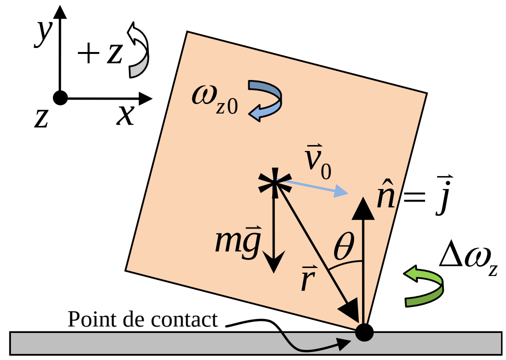
# Chapitre 4.X2 – La collision des corps rigides

## La collision élastique d'un corps rigide en deux dimensions avec un plan

Considérons un corps rigide à deux dimensions dans le plan $xy$ de masse $m$ et de moment d'inertie $I$ dont le centre de masse CM se déplace à vitesse $\vec{v}_0$ et le corps tourne autour de son centre de masse avec une vitesse angulaire $\omega_{z0}$. Si le corps entre en **collision élastique** avec une surface (objet de masse infinie) dont la force normale de contact permet l'application d'une force selon l'axe $y$ tel que son orientation $\hat{n} = \vec{j}$, la vitesse du centre de masse finale $\vec{v}$ et la vitesse angulaire finale $\omega_z$ prendrons les valeurs suivantes :




La position du point de contact par rapport au centre de masse permettra à la collision de réduire la vitesse angulaire du corps rigide.

$$\vec{v} = v_{x0}\,\vec{i} + v_y\,\vec{j}$$

tel que

$$v_y = v_{y0} - 2\frac{v_{y0} \pm r\sin(\theta)\omega_{z0}}{1 + \dfrac{mr^2}{I}\sin^2(\theta)} \quad \text{et} \quad \omega_z = \omega_{z0} \pm \frac{-2mr}{I + mr^2\sin(\theta)}\left(v_{y0} \pm r\sin(\theta)\omega_{z0}\right)$$

où $\vec{v}$ : Vecteur vitesse finale (m/s)

$v_{x0}$ : Composante de la vitesse initiale selon l'axe $x$ (m/s).

$v_{y0}$ : Composante de la vitesse initiale selon l'axe $y$ (m/s).

$v_y$ : Composante de la vitesse finale selon l'axe $y$ (m/s).

$\omega_{z0}$ : Vitesse angulaire initiale selon l'axe $z$ (rad/s).

$\omega_{z0}$ : Vitesse angulaire finale selon l'axe $z$ (rad/s).

$\vec{n}$ : L'orientation de la normale à la surface.

$m$ : Masse du corps rigide (kg)

$I$ : Moment d'inertie du corps rigide (kg·m$^2$)

$r$ : Distance entre le centre de masse et le point de contact sur la surface (m).

$\theta$ : Angle entre le vecteur $\vec{r}$ CM-contact et la normale à la surface $\hat{n}$.

<u>Signe :</u>

+ : La position du point de contact par rapport au centre de masse causera une modification de la rotation dans le sens positif de l'axe $z$ (voir image ci-haut).

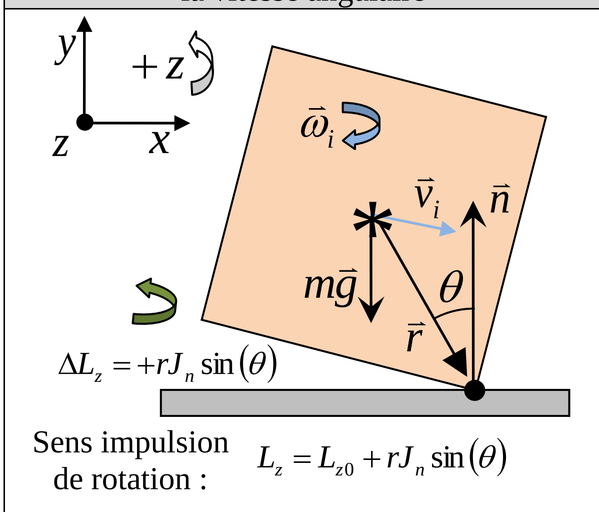
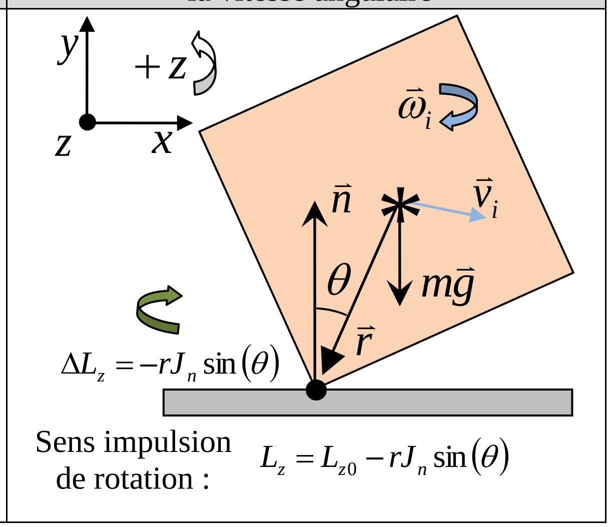
- : La position du point de contact par rapport au centre de masse causera une modification de la rotation dans le sens négatif de l'axe $z$ (voir image ci-haut).

Preuve :

Soit un corps rigide en deux dimensions *xy* se déplaçant à vitesse $\vec{v}_0$ et tournant à vitesse angulaire $\omega_{z0}$ autour d'un axe z passant par son centre de masse qui entre en **collision élastique** avec une surface dont la normal à la surface $\hat{n} = \vec{j}$ est orienté selon l'axe *y*. Cette collision particulière fait intervenir ces quatre équations physiques suivantes :

- $p_x = p_{x0}$ (conservation de la quantité de mouvement en *x*)
- $p_y = p_{y0} + J_n$ (changement de la quantité de mouvement selon l'axe *y*)
- $L_z = L_{z0} \pm r\, J_n \sin(\theta)$ (changement du moment cinétique selon l'axe *z*)
- $K_f = K_i$ (conservation de l'énergie cinétique)

Dans la collision, nous avons deux scénarios possibles correspondant à la position selon l'axe *x* du point d'impact par rapport à la position selon l'axe *x* du centre de masse :

| Collision qui va diminuer la vitesse angulaire | Collision qui va augmenter la vitesse angulaire |
|---|---|
|  |  |





Développons notre équation de la conservation de la quantité de mouvement selon l'axe *x* :

$p_x = p_{x0} \quad \Rightarrow \quad (mv_x) = (mv_{x0}) \qquad (p_x = mv_x)$

$\Rightarrow \quad \boxed{v_x = v_{x0}} \qquad$ (**eq 1**) (Simplifier *m*)

Développons notre modification de la quantité de mouvement selon l'axe *y* à partir d'une impulsion appliquée par la surface de contact sur notre corps rigide afin d'évaluer notre impulsion de rotation :

$p_y = p_{y0} + J_n \quad \Rightarrow \quad (mv_y) = (mv_{y0}) + J_n \qquad (p_y = mv_y)$

$\Rightarrow \quad \boxed{J_n = m(v_y - v_{y0})} \qquad$ (**eq 2**) (Isoler $J_n$)

Développons notre changement de moment cinétique selon l'axe *z* de notre corps sous l'application d'une impulsion de rotation causé par la force normale de contact afin d'en évaluer la vitesse angulaire finale $\omega_z$ :

$$L_z = L_{z0} \pm r\, J_n \sin(\theta)$$

$$\Rightarrow \quad (I\omega_z) = (I\omega_{z0}) \pm r\, J_n \sin(\theta) \qquad (L_z = I\omega_z)$$

$$\Rightarrow \quad I\omega_z = I\omega_{z0} \pm r\big(m(v_y - v_{y0})\big)\sin(\theta) \qquad \text{(Remplacer } J_n \text{ : } \textbf{eq 2}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega_z = \omega_{z0} \pm \frac{mr\sin(\theta)}{I}(v_y - v_{y0})} \qquad (\textbf{eq 3}) \qquad \text{(Diviser par } I\text{)}$$

