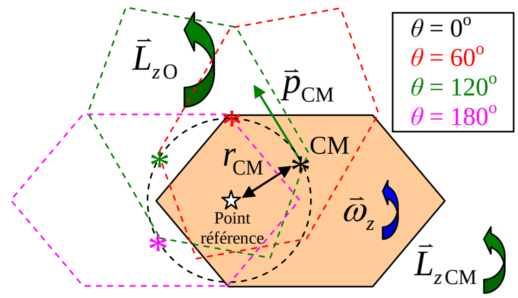
Chapitre 4.X1 – Le moment cinétique orbital et spin

Le moment cinétique orbital et spin

Le moment cinétique L_z d'un corps peut être fractionné en deux parties : moment cinétique orbital et spin. Le **moment cinétique orbitale** $L_{z\,\mathrm{O}}$ correspond au moment cinétique selon l'axe z associé à la translation du centre de masse autour du point de référence et le **moment cinétique spin** $L_{z\,\mathrm{CM}}$ correspond au moment cinétique selon l'axe z associé à la rotation du corps autour de son propre centre de masse CM :



$$L_z = L_{z\,\mathrm{O}} + L_{z\,\mathrm{CM}}$$

tel $$L_{z\,\mathrm{O}} = r_{\mathrm{CM}}\, p_{\mathrm{CM}} \sin(\theta) \quad \text{et} \quad L_{z\,\mathrm{CM}} = I_{\mathrm{CM}}\,\omega_{z\,\mathrm{CM}}$$

où L_z : Moment cinétique total du corps par rapport au point de référence ($\mathrm{kg\cdot m^2/s}$)

$L_{z\,\mathrm{O}}$: Moment cinétique orbital du corps : moment cinétique du CM autour du point de référence ($\mathrm{kg\cdot m^2/s}$)

$L_{z\,\mathrm{CM}}$: Moment cinétique spin du corps : moment cinétique autour du CM ($\mathrm{kg\cdot m^2/s}$)

r_{CM} : Distance dans le plan *xy* entre le point de référence et le CM du corps (m)

p_{CM} : Module de la quantité de mouvement du corps dans le plan *xy* ($\mathrm{kg\cdot m/s}$ ou Ns)

θ : Angle dans le plan *xy* entre r_{CM} et p_{CM}

I_{CM} : Inertie de l'objet en rotation autour de l'axe *z* passant par le CM ($\mathrm{kg\cdot m^2}$)

$\omega_{z\,\mathrm{CM}}$: Vitesse angulaire de rotation du corps autour du centre de masse selon l'axe z (rad/s)

Preuve : (considérant que $\omega_z = \omega_{z\,\mathrm{O}} = \omega_{z\,\mathrm{CM}}$)

À l'aide de la définition du moment cinétique d'un corps et du théorème des axes parallèles, développons une nouvelle expression pour le moment cinétique L_z faisant intervenir deux composantes distinctes tel que le moment orbital $L_{z\,\mathrm{O}}$ et le moment spin $L_{z\,\mathrm{CM}}$:

$L_z = I\omega_z \quad \Rightarrow \quad L_z = \left(mh^2 + I_{\mathrm{CM}}\right)\omega_z$ (Théorème axe parallèle : $I = mh^2 + I_{\mathrm{CM}}$)

$\Rightarrow \quad L_z = mh^2\omega_z + I_{\mathrm{CM}}\omega_z$ (Distribuer ω_z)

$\Rightarrow \quad L_z = mh^2\omega_z + L_{z\,\mathrm{CM}}$ (Remplacer $\omega_z = \omega_{z\,\mathrm{CM}}$ et $L_{z\,\mathrm{CM}} = I_{\mathrm{CM}}\omega_{z\,\mathrm{CM}}$)

$\Rightarrow \quad L_z = m\, r_{\mathrm{CM}}{}^2\omega_z + L_{z\,\mathrm{CM}}$ (Remplacer $r_{\mathrm{CM}} = h$)

$\Rightarrow \quad L_z = m\, r_{\mathrm{CM}} v_{//\,\mathrm{CM}} + L_{z\,\mathrm{CM}}$ (Remplacer $v_{//\,\mathrm{CM}} = r_{\mathrm{CM}}\omega_z$)

