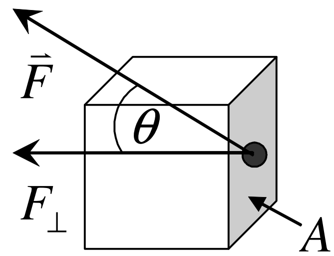
Chapitre 5.1 – La pression

La pression

La **pression** est une mesure de **force** par **unité de surface**. Dans cette définition, nous utilisons seulement la composante de la force qui est perpendiculaire à la surface. Bien que la force soit un vecteur, la pression est considérée comme un scalaire :

$$P = \frac{F\cos\theta}{A} = \frac{F_\perp}{A}$$



où
- P : La pression associée à un élément de surface (Pa)
- $F_\perp$: Force perpendiculairement à la surface (N)
- A : Surface sur laquelle est appliquée la force (m^2)
- θ : Angle entre la force et la normale à la surface

Unité SI (pascal) : $\text{Pa} = [P] = \frac{[F]}{[A]} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg m/s}^2}{\text{m}^2} = \text{kg m}^{-1}\text{s}^{-2}$

Situation A : *La pression d'un piston*. Un piston pousse horizontalement sur un cylindre plein de 10 cm de rayon avec une force de 80 N. On désire évaluer la pression qu'exerce le piston sur la surface du cylindre.

Nous pouvons évaluer la surface du cylindre :

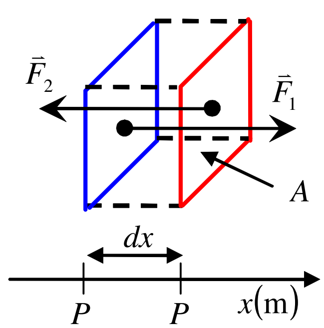
$$A = \pi R^2 \quad \Rightarrow \quad A = \pi(0{,}1)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = 0{,}0314\ \text{m}^2}$$

Évaluons maintenant la pression exercée par le piston :

$$P = \frac{F_\perp}{A} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{(80)}{(0{,}0314)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = 2548{,}8\ \text{Pa}}$$

L'équilibre et la pression

Selon la 2ième loi de Newton, l'équilibre est atteint lorsque la somme des forces est nulle. Dans le cas de la pression, l'équilibre est atteint[1] lorsque la pression évaluée de chaque côté d'une surface d'épaisseur infinitésimale est égale et qu'elle est produite par des forces de signes opposées.



$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = F$$

$$P = \frac{F}{A}$$

[1] Cette règle ne s'applique pas lorsque la gravité influence le calcul de la pression.

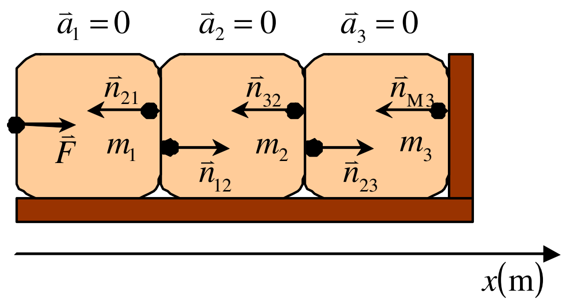
Théorème de la transmission horizontale de la pression

Le théorème de la transmission horizontale de la pression dans un système au repos s'énonce de la façon suivante :

> *Dans un système de masses incompressibles horizontales* ***au repos*** *de surface identique, la pression est constante en tout point sur un axe horizontal et elle est égale à la pression externe causée par une force $\vec{F}$ qui se propage horizontalement à l'ensemble du système.*

Preuve :

Considérons un groupe de 3 cubes de surface A alignés horizontalement et appuyés contre un mur du côté droit. On applique une force $\vec{F}$ du côté gauche afin de pousser les cubes vers le mur. Les cubes sont incompressibles (le volume ne change pas sous la présence d'une force).