Appliquons la conservation de l'énergie à la collision du corps afin d'évaluer une expression pour la vitesse finale $v_y$ selon l'axe *y* :

$$K_f = K_i$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega_z^{\ 2} = \frac{1}{2}mv_0^{\ 2} + \frac{1}{2}I\omega_{z0}^{\ 2} \qquad (K = K_{\text{CM}} + K_{\text{rot}})$$

$$\Rightarrow \quad mv^2 + I\omega_z^{\ 2} = mv_0^{\ 2} + I\omega_{z0}^{\ 2} \qquad \text{(Simplifier facteur 2)}$$

$$\Rightarrow \quad m(v_x^{\ 2} + v_y^{\ 2}) + I\omega_z^{\ 2} = m(v_{x0}^{\ 2} + v_{y0}^{\ 2}) + I\omega_{z0}^{\ 2} \qquad (v^2 = v_x^{\ 2} + v_y^{\ 2})$$

$$\Rightarrow \quad m\big((v_{x0})^2 + v_y^{\ 2}\big) + I\omega_z^{\ 2} = m(v_{x0}^{\ 2} + v_{y0}^{\ 2}) + I\omega_{z0}^{\ 2} \qquad \text{(Remplacer } v_x = v_{x0} \text{ : } \textbf{eq 1}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad mv_y^{\ 2} + I\omega_z^{\ 2} = mv_{y0}^{\ 2} + I\omega_{z0}^{\ 2} \qquad \text{(Simplifier } mv_{x0}^{\ 2}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad mv_y^{\ 2} + I\left(\omega_{z0} \pm \frac{mr\sin(\theta)(v_y - v_{y0})}{I}\right)^2 = mv_{y0}^{\ 2} + I\omega_{z0}^{\ 2} \qquad \text{(Remplacer } \omega_z \text{ : } \textbf{eq 3}\text{)}$$

En développant le carré de notre expression précédente, nous obtenons

$$mv_y^{\ 2} + I\left(\omega_{z0}^{\ 2} \pm \frac{2mr\sin(\theta)(v_y - v_{y0})\omega_{z0}}{I} + \frac{m^2r^2\sin^2(\theta)(v_y - v_{y0})^2}{I^2}\right) = mv_{y0}^{\ 2} + I\omega_{z0}^{\ 2}$$

ce qui nous donne après avoir distribué $I$ l'expression

$$mv_y^{\ 2} + I\omega_{z0}^{\ 2} \pm 2mr\sin(\theta)(v_y - v_{y0})\omega_{z0} + \frac{m^2r^2\sin^2(\theta)(v_y - v_{y0})^2}{I} = mv_{y0}^{\ 2} + I\omega_{z0}^{\ 2} \quad .$$

Simplifions le terme $I\omega_{z0}^{\ 2}$ et divisons par la masse *m* afin d'obtenir l'expression plus compacte

$$v_y^{\ 2} \pm 2r\sin(\theta)(v_y - v_{y0})\omega_{z0} + \frac{mr^2\sin^2(\theta)(v_y - v_{y0})^2}{I} = v_{y0}^{\ 2} \quad .$$

Nous allons maintenant regrouper le terme ${v_y}^2$ et ${v_{y0}}^2$ afin de réécrire le tout sous la forme

$$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$$

afin d'obtenir une expression faisant intervenir le terme $\Delta v_y = v_y - v_{y0}$ :

$$
\begin{aligned}
& {v_y}^2 \pm 2r\sin(\theta)(v_y - v_{y0})\omega_{z0} + \frac{mr^2 \sin^2(\theta)(v_y - v_{y0})^2}{I} = {v_{y0}}^2 && \text{(Éq. précédente)} \\
\Rightarrow\quad & {v_y}^2 - {v_{y0}}^2 \pm 2r\sin(\theta)(v_y - v_{y0})\omega_{z0} + \frac{mr^2 \sin^2(\theta)(v_y - v_{y0})^2}{I} = 0 && \text{(Mettre égal à zéro)} \\
\Rightarrow\quad & (v_y + v_{y0})(v_y - v_{y0}) \pm 2r\sin(\theta)(v_y - v_{y0})\omega_{z0} + \frac{mr^2 \sin^2(\theta)(v_y - v_{y0})^2}{I} = 0 && \text{(Réécriture)} \\
\Rightarrow\quad & (v_y - v_{y0})\left[v_y + v_{y0} \pm 2r\sin(\theta)\omega_{z0} + \frac{mr^2 \sin^2(\theta)(v_y - v_{y0})}{I}\right] = 0 && \text{(Factoriser } v_y - v_{y0}\text{)}
\end{aligned}
$$

Nous pouvons remarquer que cette équation sera satisfaite pour $v_y - v_{y0} = 0$ ce qui implique que $v_y = v_{y0}$. Cette **solution n'est pas acceptable physiquement** puisqu'il n'y aurait pas de changement de vitesse selon l'axe $y$ (l'effet fantôme). Rejeter cette solution nous permet de diviser l'équation précédente par $v_y - v_{y0}$ ce qui nous donnera

$$v_y + v_{y0} \pm 2r\sin(\theta)\omega_{z0} + \frac{mr^2 \sin^2(\theta)(v_y - v_{y0})}{I} = 0$$

Isolons maintenant $v_y$ à partir de l'équation précédente en commençant par isoler l'expression $v_y - v_{y0}$, car cela facilitera la suite du calcul :

$$
\begin{aligned}
& v_y + v_{y0} \pm 2r\sin(\theta)\omega_{z0} + \frac{mr^2 \sin^2(\theta)(v_y - v_{y0})}{I} = 0 && \text{(Équation précédente)} \\
\Rightarrow\quad & v_y + (-v_{y0} + v_{y0}) + v_{y0} \pm 2r\sin(\theta)\omega_{z0} + \frac{mr^2 \sin^2(\theta)(v_y - v_{y0})}{I} = 0 && \text{(Ajouter } -v_{y0} + v_{y0}\text{)} \\
\Rightarrow\quad & (v_y - v_{y0}) + 2v_{y0} \pm 2r\sin(\theta)\omega_{z0} + \frac{mr^2 \sin^2(\theta)(v_y - v_{y0})}{I} = 0 && \text{(Simplifier)} \\
\Rightarrow\quad & (v_y - v_{y0})\left(1 + \frac{mr^2 \sin^2(\theta)}{I}\right) + 2(v_{y0} \pm r\sin(\theta)\omega_{z0}) = 0 && \text{(Factoriser } v_y - v_{y0} \text{ et 2)} \\
\Rightarrow\quad & v_y - v_{y0} = -2\frac{(v_{y0} \pm r\sin(\theta)\omega_{z0})}{\left(1 + \frac{mr^2 \sin^2(\theta)}{I}\right)} && \text{(Isoler } v_y - v_{y0}\text{)} \\
\Rightarrow\quad & v_y = v_{y0} - 2\frac{v_{y0} \pm r\sin(\theta)\omega_{z0}}{1 + \frac{mr^2 \sin^2(\theta)}{I}} \quad \blacksquare \; (1) && \text{(Isoler } v_y\text{)}
\end{aligned}
$$

Nous pouvons remarquer que la solution

$$v_y = v_{y0} - 2\frac{v_{y0} \pm r\sin(\theta)\omega_{z0}}{1+\dfrac{mr^2\sin^2(\theta)}{I}}$$

nous permet d'expliquer qu'une particule va toujours rebondir après une collision élastique avec une vitesse selon l'axe $y$ inversée tel que $v_y = v_{y0} - 2v_{y0} = -v_{y0}$ !

Évaluons notre vitesse angulaire finale $\omega_{zf}$ à partir de l'équation **eq 3** :

$$\omega_z = \omega_{z0} \pm \frac{mr\sin(\theta)}{I}\left(v_y - v_{y0}\right) \qquad \textbf{(eq 3)}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_z = \omega_{z0} \pm \frac{mr\sin(\theta)}{I}\left(\left(v_{y0} - 2\frac{v_{y0} \pm r\sin(\theta)\omega_{z0}}{1+\dfrac{mr^2\sin^2(\theta)}{I}}\right) - v_{y0}\right) \qquad \text{(Remplacer } v_y\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_z = \omega_{z0} \pm \frac{mr\sin(\theta)}{I}\left(-2\frac{v_{y0} \pm r\sin(\theta)\omega_{z0}}{1+\dfrac{mr^2\sin^2(\theta)}{I}}\right) \qquad \text{(Simplifier } v_{y0}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_z = \omega_{z0} \pm \frac{mr\sin(\theta)}{I}\left(-2\frac{v_{y0} \pm r\sin(\theta)\omega_{z0}}{\dfrac{I+mr^2\sin^2(\theta)}{I}}\right) \qquad \text{(Dénominateur commun)}$$

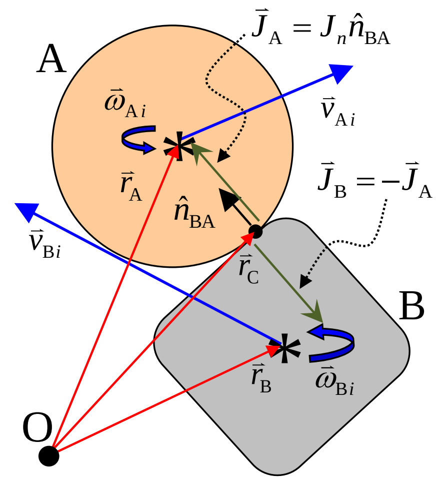
$$\Rightarrow \quad \omega_z = \omega_{z0} \pm \frac{-2mr}{I+mr^2\sin(\theta)}\left(v_{y0} \pm r\sin(\theta)\omega_{z0}\right) \quad \blacksquare \ (2) \qquad \text{(Simplifier dénominateur)}$$

**Situation A : *Le carré qui rebondit sur un plan incliné.*** Un carré de 3 kg de 1,2 m de côté entre en collision avec un plan incliné à 40° par rapport à l'horizontale. Avant le contact, le centre de masse se déplace à 4 m/s à 30° sous l'horizontale et il tourne autour de son centre de masse avec une vitesse angulaire de 2,8 rad/s. La position du coin du carré qui entre en contact avec le plan incliné est tel qu'illustré sur le schéma ci-contre. On désire évaluer **(a)** la vitesse du carré sous forme vectorielle et **(b)** la vitesse angulaire du carré après la collision.