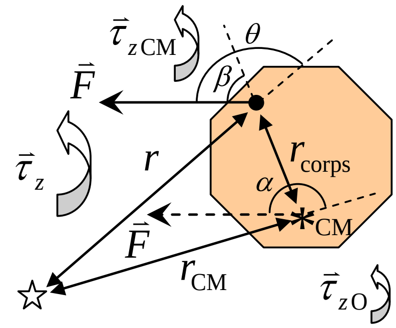
$\Rightarrow \quad L_z = m\, r_{\mathrm{CM}} v_{\mathrm{CM}} \sin(\theta) + L_{z\,\mathrm{CM}}$ (Remplacer $v_{//\,\mathrm{CM}} = v_{\mathrm{CM}}\sin(\theta)$)

$\Rightarrow \quad L_z = r_{\mathrm{CM}}\, p_{\mathrm{CM}} \sin(\theta) + L_{z\,\mathrm{CM}}$ (Remplacer $p_{\mathrm{CM}} = v_{\mathrm{CM}}\sin(\theta)$)

$\Rightarrow \quad L_z = L_{z\,\mathrm{O}} + L_{z\,\mathrm{CM}} \quad \blacksquare$ (Remplacer $L_{z\,\mathrm{O}} = r_{\mathrm{CM}}\, p_{\mathrm{CM}} \sin(\theta)$)

Décomposition du moment de force

Un moment de force τ_z peut être décomposé en moment de force orbital et spin. Le **moment de force orbital** $\tau_{z\mathrm{O}}$ mesure l'efficacité de la force à faire tourner le centre de masse autour du point de référence. Le **moment de force spin** $\tau_{z\mathrm{CM}}$ mesure l'efficacité de la force à faire tourner le corps autour de son propre centre de masse :



$$\tau_z = \tau_{z\mathrm{O}} + \tau_{z\mathrm{CM}}$$

tel que $$\tau_{z\mathrm{O}} = \pm r_{\mathrm{CM}} F \sin(\alpha)$$

et $$\tau_{z\mathrm{CM}} = \pm r_{\mathrm{corps}} F \sin(\beta)$$

où τ_z : Moment de force selon l'axe z ($\mathrm{N \cdot m}$)

$\tau_{z\mathrm{O}}$: Moment de force orbitale selon l'axe z ($\mathrm{N \cdot m}$)

$\tau_{z\mathrm{CM}}$: Moment de force spin selon l'axe z ($\mathrm{N \cdot m}$)

r_{CM} : Distance dans le plan *xy* entre le point de référence et le centre de masse (m)

r_{corps} : Distance dans le plan *xy* entre le centre de masse et l'endroit où est appliquée la force (m)

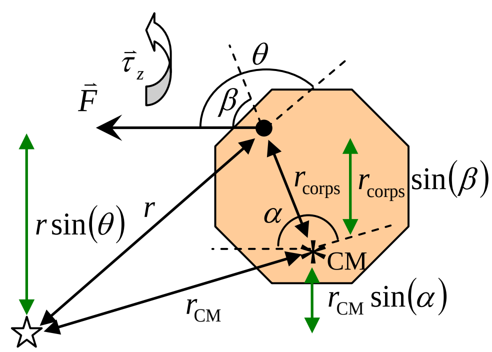
F : Force qui effectue le moment de force projetée dans le plan *xy* (N)

α : Angle dans le plan *xy* entre r_{CM} et F

β : Angle dans le plan *xy* entre r_{corps} et F

<u>Preuve :</u>

Décomposons les distance r, r_{CM} et r_{corps} en composantes perpendiculaire à $\vec{F}$ (bras de levier) à l'aide des angles α, β et θ. Puisque ces trois distances forment un triangle, la somme des distances décomposées précédemment est égale à zéro si l'on attribue un signe au sens du parcours dans le triangle. Ceci nous permet d'affirmer la relation suivante :



$$r\sin(\theta) = r_{\mathrm{CM}}\sin(\alpha) + r_{\mathrm{corps}}\sin(\beta)$$

Remplaçons cette relation dans l'expression du moment de force τ_z et décomposons notre moment de force en $\tau_{z\mathrm{O}}$ et $\tau_{z\mathrm{CM}}$:

$\tau_z = r F \sin(\theta)$ $\Rightarrow$ $\tau_z = r\sin(\theta)F$ (Réécriture)

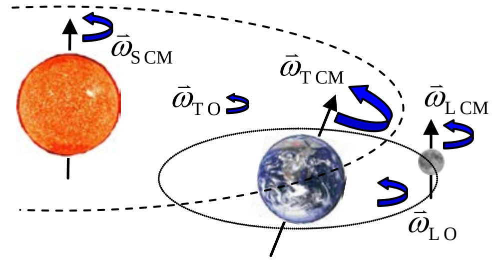
$\Rightarrow$ $\tau_z = \left(r_{\mathrm{CM}}\sin(\alpha) + r_{\mathrm{corps}}\sin(\beta)\right)F$ (Remplacer $r\sin(\theta)$)