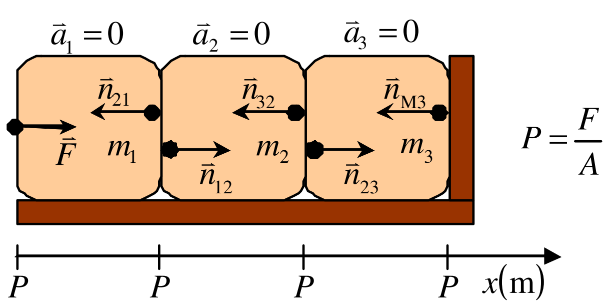
À partir de la 2ième loi de Newton selon l'axe x ($\sum F_x = ma_x$), évaluons les forces normales de contact entre les cubes. Utilisons le fait que l'accélération est nulle pour tous les cubes sont incompressibles :

Bloc m_1	Bloc m_2	Bloc m_3
$F - n_{21} = 0$ $\Rightarrow$ $F = n_{21}$	$n_{12} - n_{32} = 0$ $\Rightarrow$ $n_{12} = n_{32}$	$n_{23} - n_{M3} = 0$ $\Rightarrow$ $n_{23} = n_{M3}$

En utilisant la 3ième loi de Newton ($\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$), on réalise que toutes les forces ont le même module même si les cubes n'ont pas la même masse :

$$F = n_{12} = n_{23} = n_{M3}$$

Évaluons la pression sur l'ensemble des surfaces verticales des différents cubes :



Puisqu'il y a une force normale de module F qui est appliquée sur chacune des surfaces verticales des différents cubes, alors la pression causée par la force $\vec{F}$ d'origine se propage sur l'ensemble des cubes. ■

Théorème de la transmission verticale de la pression sous l'influence de la gravité

Le théorème de la transmission verticale de la pression dans un système au repos sous l'influence de la gravité s'énonce de la façon suivante :

> *Dans un système de masses incompressibles verticales* ***au repos*** *de surface identique, la pression externe causée par une force* $\vec{F}$ *se propage verticalement à l'ensemble du système et la variation de pression gravitationnelle causée par l'accumulation de masse au-dessus d'une surface est proportionnelle à la force gravitationnelle* $m\vec{g}$ *appliquée sur cette masse.*

Mathématiquement, ce théorème se résume de la façon suivante :

$$P = P_{\text{ext}} + \Delta P_g$$

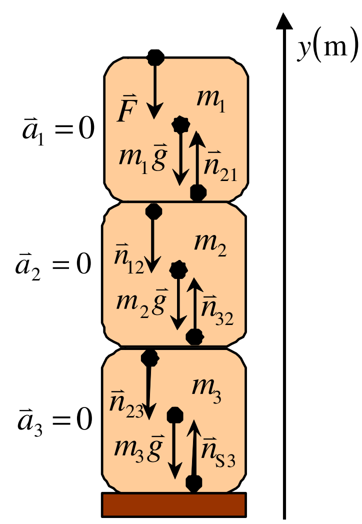
où P : Pression mesurée à la surface (Pa)

P_{ext} : Pression externe (Pa) ($P_{\text{ext}} = F_{\perp} / A$)

ΔP_g : Variation de pression causée par la gravité (Pa) ($\Delta P_g = m_{tot}\, g / A$)

Preuve :

Considérons un groupe de 3 cubes de surface A alignés verticalement et appuyés contre le sol. On applique une force $\vec{F}$ sur le cube du haut afin de pousser les cubes vers le sol. Les cubes sont incompressibles (le volume ne change pas sous la présence d'une force).