En construction …

## L'impulsion lors d'une collision en restitution

Dans le modèle de réaction basé sur le impulsion (impulse-based reaction model[1]), nous pouvons réaliser une collision inélastique entre deux corps rigides et provoquer un changement de vitesse au centre de masse des deux corps ainsi qu'un changement de vitesse angulaire de ceux-ci.




En déterminant une impulsion $J_n$ appliquée selon l'orientation de la normale à la surface $\hat{n}_{\mathrm{BA}}$ déterminée par le lieu de la collision $\vec{r}_{\mathrm{C}}$, nous pouvons faire une mise à jour instantanée des vitesses $\vec{v}_{\mathrm{A}f}$ et $\vec{v}_{\mathrm{B}f}$ ainsi que les vitesses angulaires $\vec{\omega}_{\mathrm{A}f}$ et $\vec{\omega}_{\mathrm{B}f}$ à deux corps rigides **A** et **B** :

<u>Pour le corps **A** :</u> $\vec{v}_{\mathrm{A}f} = \vec{v}_{\mathrm{A}i} + \dfrac{J_n}{m_{\mathrm{A}}}\hat{n}_{\mathrm{BA}}$ et $\vec{\omega}_{\mathrm{A}f} = \vec{\omega}_{\mathrm{A}i} + J_n\, I_{\mathrm{A\,CM}}^{(\mathrm{O})\;-1}\left(\vec{r}_{\mathrm{AC}} \times \hat{n}_{\mathrm{BA}}\right)$

<u>Pour le corps **B** :</u> $\vec{v}_{\mathrm{B}f} = \vec{v}_{\mathrm{B}i} - \dfrac{J_n}{m_{\mathrm{B}}}\hat{n}_{\mathrm{BA}}$ et $\vec{\omega}_{\mathrm{B}f} = \vec{\omega}_{\mathrm{B}i} - J_n\, I_{\mathrm{B\,CM}}^{(\mathrm{O})\;-1}\left(\vec{r}_{\mathrm{BC}} \times \hat{n}_{\mathrm{BA}}\right)$

<u>L'impulsion :</u>

$$J_n = -(1+e)\frac{\left(\vec{v}_{\mathrm{A}i} - \vec{v}_{\mathrm{B}i} + \vec{\omega}_{\mathrm{A}i}\times\vec{r}_{\mathrm{AC}} - \vec{\omega}_{\mathrm{B}i}\times\vec{r}_{\mathrm{BC}}\right)\cdot\hat{n}_{\mathrm{BA}}}{\dfrac{1}{m_{\mathrm{A}}} + \dfrac{1}{m_{\mathrm{B}}} + \left(I_{\mathrm{A\text{-}CM}}^{(\mathrm{O})\;-1}\left(\vec{r}_{\mathrm{AC}}\times\hat{n}_{\mathrm{BA}}\right)\times\vec{r}_{\mathrm{AC}} + I_{\mathrm{B\text{-}CM}}^{(\mathrm{O})\;-1}\left(\vec{r}_{\mathrm{BC}}\times\hat{n}_{\mathrm{BA}}\right)\times\vec{r}_{\mathrm{BC}}\right)\cdot\hat{n}_{\mathrm{BA}}}$$

<u>Paramètres associés à la collision :</u>

$\vec{r}_{\mathrm{C}}$ : Position de la position où la collision a lieu entre l'objet **A** et l'objet **B** par rapport à l'origine de **O** (m).

$\hat{n}_{\mathrm{BA}}$ : Normale à la surface de l'objet **B** pointant vers l'extérieur de **B** (normale de **B** poussant sur **A**).

$J_n$ : Composante de l'impulsion appliquée selon l'axe $\hat{n}_{\mathrm{BA}}$ (Ns).

<u>Paramètres associés au corps rigide **A** :</u>

$m_{\mathrm{A}p}$ : Particule $p$ de masse $m_{\mathrm{A}p}$ appartenant à l'objet **A** pour définir sa masse totale (kg).

$N_{\mathrm{A}}$ : Nombre de particule appartenant à l'objet **A** pour définir sa masse.

$m_{\mathrm{A}}$ : Masse de l'objet **A** (kg). ($m_{\mathrm{A}} = \sum_{p=1}^{N_{\mathrm{A}}} m_{\mathrm{A}p}$)

$\vec{r}_{\mathrm{A}}$ : Position du centre de masse de l'objet **A** par rapport à l'origine de **O** (m).

$\vec{r}_{\mathrm{AC}}$ : Distance du centre de masse de l'objet **A** au point de collision **C** selon **O** (m). ($\vec{r}_{\mathrm{AC}} = \vec{r}_{\mathrm{C}} - \vec{r}_{\mathrm{A}}$)

---

[1] Consulter : [https://en.wikipedia.org/wiki/Collision_response](https://en.wikipedia.org/wiki/Collision_response)

$\vec{v}_{\mathrm{A}\,i}$ : Vitesse initiale du centre de masse de l'objet **A** par rapport à **O** (m/s).

$\vec{\omega}_{\mathrm{A}\,i}$ : Vitesse angulaire initiale du corps **A** par rapport à **O** (rad/s).

$\vec{v}_{\mathrm{A}\,f}$ : Vitesse finale du centre de masse du corps **A** par rapport à **O** (m/s).

$\vec{\omega}_{\mathrm{A}\,f}$ : Vitesse angulaire finale du corps **A** par rapport à **O** (rad/s).

<u>Paramètres associés au corps rigide **B** :</u>

$m_{\mathrm{B}q}$ : Particule $q$ de masse $m_{\mathrm{B}q}$ appartenant à l'objet **B** pour définir sa masse totale (kg).

$N_{\mathrm{B}}$ : Nombre de particule appartenant à l'objet **B** pour définir sa masse.

$m_{\mathrm{B}}$ : Masse de l'objet **B** (kg). ( $m_{\mathrm{B}} = \sum_{q=1}^{N_{\mathrm{B}}} m_{\mathrm{B}q}$ )

$\vec{r}_{\mathrm{B}}$ : Position du centre de masse de l'objet **B** par rapport à l'origine de **O** (m).

$\vec{r}_{\mathrm{BC}}$ : Distance du centre de masse de l'objet **A** au point de collision **C** selon **O** (m) ( $\vec{r}_{\mathrm{BC}} = \vec{r}_{\mathrm{C}} - \vec{r}_{\mathrm{B}}$ )

$\vec{v}_{\mathrm{B}i}$ : Vitesse initiale du centre de masse de l'objet **B** par rapport à **O** (m/s).

$\vec{\omega}_{\mathrm{B}i}$ : Vitesse angulaire initiale du corps **B** (rad/s).

$\vec{v}_{\mathrm{B}\,f}$ : Vitesse finale du centre de masse du corps **B** par rapport à **O** (m/s).

$\vec{\omega}_{\mathrm{B}\,f}$ : Vitesse angulaire finale du corps **B** (rad/s).