$\Rightarrow$ $\tau_z = r_{\mathrm{CM}} F\sin(\alpha) + r_{\mathrm{corps}} F\sin(\beta)$ (Distribuer F)

$\Rightarrow$ $\tau_z = \tau_{z\mathrm{O}} + \tau_{z\mathrm{CM}}$ ■ (Remplacer la définition)

Dynamique de rotation selon l'axe *z*

Le moment cinétique total L_z selon l'axe *z* d'un corps peut toujours être décomposé en composante orbitale $L_{z\mathrm{O}}$ et spin $L_{z\mathrm{CM}}$ même si la vitesse angulaire orbitale $\omega_{z\mathrm{O}}$ n'est pas égale à la vitesse angulaire de spin $\omega_{z\mathrm{CM}}$, car on peut toujours décomposer tout moment de force en composantes orbitales et spins. Ainsi, le moment de force orbitale $\tau_{z\mathrm{O}}$ modifie le moment cinétique orbitale $L_{z\mathrm{O}}$ dans le temps et le moment de force spin $\tau_{z\mathrm{CM}}$ modifie le moment cinétique spin $L_{z\mathrm{CM}}$ dans le temps :



Système Soleil-Terre-Lune

$T_{\mathrm{T\,O}} = 365{,}24$ jours $\qquad \omega_{\mathrm{T\,O}} = 1{,}991\times10^{-7}\,\mathrm{rad/s}$

$T_{\mathrm{T\,CM}} = 23\,\mathrm{h}\,56\,\mathrm{min}\,4\,\mathrm{s} \qquad \omega_{\mathrm{T\,CM}} = 7{,}29\times10^{-5}\,\mathrm{rad/s}$

tel que $\omega = 2\pi / T$

$$\tau_{z\mathrm{O}} = \frac{\mathrm{d}\,L_{z\mathrm{O}}}{\mathrm{d}t} \quad \text{et} \quad \tau_{z\mathrm{CM}} = \frac{\mathrm{d}\,L_{z\mathrm{CM}}}{\mathrm{d}t}$$

où $\tau_{z\mathrm{O}}$: Moment de force orbitale selon l'axe z ($\mathrm{N\cdot m}$)

$L_{z\mathrm{O}}$: Moment cinétique orbital du corps (CM autour du point de référence) ($\mathrm{kg\cdot m^2/s}$)

$\tau_{z\mathrm{CM}}$: Moment de force spin selon l'axe z ($\mathrm{N\cdot m}$)

$L_{z\mathrm{CM}}$: Moment cinétique spin du corps (corps autour du CM) ($\mathrm{kg\cdot m^2/s}$)

<u>Preuve :</u>

Décomposons l'expression générale de la 2e loi de Newton en rotation en composante orbitale et spin et associons des termes ensembles :

$$\tau_z = \frac{d\,L_z}{dt} \quad \Rightarrow \quad \tau_z = \frac{d\left(L_{z\mathrm{O}} + L_{z\mathrm{CM}}\right)}{dt} \qquad \text{(Remplacer } L_z = L_{z\mathrm{O}} + L_{z\mathrm{CM}}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \tau_z = \frac{d\,L_{z\mathrm{O}}}{dt} + \frac{d\,L_{z\mathrm{CM}}}{dt} \qquad \text{(Distribuer la dérivée)}$$

$$\Rightarrow \quad \tau_{z\mathrm{O}} + \tau_{z\mathrm{CM}} = \frac{d\,L_{z\mathrm{O}}}{dt} + \frac{d\,L_{z\mathrm{CM}}}{dt} \qquad \text{(Remplacer } \tau_z = \tau_{z\mathrm{O}} + \tau_{z\mathrm{CM}}\text{)}$$

Démontrons une 1e association :

$$\tau_{z\mathrm{O}} = \frac{d\,L_{z\mathrm{O}}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \tau_{z\mathrm{O}} = \frac{d\left(r_{\mathrm{CM}}\,p_{//\mathrm{CM}}\right)}{dt} \qquad \text{(Remplacer } L_{z\mathrm{O}} = r_{\mathrm{CM}}\,p_{//\mathrm{CM}}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \tau_{z\mathrm{O}} = r_{\mathrm{CM}}\,\frac{d\left(p_{//\mathrm{CM}}\right)}{dt} \qquad \text{(Factoriser constante)}$$

$$\Rightarrow \quad \tau_{z\mathrm{O}} = r_{\mathrm{CM}} F_{//} \qquad \text{(2e loi de Newton : } F = dp/dt\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \tau_{z\mathrm{O}} = r_{\mathrm{CM}} F \sin(\alpha) \qquad \text{(Remplacer } F_{//} = F\sin(\alpha)\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \tau_{z\mathrm{O}} = \tau_{z\mathrm{O}} \quad \blacksquare \qquad \text{(Remplacer } \tau_{z\mathrm{O}} = r_{\mathrm{CM}} F \sin(\alpha)\text{)}$$