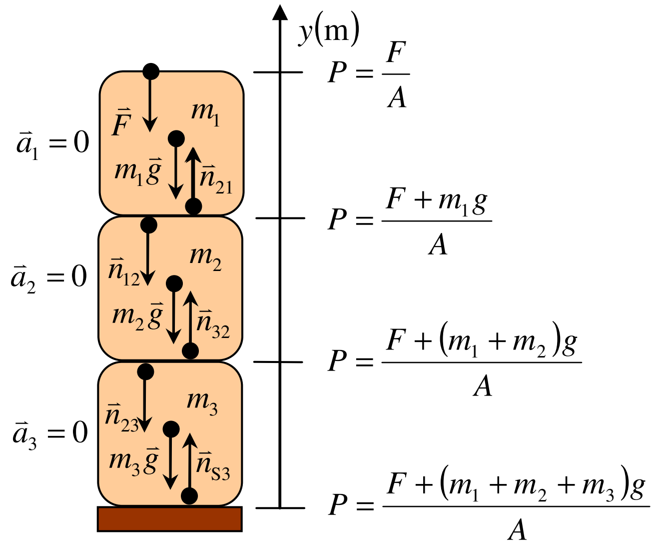
À partir de la 2ième loi de Newton selon l'axe y ($\sum F_y = ma_y$), évaluons les forces normales de contact entre les cubes. Utilisons le fait que l'accélération est nulle pour tous les cubes incompressibles :

Bloc m_1	Bloc m_2	Bloc m_3
$n_{21} - m_1 g - F = 0$ $\Rightarrow$ $n_{12} = m_1 g + F$	$n_{32} - m_2 g - n_{12} = 0$ $\Rightarrow$ $n_{32} = m_2 g + n_{12}$	$n_{S3} - m_3 g - n_{23} = 0$ $\Rightarrow$ $n_{S3} = m_3 g + n_{23}$

En utilisant la 3ième loi de Newton ($\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$), nous pouvons évaluer nos forces normales à partir de la force externe $\vec{F}$ et de la force gravitationnelle totale appliquée sur les cubes au-dessus de la surface où la force normale est évaluée :

Surface cube 1-2	$n_{21} = m_1 g + F$
Surface cube 2-3	$n_{32} = (m_1 + m_2) g + F$
Surface cube 3 et le sol	$n_{S3} = (m_1 + m_2 + m_3) g + F$

Évaluons la pression sur l'ensemble des surfaces verticales des différents cubes :



Généralisons l'expression de la pression de cette situation :

$$P = \frac{F + (m_1 + m_2 + m_3)g}{A} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{F + m_{tot}\, g}{A} \qquad \text{(Remplacer } m_{tot} = m_1 + m_2 + m_3\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad P = P_{ext} + \Delta P_g \ \blacksquare \qquad \text{(Remplacer } P_{ext} = F_\perp / A\text{, } \Delta P_g = m_{tot}\, g / A\text{)}$$

La pression atmosphérique

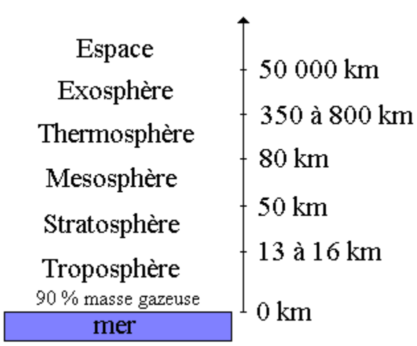
En 1648, le jeune prodige français Blaise Pascal a continué les travaux sur le vide de Torricelli[2] ce qui a permis de confirmer l'existence de la **pression atmosphérique** causée par le **poids** de **l'atmosphère**.

Blaise Pascal
(1623-1662)

Au niveau de la mer, la pression atmosphérique moyenne est égale à la valeur suivante :

$$P_{\mathrm{atm}} = P_A = 101{,}3 \ \text{kPa} = 1{,}013 \times 10^5 \,\text{Pa}$$

Voici la répartition de la masse gazeuse dans atmosphère de la Terre :



- La pression atmosphérique est très faible à des hauteurs supérieures à 16 km.
- Sous une altitude de 30 km à 40 km, on peut retrouver 99% de la masse atmosphérique.
- On évalue la masse de l'atmosphère terrestre à 5,13 10^{18} kg, soit environ un millionième de la masse de Terre.

