm{P}}$, $v = \vec{v}_{\mathrm{A}} \cdot \hat{n}_{\mathrm{P}}$)
	$\Rightarrow$	$D^2 = \left(R_0 + v t \right)\left(R_0 + v t \right)$	(Mettre au carré)
	$\Rightarrow$	$D^2 = {R_0}^2 + 2 R_0 v t + v^2 t^2$	(Distribution)
	$\Rightarrow$	$v^2 t^2 + 2 R_0 v t + {R_0}^2 - D^2 = 0$	(Réécriture)
	$\Rightarrow$	$v^2 t^2 + 2 R_0 v t + {R_0}^2 - \left(R_{\mathrm{A}} \right)^2 = 0$	(Remplacer $D = R_{\mathrm{A}}$)
	$\Rightarrow$	$A t^2 + B t + C = 0 \quad \blacksquare$	

Les scénarios possibles à interpréter sont les suivants :

- $t = impossilbe$ lorsque $v = \vec{v}_{\mathrm{A}} \cdot \hat{n}_{\mathrm{P}} = 0$:

  Cette solution signifie **qu'il n'y aura pas de collision** entre la sphère **A** et le plan **P**, car la vitesse $\vec{v}_{\mathrm{A}}$ de la sphère **A** est perpendiculaire à la normale $\hat{n}_{\mathrm{P}}$ du plan. Il faut remarquer que cette condition implique que $A = v^2 = 0$ et $B = 2 R_0 v = 0$ ce qui donnera un déterminant $B^2 - 4AC = 0$ et automatiquement une division par zéro lors de la résolution du polynôme du 2^ième degré tel que

  $$t = \frac{-(0) \pm \sqrt{(0)^2 - 4(0)C}}{2(0)} = \text{ indéterminé } .$$

- $t = \{t_1\}$ lorsque $B^2 - 4AC = 0$:

  Cette solution signifie qu'il y aura **qu'une seule collision** entre la sphère **A** et le plan **P**. Ce scénario est possible uniquement si la **sphère se réduit à un point** tel que

  $$R_{\mathrm{A}} = D = 0 .$$

  Le point doit donc occuper l'unique position sur le plan où il y aura la collision. Cette contrainte réduit le déterminant $B^2 - 4AC$ du polynôme du 2^ième degré à zéro car

  $$\left(2 R_0 v \right)^2 - 4\left(v^2 \right)\left({R_0}^2 - D^2 \right) = 0 .$$

La solution du polynôme du 2ième degré se réduit alors à l'expression

$$t = \frac{-B}{2A} = \frac{-2(R_0 v)}{2(v^2)} = -\frac{R_0}{v}$$

ce qui revient à l'expression simplifiée

$$t = \frac{-(\vec{r}_{\mathrm{A0}} - \vec{r}_{\mathrm{P0}}) \cdot \hat{n}_{\mathrm{P}}}{\vec{v}_{\mathrm{A}} \cdot \hat{n}_{\mathrm{P}}} = \frac{(\vec{r}_{\mathrm{P0}} - \vec{r}_{\mathrm{A0}}) \cdot \hat{n}_{\mathrm{P}}}{\vec{v}_{\mathrm{A}} \cdot \hat{n}_{\mathrm{P}}} \quad .$$

- $t = \{t_1 , t_2\}$ lorsque $B^2 - 4AC > 0$:

  Cette solution signifie **qu'il y aura deux collisions** entre la sphère **A** et le plan **P**. Le temps le plus petit mais positif représente habituellement la solution physique, car elle se réalise en premier lieu. Si le 1ier temps représente l'approche de la sphère à distance D du plan, le 2ième temps représente l'éloignement de la sphère à une distance D du plan.

Déterminer le lieu de la collision ainsi que la normale à la surface dans la collision sphère-plan

On peut déterminer la position du centre de la sphère **A** au temps *t* de la collision par l'équation

$$\vec{r}_{\mathrm{A}} = \vec{r}_{\mathrm{A0}} + \vec{v}_{\mathrm{A}} t \quad .$$

On peut également déterminer la position du contact $\vec{r}_{\mathrm{P}}$ sur le plan grâce aux équations suivantes :

- $\vec{r}_{\mathrm{P}} = \vec{r}_{\mathrm{A}} - R_{\mathrm{A}} \hat{n}_{\mathrm{P}}$ si $(\vec{r}_{\mathrm{A}} - \vec{r}_{\mathrm{P0}}) \cdot \hat{n}_{\mathrm{P}} > 0$