<u>Paramètres associés à la détermination des tenseurs d'inertie des corps **A** et **B** :</u> (en système de particules)

$I_{\text{A-CM}}^{(\mathrm{O})}$ : Tenseur de moment d'inertie de l'objet **A** évalué au centre de masse $\vec{r}_{\mathrm{A}}$ selon le système de coordonnée de **O** (kg·m$^2$)

$$I_{\text{A-CM}}^{(\mathrm{O})} = \begin{pmatrix} I_{xx\text{A-CM}} & I_{xy\text{A-CM}} & I_{xz\text{A-CM}} \\ I_{yx\text{A-CM}} & I_{yy\text{A-CM}} & I_{yz\text{A-CM}} \\ I_{zx\text{A-CM}} & I_{zy\text{A-CM}} & I_{zz\text{A-CM}} \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \begin{aligned} r_{x\mathrm{A}p/\text{A-CM}} &= r_{x\mathrm{A}p} - r_{x\mathrm{A}} \\ r_{y\mathrm{A}p/\text{A-CM}} &= r_{y\mathrm{A}p} - r_{y\mathrm{A}} \\ r_{z\mathrm{A}p/\text{A-CM}} &= r_{z\mathrm{A}p} - r_{z\mathrm{A}} \end{aligned}$$

où

$$I_{xx\text{A-CM}} = \sum_{p=1}^{N_{\mathrm{A}}} m_{\mathrm{A}p} \left( r_{y\mathrm{A}p/\text{A-CM}}{}^2 + r_{z\mathrm{A}p/\text{A-CM}}{}^2 \right) \qquad I_{xy\text{A-CM}} = I_{yx\text{A-CM}} = -\sum_{p=1}^{N_{\mathrm{A}}} m_{\mathrm{A}p}\, r_{x\mathrm{A}p/\text{A-CM}}\, r_{y\mathrm{A}p/\text{A-CM}}$$

$$I_{yy\text{A-CM}} = \sum_{p=1}^{N_{\mathrm{A}}} m_{\mathrm{A}p} \left( r_{x\mathrm{A}p/\text{A-CM}}{}^2 + r_{z\mathrm{A}p/\text{A-CM}}{}^2 \right) \qquad I_{xz\text{A-CM}} = I_{zx\text{A-CM}} = -\sum_{p=1}^{N_{\mathrm{A}}} m_{\mathrm{A}p}\, r_{x\mathrm{A}p/\text{A-CM}}\, r_{z\mathrm{A}p/\text{A-CM}}$$

$$I_{zz\text{A-CM}} = \sum_{p=1}^{N_{\mathrm{A}}} m_{\mathrm{A}p} \left( r_{x\mathrm{A}p/\text{A-CM}}{}^2 + r_{y\mathrm{A}p/\text{A-CM}}{}^2 \right) \qquad I_{yz\text{A-CM}} = I_{zy\text{A-CM}} = -\sum_{p=1}^{N_{\mathrm{A}}} m_{\mathrm{A}p}\, r_{y\mathrm{A}p/\text{A-CM}}\, r_{z\mathrm{A}p/\text{A-CM}}$$

$I_{\text{B-CM}}^{(\text{O})}$ : Tenseur de moment d'inertie de l'objet **B** évalué au centre de masse $\vec{r}_{\text{B}}$ selon le système de coordonnée de **O** (kg·m²)

$$I_{\text{B-CM}}^{(\text{O})} = \begin{pmatrix} I_{xx\text{B-CM}} & I_{xy\text{B-CM}} & I_{xz\text{B-CM}} \\ I_{yx\text{B-CM}} & I_{yy\text{B-CM}} & I_{yz\text{B-CM}} \\ I_{zx\text{B-CM}} & I_{zy\text{B-CM}} & I_{zz\text{B-CM}} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} r_{x\text{B}q/\text{B-CM}} &= r_{x\text{B}q} - r_{x\text{B}} \\ r_{y\text{B}q/\text{B-CM}} &= r_{y\text{B}q} - r_{y\text{B}} \\ r_{z\text{B}q/\text{A-CM}} &= r_{z\text{B}q} - r_{z\text{B}} \end{aligned}$$

où

$$I_{xx\text{B-CM}} = \sum_{q=1}^{N_\text{B}} m_{\text{B}q}\left(r_{y\text{B}q/\text{B-CM}}{}^2 + r_{z\text{B}q/\text{B-CM}}{}^2\right) \qquad I_{xy\text{B-CM}} = I_{yx\text{B-CM}} = -\sum_{q=1}^{N_\text{B}} m_{\text{B}q}\, r_{x\text{B}q/\text{B-CM}}\, r_{y\text{B}q/\text{B-CM}}$$

$$I_{yy\text{B-CM}} = \sum_{q=1}^{N_\text{B}} m_{\text{B}q}\left(r_{x\text{B}q/\text{A-CM}}{}^2 + r_{z\text{B}q/\text{B-CM}}{}^2\right) \qquad I_{xz\text{B-CM}} = I_{zx\text{B-CM}} = -\sum_{q=1}^{N_\text{B}} m_{\text{B}q}\, r_{x\text{B}q/\text{B-CM}}\, r_{z\text{B}q/\text{B-CM}}$$

$$I_{zz\text{B-CM}} = \sum_{q=1}^{N_\text{B}} m_{\text{B}q}\left(r_{x\text{B}q/\text{B-CM}}{}^2 + r_{y\text{B}q/\text{B-CM}}{}^2\right) \qquad I_{yz\text{B-CM}} = I_{zy\text{B-CM}} = -\sum_{q=1}^{N_\text{B}} m_{\text{B}q}\, r_{y\text{B}q/\text{B-CM}}\, r_{z\text{B}q/\text{B-CM}}$$

<u>Particularité de la collision à 2D :</u>

Dans le cas d'une situation où la collision serait strictement réalisée en deux dimensions, nous pouvons représenter les différentes positions, les vitesses et les vitesses angulaires à l'aide des vecteurs suivants :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\vec{r}_\text{A} = \left(r_{x\text{A}}\,,\, r_{y\text{A}}\,,0\right)$ | $\vec{r}_\text{C} = \left(r_{x\text{C}}\,,\, r_{y\text{C}}\,,0\right)$ | $\vec{r}_{\text{A}p} = \left(r_{x\text{A}p}\,,\, r_{y\text{A}p}\,,0\right)$ | $\vec{v}_\text{A} = \left(v_{x\text{A}}\,,v_{y\text{A}}\,,0\right)$ | $\vec{v}_\text{B} = \left(v_{x\text{B}}\,,v_{y\text{B}}\,,0\right)$ |
| $\vec{r}_\text{B} = \left(r_{x\text{B}}\,,\, r_{y\text{B}}\,,0\right)$ | $\hat{n}_\text{BA} = \left(n_{x\text{BA}}\,,\, n_{y\text{BA}}\,,0\right)$ | $\vec{r}_{\text{B}q} = \left(r_{x\text{B}q}\,,\, r_{y\text{B}q}\,,0\right)$ | $\vec{\omega}_\text{A} = \left(0,0,\omega_{z\text{A}}\right)$ | $\vec{\omega}_\text{B} = \left(0,0,\omega_{z\text{B}}\right)$ |

En analysant nos équations, nous réalisons qu'il y aura plusieurs produits vectoriels qui seront très facile à calculer :

<u>Rappel produit vectoriel :</u> $\vec{A}\times\vec{B} = \left(A_yB_z - A_zB_y\right)\vec{i} - \left(A_xB_z - A_zB_x\right)\vec{j} + \left(A_xB_y - A_yB_x\right)\vec{k}$

- $\vec{r}_\text{AC}\times\vec{n}_\text{BA} = \left(\vec{r}_\text{C} - \vec{r}_\text{A}\right)\times\vec{n}_\text{BA}$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}_\text{AC}\times\vec{n}_\text{BA} = \left(\left(r_{x\text{C}}\,,\, r_{y\text{C}}\,,0\right) - \left(r_{x\text{A}}\,,\, r_{y\text{A}}\,,0\right)\right)\times\vec{n}_\text{BA}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}_\text{AC}\times\vec{n}_\text{BA} = \left(r_{x\text{C}} - r_{x\text{A}},\, r_{y\text{C}} - r_{y\text{A}},0\right)\times\vec{n}_\text{BA}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}_\text{AC}\times\vec{n}_\text{BA} = \left(r_{x\text{C}} - r_{x\text{A}},\, r_{y\text{C}} - r_{y\text{A}},0\right)\times\left(n_{x\text{BA}}\,,n_{y\text{BA}}\,,0\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{r}_\text{AC}\times\vec{n}_\text{BA} = \left(0\;,\,0\;,\;\left(r_{x\text{C}} - r_{x\text{A}}\right)n_{y\text{BA}} - \left(r_{y\text{C}} - r_{y\text{A}}\right)n_{x\text{BA}}\right)}$$

- $\vec{r}_\text{BC}\times\vec{n}_\text{BA} = \left(\vec{r}_\text{B} - \vec{r}_\text{A}\right)\times\vec{n}_\text{BA}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{r}_\text{BC}\times\vec{n}_\text{BA} = \left(0\;,\,0\;,\;\left(r_{x\text{C}} - r_{x\text{B}}\right)n_{y\text{BA}} - \left(r_{y\text{C}} - r_{y\text{B}}\right)n_{x\text{BA}}\right)}$$