---

[2] Evangelista Torricelli a inventé le baromètre à tube de mercure. Le torr (unité de pression correspondant à une colonne de mercure de 1 mm) lui a été dédié en l'honneur de ses travaux non publiés.

La pression dans un fluide homogène

Evangelista Torricelli
(1608-1647)

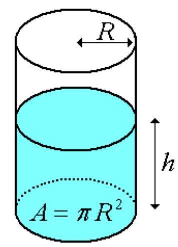
Les travaux du physicien et mathématicien italien Evangelista Torricelli sur le baromètre à tube de mercure permis d'établir un lien entre la variation de pression exercée par une colonne d'un fluide[3] homogène et la hauteur de la colonne en question. Ainsi, la variation de pression ΔP causée par une colonne d'un fluide homogène dépend de la masse volumique ρ du fluide, de la hauteur h de la colonne du fluide et de la gravité g. La pression augmente vers le bas de la colonne et diminue vers le haut de la colonne :

$$\Delta P_g = \pm \rho\, g\, h$$

où ΔP_g : Variation de pression causée par la gravité appliquée sur une colonne (Pa)
ρ : Masse volumique de la matière (kg/m^3)
g : Champ gravitationnel appliqué sur la colonne (N/kg)
h : Hauteur de la colonne de matière (m)

Signe : (+) Positif si la colonne est au-dessus du point de mesure.
(-) Négatif si la colonne est sous le point de mesure.

Preuve :



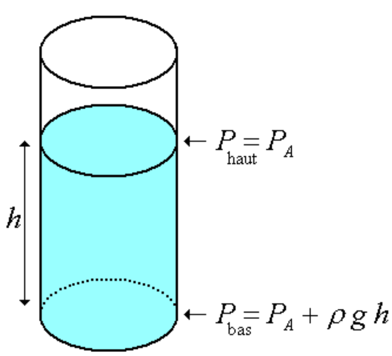
Évaluons la variation de la pression causée par la gravité appliquée sur la colonne de liquide d'une hauteur h, de rayon R et de masse volumique ρ. Utilisons le théorème précédent pour définir une expression initiale à la variation de la pression :

$$\Delta P_g = \frac{m_{tot}\, g}{A} \quad \Rightarrow \quad \Delta P_g = \frac{(\rho V) g}{A} \qquad \text{(Remplacer } m_{tot} = \rho V \text{)}$$

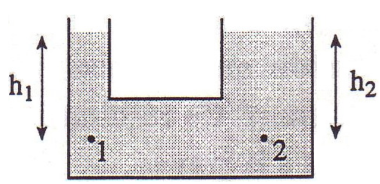
$$\Rightarrow \quad \Delta P_g = \frac{\rho (A\, h) g}{A} \qquad \text{(Remplacer } V = A\, h \text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta P_g = \rho\, g\, h \quad \blacksquare \qquad \text{(Simplifier } A\text{)}$$

Pression dans une colonne de liquide :



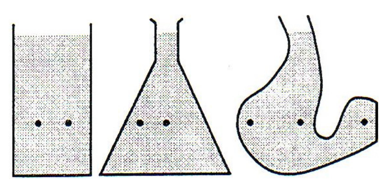
Principe du vase communiquant :



$h_1 = h_2$ car $P_1 = P_2$

Cette situation est valide uniquement lorsque la pression à la surface des deux côtés est identique.

Pression lors d'une colonne « virtuelle » de matière :



Il y a transmission de la pression horizontale même s'il n'y a pas réellement de liquide au-dessus du point.