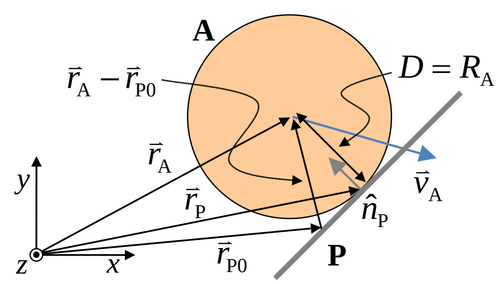
  (sphère devant le plan)

- $\vec{r}_{\mathrm{P}} = \vec{r}_{\mathrm{A}} + R_{\mathrm{A}} \hat{n}_{\mathrm{P}}$ si $(\vec{r}_{\mathrm{A}} - \vec{r}_{\mathrm{P0}}) \cdot \hat{n}_{\mathrm{P}} > 0$

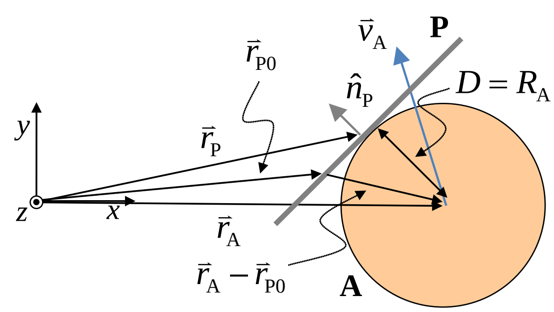
  (sphère derrière le plan)

- $\vec{r}_{\mathrm{P}} = \vec{r}_{\mathrm{A}} - R_{\mathrm{A}} \hat{n}_{\mathrm{P}} \dfrac{(\vec{r}_{\mathrm{A}} - \vec{r}_{\mathrm{P0}}) \cdot \hat{n}_{\mathrm{P}}}{\left\|(\vec{r}_{\mathrm{A}} - \vec{r}_{\mathrm{P0}}) \cdot \hat{n}_{\mathrm{P}}\right\|}$

  (expression générale)



À la collision lorsque la sphère est **devant** le plan.



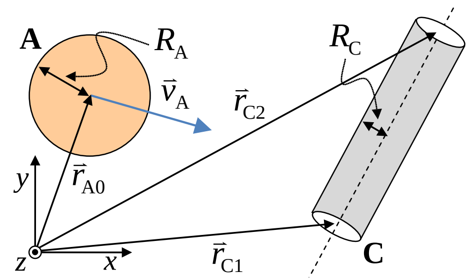
À la collision lorsque la sphère est **derrière** le plan.

Pour déterminer l'orientation de la normale $\hat{n}$ en lien avec la collision, il faut vérifier le côté du contact. Ainsi, pour un sens aléatoire $\hat{n}_{\mathrm{P}}$, nous avons les deux cas suivants :

- $\hat{n} = \hat{n}_{\mathrm{P}}$ si $(\vec{r}_{\mathrm{A}} - \vec{r}_{\mathrm{P0}}) \cdot \hat{n}_{\mathrm{P}} > 0$ (dans le sens de la normale au plan)
- $\hat{n} = -\hat{n}_{\mathrm{P}}$ si $(\vec{r}_{\mathrm{A}} - \vec{r}_{\mathrm{P0}}) \cdot \hat{n}_{\mathrm{P}} < 0$ (dans le sens opposé de la normale au plan)

La détection de collision entre une sphère en mouvement à vitesse constante et un cylindre infini immobile

Considérons une sphère **A** de rayon R_A positionnées initialement selon les vecteurs $\vec{r}_{\mathrm{A}0}$ et se déplaçant à vitesse constante $\vec{v}_\mathrm{A}$. Cette sphère se déplace dans un environnement où est situé un cylindre infini **C** immobile de rayon R_C représenté mathématiquement par deux points de coordonnée $\vec{r}_{\mathrm{C}1}$ et $\vec{r}_{\mathrm{C}2}$ située sur l'axe central du cylindre. La sphère est située à l'extérieur du cylindre.



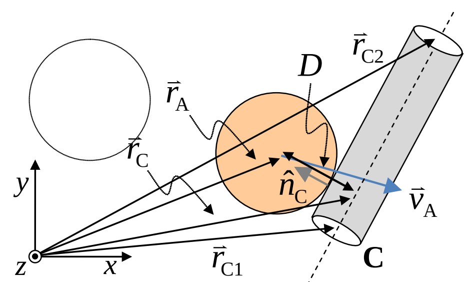
Mouvement avant la collision.