- $\vec{\omega}_{\text{A}i}\times\vec{r}_\text{AC} = \vec{\omega}_{\text{A}i}\times\left(\vec{r}_\text{C} - \vec{r}_\text{A}\right)$

$$\Rightarrow \quad \vec{\omega}_{\text{A}i}\times\vec{r}_\text{AC} = \vec{\omega}_{\text{A}i}\times\left(r_{x\text{C}} - r_{x\text{A}},\, r_{y\text{C}} - r_{y\text{A}},0\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\omega}_{\text{A}i}\times\vec{r}_\text{AC} = \left(0\;,0\;,\;\omega_{z\text{A}}\right)\times\left(r_{x\text{C}} - r_{x\text{A}},\, r_{y\text{C}} - r_{y\text{A}},0\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\omega}_{\text{A}i}\times\vec{r}_\text{AC} = \left(-\omega_{z\text{A}}\left(r_{y\text{C}} - r_{y\text{A}}\right)\,,\,-\left(-\omega_{z\text{A}}\left(r_{x\text{C}} - r_{x\text{A}}\right)\right)\,,\;0\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{\omega}_{\text{A}i}\times\vec{r}_\text{AC} = \left(-\omega_{z\text{A}}\left(r_{y\text{C}} - r_{y\text{A}}\right)\,,\;\omega_{z\text{A}}\left(r_{x\text{C}} - r_{x\text{A}}\right)\,,\;0\right)}$$

- $\vec{\omega}_{\mathrm{B}i} \times \vec{r}_{\mathrm{BC}} = \vec{\omega}_{\mathrm{B}i} \times \left( \vec{r}_{\mathrm{C}} - \vec{r}_{\mathrm{B}} \right)$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{\omega}_{\mathrm{B}i} \times \vec{r}_{\mathrm{BC}} = \left( -\omega_{z\mathrm{B}} \left( r_{y\mathrm{C}} - r_{y\mathrm{B}} \right) \, , \, \omega_{z\mathrm{B}} \left( r_{x\mathrm{C}} - r_{x\mathrm{B}} \right) \, , \, 0 \right)}$

Nous avons également des doubles produits vectoriels à réaliser :

$$\vec{T}_{\mathrm{AC}} = \left( \vec{r}_{\mathrm{AC}} \times \hat{n}_{\mathrm{BA}} \right) \times \vec{r}_{\mathrm{AC}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{T}_{\mathrm{AC}} = \left( 0 \, , 0 \, , \, \left( r_{x\mathrm{C}} - r_{x\mathrm{A}} \right) n_{y\mathrm{BA}} - \left( r_{y\mathrm{C}} - r_{y\mathrm{A}} \right) n_{x\mathrm{BA}} \right) \times \left( r_{x\mathrm{C}} - r_{x\mathrm{A}} , \, r_{y\mathrm{C}} - r_{y\mathrm{A}} , 0 \right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{T}_{\mathrm{AC}} = \left( -\left[ \left( r_{x\mathrm{C}} - r_{x\mathrm{A}} \right) n_{y\mathrm{BA}} - \left( r_{y\mathrm{C}} - r_{y\mathrm{A}} \right) n_{x\mathrm{BA}} \right] \left( r_{y\mathrm{C}} - r_{y\mathrm{A}} \right) , \, \left[ \left( r_{x\mathrm{C}} - r_{x\mathrm{A}} \right) n_{y\mathrm{BA}} - \left( r_{y\mathrm{C}} - r_{y\mathrm{A}} \right) n_{x\mathrm{BA}} \right] \left( r_{x\mathrm{C}} - r_{x\mathrm{A}} \right) , \, 0 \right)}$$

$$\vec{T}_{\mathrm{BC}} = \left( \vec{r}_{\mathrm{BC}} \times \hat{n}_{\mathrm{BA}} \right) \times \vec{r}_{\mathrm{BC}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{T}_{\mathrm{BC}} = \left( -\left[ \left( r_{x\mathrm{C}} - r_{x\mathrm{B}} \right) n_{y\mathrm{BA}} - \left( r_{y\mathrm{C}} - r_{y\mathrm{B}} \right) n_{x\mathrm{BA}} \right] \left( r_{y\mathrm{C}} - r_{y\mathrm{B}} \right) , \, \left[ \left( r_{x\mathrm{C}} - r_{x\mathrm{B}} \right) n_{y\mathrm{BA}} - \left( r_{y\mathrm{C}} - r_{y\mathrm{B}} \right) n_{x\mathrm{BA}} \right] \left( r_{x\mathrm{C}} - r_{x\mathrm{B}} \right) , \, 0 \right)}$$

En examinant les valeurs admissibles pour $\vec{r}_{\mathrm{A}p}$ et $\vec{r}_{\mathrm{B}q}$, nous arrivons rapidement à la conclusion qu'il y aura plusieurs termes nulles dans les tenseurs d'inertie $I_{\text{A-CM}}^{(\mathrm{O})}$ et $I_{\text{B-CM}}^{(\mathrm{O})}$ et d'autres qui seront simplifiés :

| Pour objet **A** | Pour objet **B** | |
|---|---|---|
| $I_{\text{A-CM}}^{(\mathrm{O})} = \begin{pmatrix} I_{xx\text{A-CM}} & I_{xy\text{A-CM}} & 0 \\ I_{yx\text{A-CM}} & I_{yy\,\text{A-CM}} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz\text{A-CM}} \end{pmatrix}$ | $I_{\text{B-CM}}^{(\mathrm{O})} = \begin{pmatrix} I_{xx\text{B-CM}} & I_{xy\text{B-CM}} & 0 \\ I_{yx\text{B-CM}} & I_{yy\,\text{B-CM}} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz\text{B-CM}} \end{pmatrix}$ | |
| $I_{xx\text{A-CM}} = \sum_{p=1}^{N_{\mathrm{A}}} m_{\mathrm{A}p} \, {r_{y\mathrm{A}p/\text{A-CM}}}^2$ | $I_{xx\text{B-CM}} = \sum_{q=1}^{N_{\mathrm{B}}} m_{\mathrm{B}q} \, {r_{y\mathrm{B}q/\text{B-CM}}}^2$ | |
| $I_{yy\text{A-CM}} = \sum_{p=1}^{N_{\mathrm{A}}} m_{\mathrm{A}p} \, {r_{x\mathrm{A}p/\text{A-CM}}}^2$ | $I_{yy\text{B-CM}} = \sum_{q=1}^{N_{\mathrm{B}}} m_{\mathrm{B}q} \, {r_{x\mathrm{B}q/\text{A-CM}}}^2$ | |
| $I_{zz\text{A-CM}} = \sum_{p=1}^{N_{\mathrm{A}}} m_{\mathrm{A}p} \left( {r_{x\mathrm{A}p/\text{A-CM}}}^2 + {r_{y\mathrm{A}p/\text{A-CM}}}^2 \right)$ | $I_{zz\text{B-CM}} = \sum_{q=1}^{N_{\mathrm{B}}} m_{\mathrm{B}q} \left( {r_{x\mathrm{B}q/\text{B-CM}}}^2 + {r_{y\mathrm{B}q/\text{B-CM}}}^2 \right)$ | (inchangé) |
| $I_{xy\text{A-CM}} = I_{yx\text{A-CM}} = -\sum_{p=1}^{N_{\mathrm{A}}} m_{\mathrm{A}p} \, r_{x\mathrm{A}p/\text{A-CM}} \, r_{y\mathrm{A}p/\text{A-CM}}$ | $I_{xy\text{B-CM}} = I_{yx\text{B-CM}} = -\sum_{q=1}^{N_{\mathrm{B}}} m_{\mathrm{B}q} \, r_{x\mathrm{B}q/\text{B-CM}} \, r_{y\mathrm{B}q/\text{B-CM}}$ | (inchangé) |
| $I_{xz\text{A-CM}} = I_{zx\text{A-CM}} = 0$ | $I_{xz\text{B-CM}} = I_{zx\text{B-CM}} = 0$ | |
| $I_{yz\text{A-CM}} = I_{zy\text{A-CM}} = 0$ | $I_{yz\text{B-CM}} = I_{zy\text{B-CM}} = 0$ | |