[3] Un fluide est un milieu parfaitement déformable (ex: liquide, gaz)

Densité de fluide

Voici une table de différentes masses volumiques associées à quelques liquides. La densité relative correspond au rapport entre la densité absolue et la densité de l'eau :

Fluide	Densité absolue ρ (kg/m^3) (masse volumique)	Densité relative
Air	1,3	0,0013
Eau	1000	1
Sang	1 050	1,05
Plasma sanguin	1 030	1,03
Fer	7 700	7,7
Mercure	13 600	13,6

Définition de la densité relative :

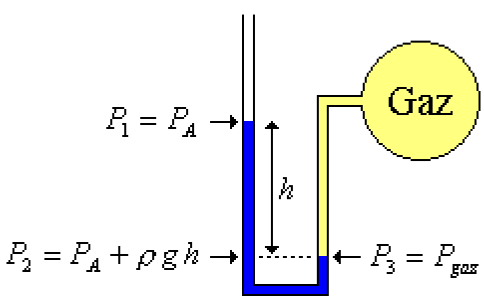
$$\text{Densité relative} = \frac{\text{Densité (absolue) d'un substance}}{\text{Densité (absolue) de l'eau}}$$

Le manomètre en U

Pour mesurer la pression d'un gaz (**jaune**) à l'intérieur d'un volume V, nous pouvons utiliser un manomètre en U. Cet instrument fonctionne grâce à la pression atmosphérique (**blanc**) et à la variation de pression causée par une colonne d'un liquide (**bleu**). On utilise très souvent du mercure dans un tel montage, car sa masse volumique est très élevée ($\rho = 13\,600$ kg/m^3). Cela signifie qu'une grande pression peut être mesurée sans avoir recours à une grande colonne de liquide :

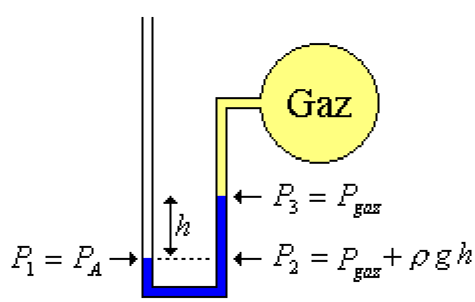
Si : $P_{gaz} > P_A$

Alors : $P_{gaz} = P_A + \rho g h \qquad (P_2 = P_3)$



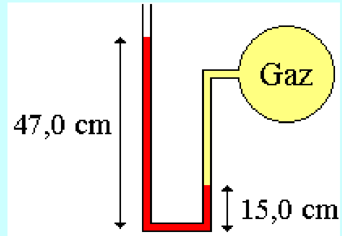
Si : $P_{gaz} < P_A$

Alors : $P_{gaz} = P_A - \rho g h \qquad (P_1 = P_2)$



où
- P_{gaz} : Pression du gaz (Pa)
- P_A : Pression atmosphérique (Pa)
- ρ : Masse volumique de la matière dans la colonne (kg/m^3)
- g : Gravité appliquée sur la masse (N/kg)
- h : Hauteur de la colonne de liquide mesuré entre P_{gaz} et P_A (m)

Situation B : *La pression du gaz.* Un gaz est contenu dans une sphère de 5 cm de rayon à une température de 22 C. Lorsque cette sphère est raccordée à un manomètre en U contenant du mercure ($\rho = 13\,600$ kg/m^3), la colonne de mercure prend la position suivante à l'équilibre (voir schéma ci-contre). On désire évaluer la pression du gaz.



Évaluons la hauteur de la colonne de mercure :

$$h = y_1 - y_2 \quad \Rightarrow \quad h = (0{,}470) - (0{,}150)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{h = 0{,}320 \ \text{m}}$$

Évaluons la pression du gaz sachant que la colonne de mercure est poussée par le gaz dans la sphère et que l'autre extrémité du tube est en contact avec l'atmosphère :

$$P_{\text{gaz}} = P_{\text{atm}} \pm \Delta P_g \quad \Rightarrow \quad P_{\text{gaz}} = P_{\text{atm}} \pm (\rho\, g\, h) \qquad (\Delta P_g = \rho\, g\, h)$$

$$\Rightarrow \quad P_{\text{gaz}} = P_{\text{atm}} + \rho\, g\, h \qquad (P_{\text{gaz}} > P_{\text{atm}})$$

$$\Rightarrow \quad P_{\text{gaz}} = (101\times10^3) + (13\,600)(9{,}8)(0{,}320) \qquad \text{(Remplacer valeurs num.)}$$

$$\Rightarrow \quad P_{\text{gaz}} = 101\times10^3 + 42\,650 \qquad (\text{Calculer } \rho\, g\, h)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{P_{\text{gaz}} = 143{,}65\times10^3 \ \text{Pa}} \qquad \text{(Simplifier)}$$