L'équation du mouvement du centre de notre sphère **A** sera

$$\vec{r}_\mathrm{A} = \vec{r}_{\mathrm{A}0} + \vec{v}_\mathrm{A} t \text{ .,}$$

Nous pouvons établir qu'il y aura collision entre notre sphère et notre cylindre *seulement s'il y a une possibilité* que la distance entre le centre de notre sphère $\vec{r}_\mathrm{A}$ et un point particulier $\vec{r}_\mathrm{C}$ situé sur l'axe central du cylindre soit égale à

$$D = R_\mathrm{A} + R_\mathrm{C}$$



Lieu de la collision *si possible*.

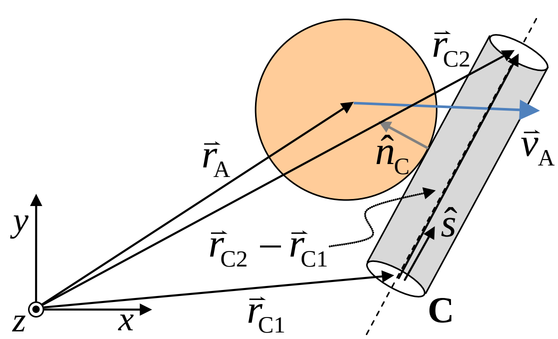
Nous pouvons évaluer cette distance D entre notre sphère et notre cylindre grâce aux vecteurs positions $\vec{r}_\mathrm{A}$ et $\vec{r}_\mathrm{C}$ par le calcul

$$D = \left\| \vec{r}_\mathrm{A} - \vec{r}_\mathrm{C} \right\| .$$

Cependant, le vecteur position $\vec{r}_\mathrm{C}$ peut-être difficile à déterminer. En plus, la distance D dépend de la normale à la surface $\vec{n}_\mathrm{C}$ du cylindre qui elle dépend de la position $\vec{r}_\mathrm{A}$ de la sphère.

Pour contourner ce problème, nous allons définir un vecteur

$$\hat{s} = \frac{\vec{r}_{\mathrm{C}2} - \vec{r}_{\mathrm{C}1}}{\left\| \vec{r}_{\mathrm{C}2} - \vec{r}_{\mathrm{C}1} \right\|}$$



Situation d'une collision sur le cylindre.

représentant l'axe du cylindre.

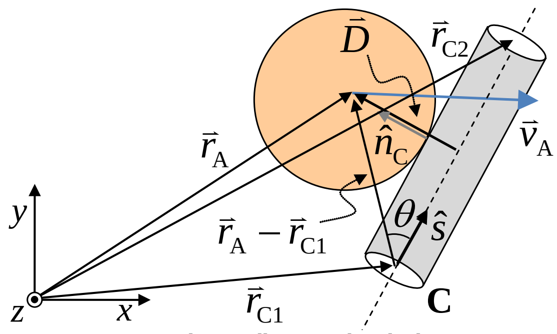
À partir de ce vecteur et du produit vectoriel[3], nous pouvons définir le vecteur distance sphère-cylindre

$$\vec{D} = \hat{s} \times (\vec{r}_{\mathrm{A}} - \vec{r}_{\mathrm{C1}}) \times \hat{s}$$

dont le module permettra de mesurer la distance D entre la sphère et le cylindre. Nous pouvons certifier la définition de $\vec{D}$, puisque son module correspond à

$$\|\vec{D}\| = \|\vec{r}_{\mathrm{A}} - \vec{r}_{\mathrm{C1}}\| \sin(\theta)$$

dont le terme $\sin(\theta)$ est intégré dans le calcul du produit vectoriel.



Situation d'une collision sur le cylindre.

En développant cette idée, nous arrivons à la conclusion que le temps t requis pour déterminer le lieu de la collision (s'il y en a collision) s'obtient par la résolution du polynôme du $2^{\text{ième}}$ degré

$$At^2 + Bt + C = 0$$

avec

$$A = \vec{v} \cdot \vec{v}\ , \quad B = 2\vec{r}_0 \cdot \vec{v} \quad \text{et} \quad C = \vec{r}_0 \cdot \vec{r}_0 - D^2$$

lorsque

$$\vec{r}_0 = \hat{s} \times (\vec{r}_{\mathrm{A0}} - \vec{r}_{\mathrm{C1}}) \times \hat{s}\ , \quad \vec{v} = (\hat{s} \times \vec{v}_{\mathrm{A}} \times \hat{s})\ , \ D = R_{\mathrm{A}} + R_{\mathrm{C}} \ \text{ et } \ \hat{s} = \frac{\vec{r}_{\mathrm{C2}} - \vec{r}_{\mathrm{C1}}}{\|\vec{r}_{\mathrm{C2}} - \vec{r}_{\mathrm{C1}}\|}\ .$$