Pour conclure notre analyse du problème de la collision en 2D, nous constatons que les équations

$$\vec{\omega}_{\mathrm{A}\,f} = \vec{\omega}_{\mathrm{A}\,i} + J_n\, I_{\mathrm{ACM}}^{(\mathrm{O})\;-1}\left(\vec{r}_{\mathrm{AC}} \times \hat{n}_{\mathrm{BA}}\right) \qquad \text{et} \qquad \vec{\omega}_{\mathrm{B}\,f} = \vec{\omega}_{\mathrm{B}i} - J_n\, I_{\mathrm{BCM}}^{(\mathrm{O})\;-1}\left(\vec{r}_{\mathrm{BC}} \times \hat{n}_{\mathrm{BA}}\right)$$

devront engendrer des calculs de produits matriciels avec des vecteurs tel que

$$I_{\mathrm{ACM}}^{(\mathrm{O})\;-1}\left(\vec{r}_{\mathrm{AC}} \times \vec{n}_{\mathrm{BA}}\right) = \begin{pmatrix} I_{xx\text{A-CM}} & I_{xy\text{A-CM}} & 0 \\ I_{yx\text{A-CM}} & I_{yy\,\text{A-CM}} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz\text{A-CM}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(r_{x\mathrm{C}} - r_{x\mathrm{A}}\right) n_{y\mathrm{BA}} - \left(r_{y\mathrm{C}} - r_{y\mathrm{A}}\right) n_{x\mathrm{BA}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{\left(r_{x\mathrm{C}} - r_{x\mathrm{A}}\right) n_{y\mathrm{BA}} - \left(r_{y\mathrm{C}} - r_{y\mathrm{A}}\right) n_{x\mathrm{BA}}}{I_{zz\text{A-CM}}} \end{pmatrix}$$

et

$$I_{\mathrm{BCM}}^{(\mathrm{O})\;-1}\left(\vec{r}_{\mathrm{BC}} \times \vec{n}_{\mathrm{BA}}\right) = \begin{pmatrix} I_{xx\text{B-CM}} & I_{xy\text{B-CM}} & 0 \\ I_{yx\text{B-CM}} & I_{yy\,\text{B-CM}} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz\text{B-CM}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(r_{x\mathrm{C}} - r_{x\mathrm{B}}\right) n_{y\mathrm{BA}} - \left(r_{y\mathrm{C}} - r_{y\mathrm{B}}\right) n_{x\mathrm{BA}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{\left(r_{x\mathrm{C}} - r_{x\mathrm{B}}\right) n_{y\mathrm{BA}} - \left(r_{y\mathrm{C}} - r_{y\mathrm{B}}\right) n_{x\mathrm{BA}}}{I_{zz\text{B-CM}}} \end{pmatrix}$$

Pour ce qui est de l'équation de l'impulsion

$$J_n = -\left(1+e\right) \frac{\left(\vec{v}_{\mathrm{A}i} - \vec{v}_{\mathrm{B}i} + \vec{\omega}_{\mathrm{A}i} \times \vec{r}_{\mathrm{AC}} - \vec{\omega}_{\mathrm{B}i} \times \vec{r}_{\mathrm{BC}}\right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}}{\dfrac{1}{m_{\mathrm{A}}} + \dfrac{1}{m_{\mathrm{B}}} + \left(I_{\text{A-CM}}^{(\mathrm{O})\;-1}\left(\vec{r}_{\mathrm{AC}} \times \hat{n}_{\mathrm{BA}}\right) \times \vec{r}_{\mathrm{AC}} + I_{\text{B-CM}}^{(\mathrm{O})\;-1}\left(\vec{r}_{\mathrm{BC}} \times \hat{n}_{\mathrm{BA}}\right) \times \vec{r}_{\mathrm{BC}}\right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}} \quad ,$$

les produits matriciels avec les doubles produits vectoriels

$$I_{\text{A-CM}}^{(\mathrm{O})\;-1}\left(\vec{r}_{\mathrm{AC}} \times \hat{n}_{\mathrm{BA}}\right) \times \vec{r}_{\mathrm{AC}} \quad \text{et} \quad I_{\text{B-CM}}^{(\mathrm{O})\;-1}\left(\vec{r}_{\mathrm{BC}} \times \hat{n}_{\mathrm{BA}}\right) \times \vec{r}_{\mathrm{BC}}$$

nécessiterons strictement les composantes *x* et *y* avec z = 0 avec les éléments

$$I_{xx\text{A-CM}}\ ,\ I_{xy\text{A-CM}} = I_{yx\text{A-CM}}\ ,\ I_{yy\,\text{A-CM}} \quad \text{et} \quad I_{xx\text{B-CM}}\ ,\ I_{xy\text{B-CM}} = I_{yx\text{B-CM}}\ ,\ I_{yy\,\text{B-CM}}$$

de nos deux matrices $I_{\text{A-CM}}^{(\mathrm{O})\;-1}$ et $I_{\text{B-CM}}^{(\mathrm{O})\;-1}$. Pour cette raison de complexité, il sera préférable d'effectuer l'ensemble de ces calculs sous forme matricielle et vectorielle <u>sans oublier d'effectuer l'inverse des matrice</u> $I_{\text{A-CM}}^{(\mathrm{O})}$ et $I_{\text{B-CM}}^{(\mathrm{O})}$.

Preuve :

Considérons que les deux corps **A** et **B** sont en contact à la coordonnée $\vec{r}_{\mathrm{CO}}$ par rapport à l'origine **O**. Alors le vecteur distance entre le centre de masse de nos deux corps et le point de contact $\vec{r}_{\mathrm{CO}}$ sera

$$\vec{r}_{\mathrm{AC}} = \vec{r}_{\mathrm{CO}} - \vec{r}_{\mathrm{AO}} \qquad \text{et} \qquad \vec{r}_{\mathrm{BC}} = \vec{r}_{\mathrm{CO}} - \vec{r}_{\mathrm{BO}}$$

$$\vec{p}_{\mathrm{AO}f} = \vec{p}_{\mathrm{AO}i} + \vec{J}_{\mathrm{A}} \qquad \Rightarrow \qquad m_{\mathrm{A}}\vec{v}_{\mathrm{AO}f} = m_{\mathrm{A}}\vec{v}_{\mathrm{AO}i} + \vec{J}_{\mathrm{A}}$$

(Eq **(1)** : Conservation de la quantité de mouvement pour le corps A)

$$\vec{L}_{\mathrm{A}f} = \vec{L}_{\mathrm{A}i} + \Delta\vec{L}_{\mathrm{A}} \qquad \Rightarrow \qquad I_{\mathrm{A}}\vec{\omega}_{\mathrm{A}f} = I_{\mathrm{A}}\vec{\omega}_{\mathrm{A}i} + \vec{r}_{\mathrm{AC}} \times \vec{J}_{\mathrm{A}}$$

(Eq **(2)** : Conservation du moment cinétique pour le corps A par rapport à son centre de masse)

$$\vec{p}_{\mathrm{BO}f} = \vec{p}_{\mathrm{BO}i} + \vec{J}_{\mathrm{B}} \qquad \Rightarrow \qquad m_{\mathrm{B}}\vec{v}_{\mathrm{BO}f} = m_{\mathrm{B}}\vec{v}_{\mathrm{BO}i} + \vec{J}_{\mathrm{B}}$$

(Eq **(3)** : Conservation de la quantité de mouvement pour le corps B)

$$\vec{L}_{\mathrm{B}f} = \vec{L}_{\mathrm{B}i} + \Delta\vec{L}_{\mathrm{B}} \qquad \Rightarrow \qquad I_{\mathrm{B}}\vec{\omega}_{\mathrm{B}f} = I_{\mathrm{B}}\vec{\omega}_{\mathrm{B}i} + \vec{r}_{\mathrm{BC}} \times \vec{J}_{\mathrm{B}}$$

(Eq **(4)** : Conservation du moment cinétique pour le corps B par rapport à son centre de masse)

Si l'on divise l'équation **(1)** par la masse $m_{\mathrm{A}}$ et que l'on divise l'équation **(3)** par la masse $m_{\mathrm{B}}$, nous obtenons deux équations permettant d'évaluer la vitesse finale $\vec{v}_{\mathrm{AO}f}$ et $\vec{v}_{\mathrm{BO}f}$ de nos deux corps :

$$\vec{v}_{\mathrm{AO}f} = \vec{v}_{\mathrm{AO}i} + \frac{\vec{J}_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{A}}} \qquad \text{et} \qquad \vec{v}_{\mathrm{BO}f} = \vec{v}_{\mathrm{BO}i} + \frac{\vec{J}_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{B}}}$$