Démontrons une 2e association :

$$\tau_{z\,\mathrm{CM}} = \frac{d\,L_{z\,\mathrm{CM}}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \tau_{z\,\mathrm{CM}} = \frac{d\left(I_{\mathrm{CM}}\omega_{z\,\mathrm{CM}}\right)}{dt} \qquad \text{(Remplacer } L_{z\,\mathrm{CM}} = I_{\mathrm{CM}}\omega_{z\,\mathrm{CM}}\text{)}$$

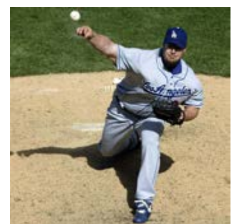
$$\Rightarrow \quad \tau_{z\,\mathrm{CM}} = I_{\mathrm{CM}}\frac{d\,\omega_{z\,\mathrm{CM}}}{dt} \qquad \text{(Factoriser constante)}$$

$$\Rightarrow \quad \tau_{z\,\mathrm{CM}} = I_{\mathrm{CM}}\alpha_{z\,\mathrm{CM}} \qquad \text{(Remplacer } \alpha_{z\,\mathrm{CM}} = d\omega_{z\,\mathrm{CM}}/dt\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \tau_{z\,\mathrm{CM}} = \tau_{z\,\mathrm{CM}} \quad \blacksquare \qquad \text{(Remplacer } \tau_{z\,\mathrm{CM}} = I_{\mathrm{CM}}\alpha_{z\,\mathrm{CM}}\text{)}$$

Lancer une balle de baseball

Lancer au baseball une balle rapide avec un « *backspin* » illustre très bien l'intérêt de décomposer le moment cinétique en composant orbital et spin, car la vitesse angulaire $\omega_{z\,\mathrm{O}}$ associé au moment cinétique orbital $L_{z\,\mathrm{O}}$ est aucunement reliée à la vitesse angulaire $\omega_{z\,\mathrm{CM}}$ associée au moment cinétique spin $L_{z\,\mathrm{CM}}$. Pour simplifier la situation, nous allons négliger la résistance de l'air :



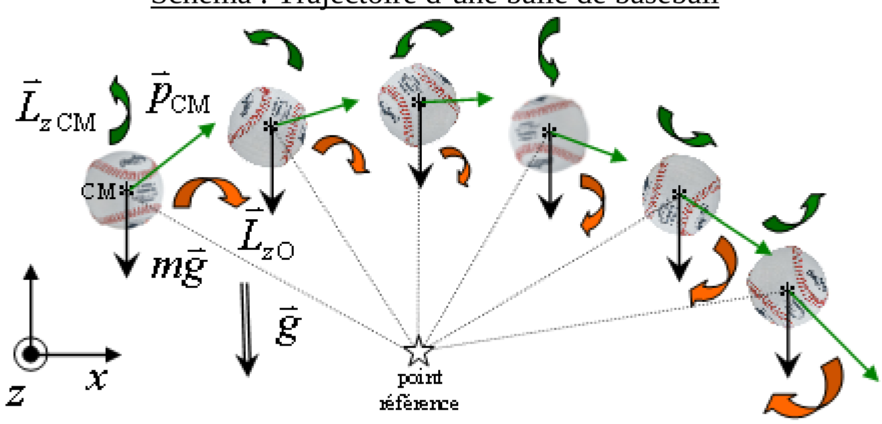
Éric Gagné lance une balle rapide

- La force gravitationnelle $m\vec{g}$ est appliquée au CM de la balle.
- On néglige la résistance de l'air.
- La trajectoire de la balle est une parabole, car $a_x = 0$ et $a_y = -g$ selon $\sum \vec{F} = m\vec{a}$.
- La balle tourne sur elle-même, car elle possède une vitesse angulaire spin initiale $\omega_{z\,\mathrm{CM}}$.
- $\vec{p}_{\mathrm{CM}}$ n'est pas conservée, car $\sum \vec{F}_{\mathrm{ext}} \neq 0$ (la trajectoire n'est pas rectiligne).
- $L_{z\,\mathrm{O}}$ n'est pas conservé, car $\sum \tau_{z\,\mathrm{O\,ext}} \neq 0$ (la trajectoire n'est pas circulaire ni rectiligne).
- $L_{z\,\mathrm{CM}}$ est conservé, car $\sum \tau_{z\,\mathrm{CM\,ext}} = 0$. De plus, $\omega_{z\,\mathrm{CM}}$ est constant car I_{CM} est constant.
- $L_z = L_{z\,\mathrm{O}} + L_{z\,\mathrm{CM}}$ n'est pas conservé.