Unités de pression

Voici différentes autres façons de mesurer la pression :

mm de mercure[4] : (mm de Hg)

Mesure de pression fréquemment utilisée dans le domaine médicale. Cette mesure fait référence à la variation de pression gravitationnelle générée par une colonne de mercure dans un manomètre en U. Une hauteur de 1 mm de mercure produit sur la Terre ($g = 9{,}8$ N/kg) la pression suivante :

$$1 \ \text{mm de Hg} = 133{,}3 \ \text{Pa}$$

Atmosphère : (atm)

Mesure de pression fréquemment utilisée dans le domaine de la météorologie et dans le domaine de la plongée sous-marine. Cette mesure fait référence à la variation de pression gravitationnelle exercée par l'atmosphère à la surface de la Terre :

$$1 \ \text{atm} = 1{,}013\times10^5 \,\text{Pa} \qquad \text{et} \qquad 1 \ \text{atm} = 760 \ \text{mm Hg}$$

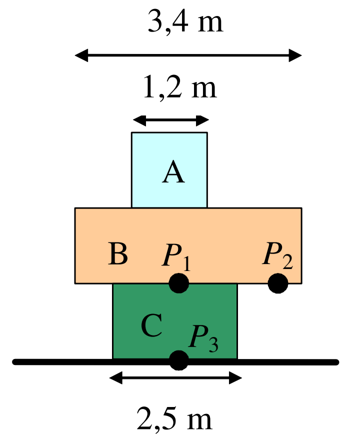
[4] L'unité suivant porte également le nom de « torr ».

Exercices

Exercice A : *Les boîtes empilées*. Une boîte A de 3 kg, une boîte B de 8 kg ainsi qu'une boîte C et 5 kg sont empilées sur le sol tel qu'illustré sur le schéma ci-contre.

Les boîtes ont toutes une profondeur de 1 m et une hauteur de 1,2 m. Par contre, la boîte A possède une largeur de 1,2 m, la boîte B possède une largeur de 3,4 m et la boîte C possède une largeur de 2,5 m. Évaluez **(a)** la pression P_1, **(b)** la pression P_2 et **(c)** la pression P_3.

On suppose que la pression du gaz extérieur est égale à zéro (dans le vide) et que la pression est uniformément répartie sur les surfaces en contact.



Solutions

Exercice A : *Les boîtes empilées*.

(a) La pression P_1 :

$$P_1 = P_{\text{ext}} + \Delta P_g = P_{\text{gaz}} + \frac{n_{CB}}{A} = (0) + \frac{(m_{\text{A}} + m_{\text{B}})g}{A} = \frac{(3+8)(9{,}8)}{(2{,}5)(1)} = 43{,}12 \text{ Pa}$$

(b) La pression P_2 :

Il n'y a pas de force normale appliquée sur ce point situé sur la surface de la boîte B.

$$P_2 = P_{\text{ext}} = P_{\text{gaz}} = 0 \text{ Pa}$$

P.S. À l'intérieur de la boîte B, la pression peut être supérieure à zéro, mais cela devient impossible à évaluer avec nos techniques.

(c) La pression P_3 :

$$P_3 = P_{\text{ext}} + \Delta P_g = P_{\text{gaz}} + \frac{n_{\text{sol}}}{A} = (0) + \frac{(m_{\text{A}} + m_{\text{B}} + m_{\text{C}})g}{A} = \frac{(3+8+5)(9{,}8)}{(2{,}5)(1)} = 62{,}72 \text{ Pa}$$