Si l'on multiplie l'équation **(2)** par l'inverse du tenseur d'inertie $I_{\mathrm{A}}^{-1}$ tel que

$$I_{\mathrm{A}}^{-1} I_{\mathrm{A}} = \mathrm{I} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

et que l'on multiplie l'équation **(4)** par l'inverse du tenseur d'inertie $I_{\mathrm{B}}^{-1}$, nous obtenons deux équations permettant d'évaluer la vitesse angulaire finale $\vec{\omega}_{\mathrm{A}f}$ et $\vec{\omega}_{\mathrm{B}f}$ de nos deux corps par rapport à leur centre de masse respectif :

$$\vec{\omega}_{\mathrm{A}f} = \vec{\omega}_{\mathrm{A}i} + I_{\mathrm{A}}^{-1}\left(\vec{r}_{\mathrm{AC}} \times \vec{J}_{\mathrm{A}}\right) \qquad \text{et} \qquad \vec{\omega}_{\mathrm{B}f} = \vec{\omega}_{\mathrm{B}i} + I_{\mathrm{B}}^{-1}\left(\vec{r}_{\mathrm{BC}} \times \vec{J}_{\mathrm{B}}\right)$$

En raison de la 3$^{\mathrm{e}}$ loi de Newton, nous savons que

$$\vec{J}_{\mathrm{A}} = -\vec{J}_{\mathrm{B}} \quad .$$

Puisque l'impulsion ne sera qu'appliquée que dans le sens de la normale $\hat{n}_{\mathrm{BA}}$ sur le corps **A** et $\hat{n}_{\mathrm{AB}}$ sur le corps **B**, nous pouvons conclure que

$$\vec{J}_{\mathrm{A}} = J_n \hat{n}_{\mathrm{BA}} \qquad \text{et} \qquad \vec{J}_{\mathrm{B}} = -J_n \hat{n}_{\mathrm{BA}} \quad .$$

Pour appliquer la loi de restitution de Newton pour les deux points des deux corps **A** et **B** entrant en collision, nous devons évaluer par rapport au référentiel **O** la vitesse de ces deux points localisés à la position $\vec{r}_{\mathrm{CO}}$.

L'expression de la vitesse du point $\vec{r}_{\mathrm{CO}}$ appartenant au corps **A** avant et après la collision sera

$$\vec{v}_{\mathrm{C(A)}i} = \vec{v}_{\mathrm{AO}i} + \vec{\omega}_{\mathrm{A}\,i} \times \vec{r}_{\mathrm{AC}} \qquad \text{et} \qquad \vec{v}_{\mathrm{C(A)}f} = \vec{v}_{\mathrm{AO}\,f} + \vec{\omega}_{\mathrm{A}\,f} \times \vec{r}_{\mathrm{AC}} \ .$$

De la même façon, l'expression de la vitesse du point $\vec{r}_{\mathrm{CO}}$ appartenant au corps **B** avant et après la collision sera

$$\vec{v}_{\mathrm{C(B)}i} = \vec{v}_{\mathrm{BO}i} + \vec{\omega}_{\mathrm{B}i} \times \vec{r}_{\mathrm{BC}} \qquad \text{et} \qquad \vec{v}_{\mathrm{C(B)}f} = \vec{v}_{\mathrm{BO}\,f} + \vec{\omega}_{\mathrm{B}\,f} \times \vec{r}_{\mathrm{BC}} \ .$$

Nous pouvons appliquer la loi de la restitution de Newton[2]

$$\vec{v}_{\mathrm{AB}\,f} \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}} = -e\,\vec{v}_{\mathrm{AB}i} \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}$$

tout en utilisant les équations

$$\vec{v}_{\mathrm{AB}i} = \vec{v}_{\mathrm{C(A)}i} - \vec{v}_{\mathrm{C(B)}i} \qquad \text{et} \qquad \vec{v}_{\mathrm{AB}\,f} = \vec{v}_{\mathrm{C(A)}f} - \vec{v}_{\mathrm{C(B)}f} \ .$$

En remplaçant l'ensemble de nos équations dans la loi de la restitution de Newton, nous pourrons déterminer une expression permettant d'évaluer le module de l'impulsion $J_n$ que les deux corps **A** et **B** s'appliquent mutuellement qui permettra de modifier nos vitesses linéaires et angulaires. En raison de la 3^e^ loi de Newton, nous savons que

$$\vec{v}_{\mathrm{AB}\,f} \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}} = -e\,\vec{v}_{\mathrm{AB}i} \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\vec{v}_{\mathrm{C(A)}f} - \vec{v}_{\mathrm{C(B)}f}\right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}} = -e\left(\vec{v}_{\mathrm{C(A)}i} - \vec{v}_{\mathrm{C(B)}i}\right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\left(\vec{v}_{\mathrm{AO}\,f} + \vec{\omega}_{\mathrm{A}\,f} \times \vec{r}_{\mathrm{AC}}\right) - \left(\vec{v}_{\mathrm{BO}\,f} + \vec{\omega}_{\mathrm{B}\,f} \times \vec{r}_{\mathrm{BC}}\right)\right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}} = -e\left(\left(\vec{v}_{\mathrm{AO}i} + \vec{\omega}_{\mathrm{A}\,i} \times \vec{r}_{\mathrm{AC}}\right) - \left(\vec{v}_{\mathrm{BO}i} + \vec{\omega}_{\mathrm{B}i} \times \vec{r}_{\mathrm{BC}}\right)\right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\vec{v}_{\mathrm{AO}\,f} - \vec{v}_{\mathrm{BO}\,f} + \vec{\omega}_{\mathrm{A}\,f} \times \vec{r}_{\mathrm{AC}} - \vec{\omega}_{\mathrm{B}\,f} \times \vec{r}_{\mathrm{BC}}\right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}} = -e\left(\vec{v}_{\mathrm{AO}i} - \vec{v}_{\mathrm{BO}i} + \vec{\omega}_{\mathrm{A}\,i} \times \vec{r}_{\mathrm{AC}} - \vec{\omega}_{\mathrm{B}i} \times \vec{r}_{\mathrm{BC}}\right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\left(\vec{v}_{\mathrm{AO}i} + \frac{\vec{J}_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{A}}}\right) - \left(\vec{v}_{\mathrm{BO}i} + \frac{\vec{J}_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{B}}}\right) + \vec{\omega}_{\mathrm{A}\,f} \times \vec{r}_{\mathrm{AC}} - \vec{\omega}_{\mathrm{B}\,f} \times \vec{r}_{\mathrm{BC}}\right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}$$
$$= -e\left(\vec{v}_{\mathrm{AO}i} - \vec{v}_{\mathrm{BO}i} + \vec{\omega}_{\mathrm{A}\,i} \times \vec{r}_{\mathrm{AC}} - \vec{\omega}_{\mathrm{B}i} \times \vec{r}_{\mathrm{BC}}\right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\vec{v}_{\mathrm{AO}i} - \vec{v}_{\mathrm{BO}i}\right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}} + \left(\frac{\vec{J}_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{A}}} - \frac{\vec{J}_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{B}}} + \vec{\omega}_{\mathrm{A}\,f} \times \vec{r}_{\mathrm{AC}} - \vec{\omega}_{\mathrm{B}\,f} \times \vec{r}_{\mathrm{BC}}\right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}$$
$$= -e\left(\vec{v}_{\mathrm{AO}i} - \vec{v}_{\mathrm{BO}i}\right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}} - e\left(\vec{\omega}_{\mathrm{A}\,i} \times \vec{r}_{\mathrm{AC}} - \vec{\omega}_{\mathrm{B}i} \times \vec{r}_{\mathrm{BC}}\right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\vec{J}_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{A}}} - \frac{\vec{J}_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{B}}} + \vec{\omega}_{\mathrm{A}\,f} \times \vec{r}_{\mathrm{AC}} - \vec{\omega}_{\mathrm{B}\,f} \times \vec{r}_{\mathrm{BC}}\right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}$$
$$= -(1+e)\left(\vec{v}_{\mathrm{AO}i} - \vec{v}_{\mathrm{BO}i}\right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}} - e\left(\vec{\omega}_{\mathrm{A}\,i} \times \vec{r}_{\mathrm{AC}} - \vec{\omega}_{\mathrm{B}i} \times \vec{r}_{\mathrm{BC}}\right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}$$

---

[2] Cette définition est disponible dans le chapitre 3.11c des notes de cours.