<u>Preuve :</u>

Développons l'expression de $\vec{D}$ afin de la réécrire sous une autre forme :

$\vec{D} = \hat{s} \times (\vec{r}_{\mathrm{A}} - \vec{r}_{\mathrm{C1}}) \times \hat{s} \quad \Rightarrow \quad \vec{D} = \hat{s} \times ((\vec{r}_{\mathrm{A0}} + \vec{v}_{\mathrm{A}} t) - \vec{r}_{\mathrm{C1}}) \times \hat{s}$ (Remplacer $\vec{r}_{\mathrm{A}} = \vec{r}_{\mathrm{A0}} + \vec{v}_{\mathrm{A}} t$)

$\Rightarrow \quad \vec{D} = \hat{s} \times (\vec{r}_{\mathrm{A0}} - \vec{r}_{\mathrm{C1}} + \vec{v}_{\mathrm{A}} t) \times \hat{s}$ (Réécriture)

$\Rightarrow \quad \vec{D} = \hat{s} \times (\vec{r}_{\mathrm{A0}} - \vec{r}_{\mathrm{C1}}) \times \hat{s} + \hat{s} \times \vec{v}_{\mathrm{A}} t \times \hat{s}$ (Distribution)

$\Rightarrow \quad \vec{D} = \hat{s} \times (\vec{r}_{\mathrm{A0}} - \vec{r}_{\mathrm{C1}}) \times \hat{s} + (\hat{s} \times \vec{v}_{\mathrm{A}} \times \hat{s}) t$ (Factoriser t)

$\Rightarrow \quad \vec{D} = \vec{r}_0 + (\hat{s} \times \vec{v}_{\mathrm{A}} \times \hat{s}) t$ ($\vec{r}_0 = \hat{s} \times (\vec{r}_{\mathrm{A0}} - \vec{r}_{\mathrm{C1}}) \times \hat{s}$)

$\Rightarrow \quad \vec{D} = \vec{r}_0 + \vec{v}\, t$ ($\vec{v} = (\hat{s} \times \vec{v}_{\mathrm{A}} \times \hat{s})$)

[3] Produit vectoriel : $\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \sin(\theta) \hat{n} = (A_y B_z - A_z B_y)\vec{i} - (A_x B_z - A_z B_x)\vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\vec{k}$

En exploitant le calcul du produit scalaire[4], nous pouvons formuler un polynôme du 2ième degré selon le temps *t* qui permettra d'identifier le moment de la collision *s'il y a lieu* :

$$\vec{D} = \vec{r}_0 + \vec{v}\,t \quad \Rightarrow \quad \left\|\vec{D}\right\| = \left\|\vec{r}_0 + \vec{v}\,t\right\| \qquad \text{(Évaluer le module)}$$

$$\Rightarrow \quad D^2 = \left\|\vec{r}_0 + \vec{v}t\right\|^2 \qquad \text{(Mettre au carré)}$$

$$\Rightarrow \quad D^2 = \left(\vec{r}_0 + \vec{v}t\right)\cdot\left(\vec{r}_0 + \vec{v}t\right) \qquad \text{(Propriété : } \left\|\vec{A}\right\|^2 = \vec{A}\cdot\vec{A}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad D^2 = \vec{r}_0\cdot\vec{r}_0 + 2\vec{r}_0\cdot\vec{v}t + \vec{v}\cdot\vec{v}t^2 \qquad \text{(Distribution)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}\cdot\vec{v}t^2 + 2\vec{r}_0\cdot\vec{v}t + \vec{r}_0\cdot\vec{r}_0 - D^2 = 0 \qquad \text{(Regrouper les termes)}$$

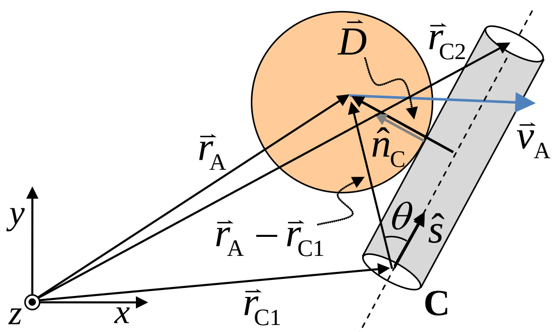
$$\Rightarrow \quad At^2 + Bt + C = 0 \quad \blacksquare$$