$$\Rightarrow \quad \left( \frac{\vec{J}_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{A}}} - \frac{\vec{J}_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{B}}} + \left(\vec{\omega}_{\mathrm{A}i} + I_{\mathrm{A}}^{-1}\left(\vec{r}_{\mathrm{AC}} \times \vec{J}_{\mathrm{A}}\right)\right) \times \vec{r}_{\mathrm{AC}} - \left(\vec{\omega}_{\mathrm{B}i} + I_{\mathrm{B}}^{-1}\left(\vec{r}_{\mathrm{BC}} \times \vec{J}_{\mathrm{B}}\right)\right) \times \vec{r}_{\mathrm{BC}} \right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}$$
$$= -(1+e)\left(\vec{v}_{\mathrm{AO}i} - \vec{v}_{\mathrm{BO}i}\right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}} - e\left(\vec{\omega}_{\mathrm{A}i} \times \vec{r}_{\mathrm{AC}} - \vec{\omega}_{\mathrm{B}i} \times \vec{r}_{\mathrm{BC}}\right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\vec{\omega}_{\mathrm{A}i} \times \vec{r}_{\mathrm{AC}} - \vec{\omega}_{\mathrm{B}i} \times \vec{r}_{\mathrm{BC}}\right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}} + \left( \frac{\vec{J}_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{A}}} - \frac{\vec{J}_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{B}}} + I_{\mathrm{A}}^{-1}\left(\vec{r}_{\mathrm{AC}} \times \vec{J}_{\mathrm{A}}\right) \times \vec{r}_{\mathrm{AC}} - I_{\mathrm{B}}^{-1}\left(\vec{r}_{\mathrm{BC}} \times \vec{J}_{\mathrm{B}}\right) \times \vec{r}_{\mathrm{BC}} \right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}$$
$$= -(1+e)\left(\vec{v}_{\mathrm{AO}i} - \vec{v}_{\mathrm{BO}i}\right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}} - e\left(\vec{\omega}_{\mathrm{A}i} \times \vec{r}_{\mathrm{AC}} - \vec{\omega}_{\mathrm{B}i} \times \vec{r}_{\mathrm{BC}}\right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}$$

$$\Rightarrow \quad \left( \frac{\vec{J}_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{A}}} - \frac{\vec{J}_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{B}}} + I_{\mathrm{A}}^{-1}\left(\vec{r}_{\mathrm{AC}} \times \vec{J}_{\mathrm{A}}\right) \times \vec{r}_{\mathrm{AC}} - I_{\mathrm{B}}^{-1}\left(\vec{r}_{\mathrm{BC}} \times \vec{J}_{\mathrm{B}}\right) \times \vec{r}_{\mathrm{BC}} \right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}$$
$$= -(1+e)\left(\vec{v}_{\mathrm{AO}i} - \vec{v}_{\mathrm{BO}i}\right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}} - (1+e)\left(\vec{\omega}_{\mathrm{A}i} \times \vec{r}_{\mathrm{AC}} - \vec{\omega}_{\mathrm{B}i} \times \vec{r}_{\mathrm{BC}}\right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}$$

$$\Rightarrow \quad \left( \frac{\vec{J}_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{A}}} - \frac{\left(-\vec{J}_{\mathrm{A}}\right)}{m_{\mathrm{B}}} + I_{\mathrm{A}}^{-1}\left(\vec{r}_{\mathrm{AC}} \times \vec{J}_{\mathrm{A}}\right) \times \vec{r}_{\mathrm{AC}} - I_{\mathrm{B}}^{-1}\left(\vec{r}_{\mathrm{BC}} \times \left(-\vec{J}_{\mathrm{A}}\right)\right) \times \vec{r}_{\mathrm{BC}} \right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}$$
$$= -(1+e)\left(\vec{v}_{\mathrm{AO}i} - \vec{v}_{\mathrm{BO}i}\right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}} - (1+e)\left(\vec{\omega}_{\mathrm{A}i} \times \vec{r}_{\mathrm{AC}} - \vec{\omega}_{\mathrm{B}i} \times \vec{r}_{\mathrm{BC}}\right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}$$

$$\Rightarrow \quad \left( \frac{\left(J_n \hat{n}_{\mathrm{BA}}\right)}{m_{\mathrm{A}}} + \frac{\left(J_n \hat{n}_{\mathrm{BA}}\right)}{m_{\mathrm{B}}} + I_{\mathrm{A}}^{-1}\left(\vec{r}_{\mathrm{AC}} \times \left(J_n \hat{n}_{\mathrm{BA}}\right)\right) \times \vec{r}_{\mathrm{AC}} + I_{\mathrm{B}}^{-1}\left(\vec{r}_{\mathrm{BC}} \times \left(J_n \hat{n}_{\mathrm{BA}}\right)\right) \times \vec{r}_{\mathrm{BC}} \right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}$$
$$= -(1+e)\left(\vec{v}_{\mathrm{AO}i} - \vec{v}_{\mathrm{BO}i}\right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}} - (1+e)\left(\vec{\omega}_{\mathrm{A}i} \times \vec{r}_{\mathrm{AC}} - \vec{\omega}_{\mathrm{B}i} \times \vec{r}_{\mathrm{BC}}\right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}$$

$$\Rightarrow \quad J_n \left( \frac{\hat{n}_{\mathrm{BA}}}{m_{\mathrm{A}}} + \frac{\hat{n}_{\mathrm{BA}}}{m_{\mathrm{B}}} + I_{\mathrm{A}}^{-1}\left(\vec{r}_{\mathrm{AC}} \times \hat{n}_{\mathrm{BA}}\right) \times \vec{r}_{\mathrm{AC}} + I_{\mathrm{B}}^{-1}\left(\vec{r}_{\mathrm{BC}} \times \hat{n}_{\mathrm{BA}}\right) \times \vec{r}_{\mathrm{BC}} \right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}$$
$$= -(1+e)\left(\vec{v}_{\mathrm{AO}i} - \vec{v}_{\mathrm{BO}i}\right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}} - (1+e)\left(\vec{\omega}_{\mathrm{A}i} \times \vec{r}_{\mathrm{AC}} - \vec{\omega}_{\mathrm{B}i} \times \vec{r}_{\mathrm{BC}}\right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}$$

$$\Rightarrow \quad J_n \left( \frac{1}{m_{\mathrm{A}}} + \frac{1}{m_{\mathrm{B}}} + \left(I_{\mathrm{A}}^{-1}\left(\vec{r}_{\mathrm{AC}} \times \hat{n}_{\mathrm{BA}}\right) \times \vec{r}_{\mathrm{AC}}\right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}} + \left(I_{\mathrm{B}}^{-1}\left(\vec{r}_{\mathrm{BC}} \times \hat{n}_{\mathrm{BA}}\right) \times \vec{r}_{\mathrm{BC}}\right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}} \right)$$
$$= -(1+e)\left(\vec{v}_{\mathrm{AO}i} - \vec{v}_{\mathrm{BO}i}\right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}} - (1+e)\left(\vec{\omega}_{\mathrm{A}i} \times \vec{r}_{\mathrm{AC}} - \vec{\omega}_{\mathrm{B}i} \times \vec{r}_{\mathrm{BC}}\right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}$$

$$\Rightarrow \quad J_n = \frac{-(1+e)\left(\vec{v}_{\mathrm{AO}i} - \vec{v}_{\mathrm{BO}i}\right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}} - (1+e)\left(\vec{\omega}_{\mathrm{A}i} \times \vec{r}_{\mathrm{AC}} - \vec{\omega}_{\mathrm{B}i} \times \vec{r}_{\mathrm{BC}}\right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}}{\frac{1}{m_{\mathrm{A}}} + \frac{1}{m_{\mathrm{B}}} + \left(I_{\mathrm{A}}^{-1}\left(\vec{r}_{\mathrm{AC}} \times \hat{n}_{\mathrm{BA}}\right) \times \vec{r}_{\mathrm{AC}}\right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}} + \left(I_{\mathrm{B}}^{-1}\left(\vec{r}_{\mathrm{BC}} \times \hat{n}_{\mathrm{BA}}\right) \times \vec{r}_{\mathrm{BC}}\right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}}$$

$$\Rightarrow \quad J_n = -(1+e) \frac{\left(\vec{v}_{\mathrm{AO}i} + \vec{\omega}_{\mathrm{A}i} \times \vec{r}_{\mathrm{AC}}\right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}} - \left(\vec{v}_{\mathrm{BO}i} + \vec{\omega}_{\mathrm{B}i} \times \vec{r}_{\mathrm{BC}}\right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}}{\frac{1}{m_{\mathrm{A}}} + \frac{1}{m_{\mathrm{B}}} + \left(I_{\mathrm{A}}^{-1}\left(\vec{r}_{\mathrm{AC}} \times \hat{n}_{\mathrm{BA}}\right) \times \vec{r}_{\mathrm{AC}}\right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}} + \left(I_{\mathrm{B}}^{-1}\left(\vec{r}_{\mathrm{BC}} \times \hat{n}_{\mathrm{BA}}\right) \times \vec{r}_{\mathrm{BC}}\right) \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}} \quad \blacksquare$$