Déterminer le lieu de la collision ainsi que la normale à la surface dans la collision sphère-cylindre

On peut déterminer la position de la sphère **A** au lieu de la collision au temps *t* de la collision qui a été validé par les critères précédents par les équations

$$\vec{r}_\mathrm{A} = \vec{r}_\mathrm{A0} + \vec{v}_\mathrm{A}t \quad .$$

Selon la nature de la collision (élastique, inélastique, parfaitement inélastique), la vitesse de notre sphère **A** sera modifiée, mais empêchant celles-ci de traverser le cylindre.



À la collision lorsque la sphère est à l'extérieur du cylindre.

La normale à la surface à utiliser lors de ces calculs sera

$$\hat{n}_\mathrm{C} = \frac{\vec{D}}{\left\|\vec{D}\right\|}$$

où

$$\vec{D} = \hat{s}\times\left(\vec{r}_\mathrm{A} - \vec{r}_\mathrm{C1}\right)\times\hat{s} \quad .$$

[4] Produit scalaire : $\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

Résumé des détections des collisions des sphères

En résumé, les trois détections des collisions précédentes requièrent la résolution d'un polynôme du 2$^{\text{ième}}$ degré de la forme

$$At^2 + Bt + C = 0 \ .$$

L'expression des termes *A*, *B* et *C* dépendent du problème particulier à résoudre tel qu'il est résumé dans le tableau ci-dessous :

	Sphère **A** – Sphère **B**	Sphère **A** – Cylindre	Sphère **A** – Plan
Cinématique de **A**	$\vec{r}_{\text{A}} = \vec{r}_{\text{A0}} + \vec{v}_{\text{A}} t$		
Équation à résoudre	$t = \dfrac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$		
Terme *A*	$A = \vec{v} \cdot \vec{v}$		$A = v^2$
Terme *B*	$B = 2\vec{r}_0 \cdot \vec{v}$		$B = 2R_0 v$
Terme *C*	$C = \vec{r}_0 \cdot \vec{r}_0 - D^2$		$C = R_0^{\,2} - D^2$
Calcul de géométrie	-----	$\hat{s} = \dfrac{\vec{r}_{\text{C2}} - \vec{r}_{\text{C1}}}{\lVert \vec{r}_{\text{C2}} - \vec{r}_{\text{C1}} \rVert}$	-----
Paramètres à calculer	$\vec{r}_0 = \vec{r}_{\text{B0}} - \vec{r}_{\text{A0}}$	$\vec{r}_0 = \hat{s} \times \left(\vec{r}_{\text{A0}} - \vec{r}_{\text{C1}} \right) \times \hat{s}$	$R_0 = \left(\vec{r}_{\text{A0}} - \vec{r}_{\text{P0}} \right) \cdot \hat{n}_{\text{P}}$
	$\vec{v} = \vec{v}_{\text{B}} - \vec{v}_{\text{A}}$	$\vec{v} = \left(\hat{s} \times \vec{v}_{\text{A}} \times \hat{s} \right)$	$v = \vec{v}_{\text{A}} \cdot \hat{n}_{\text{P}}$
	$D = R_{\text{A}} + R_{\text{B}}$	$D = R_{\text{A}} + R_{\text{C}}$	$D = R_{\text{A}}$
Normale à la surface	$\vec{n}_{\text{A}} = \dfrac{\vec{r}_{\text{A}} - \vec{r}_{\text{B}}}{\lVert \vec{r}_{\text{A}} - \vec{r}_{\text{B}} \rVert}$	$\vec{n}_{\text{A}} = \dfrac{\hat{s} \times \left(\vec{r}_{\text{A}} - \vec{r}_{\text{C1}} \right) \times \hat{s}}{\lVert \hat{s} \times \left(\vec{r}_{\text{A}} - \vec{r}_{\text{C1}} \right) \times \hat{s} \rVert}$	$\vec{n}_{\text{A}} = \hat{n}_{\text{P}}$ ou $\vec{n}_{\text{A}} = -\hat{n}_{\text{P}}$

Rappelons ces calculs font des interprétations physiques adéquates de détection de collision uniquement si $t > 0$.