Remarque :

- $L_{z\,\mathrm{O}} \downarrow$ et $p_y \downarrow$ dans la monté.
- $L_{z\,\mathrm{O}} \uparrow$ et $p_y \downarrow$ dans la descente.
- $L_{z\,\mathrm{CM}}$ est constant.
- p_x est constant.

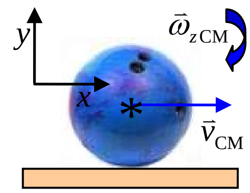
Schéma : Trajectoire d'une balle de baseball



Situation A : *Albert au bowling.* Albert fait rouler une boule de bowling de 4 kg et de 20 cm de diamètre à une vitesse de 1,8 m/s et à une vitesse angulaire de 15 rad/s orientée vers l'avant sur une allée de bowling horizontale. La boule glisse et roule en même temps sur l'allée ($v_{CM} \neq r\omega_{CM}$). En raison de l'huile déposée sur l'allée, le coefficient frottement cinétique entre la boule et l'allée est uniquement de 0,01.

On désire évaluer **(a)** le sens du frottement qu'applique l'allée sur la boule et **(b)** le temps requis pour que la boule roule *sans glisser* sur l'allée.

Pour évaluer le sens du frottement, il faut évaluer la vitesse de l'élément de la boule en contact au sol par rapport au sol. Pour ce faire, nous allons utiliser l'addition relative des vitesses (voir **chapitre 1.4 : Vitesses relatives en une dimension**) :

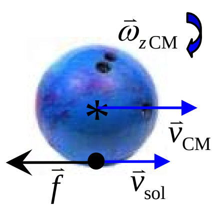
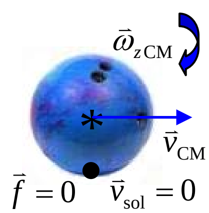
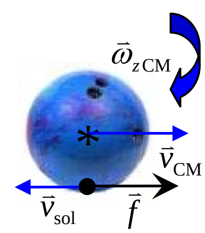


$v_{x\mathrm{AR}} = v_{x\mathrm{AB}} + v_{x\mathrm{BR}} \quad \Rightarrow \quad v_{\mathrm{sol}} = \pm v_{\mathrm{rot}} + v_{\mathrm{CM}}$ ($+v_{\mathrm{CM}}$, car déplacement vers la droite)

$\Rightarrow \quad v_{\mathrm{sol}} = -v_{\mathrm{rot}} + v_{\mathrm{CM}}$ ($-v_{\mathrm{rot}}$, car rotation vers l'avant)

$\Rightarrow \quad v_{\mathrm{sol}} = -(r\omega_{z\,\mathrm{CM}}) + v_{\mathrm{CM}}$ (Vitesse tangentielle : $v_{\mathrm{rot}} = r\omega_{z\,\mathrm{CM}}$)

$\Rightarrow \quad \boxed{v_{\mathrm{sol}} = v_{\mathrm{CM}} - r\omega_{z\,\mathrm{CM}}}$ (Réécriture)

Si $v_{\mathrm{sol}} > 0$: ($\omega_{z\,\mathrm{CM}}$ petit)	Si $v_{\mathrm{sol}} = 0$: ($\omega_{z\,\mathrm{CM}}$ adéquat)	Si $v_{\mathrm{sol}} < 0$: ($\omega_{z\,\mathrm{CM}}$ grand)
L'élément de boule en contact au sol se déplace vers la droite et le frottement $\vec{f} = \vec{f}_c$ sera orienté vers la gauche.  <u>Conséquence :</u> $v_{\mathrm{CM}} \downarrow$ et $\omega_{z\,\mathrm{CM}} \uparrow$	L'élément de boule en contact au sol est immobile et puisqu'il n'y a pas de force autre que le frottement, $\vec{f} = \vec{f}_s = 0$.  <u>Conséquence :</u> La boule continue de rouler *sans glisser*.	L'élément de boule en contact au sol se déplace vers la gauche et le frottement $\vec{f} = \vec{f}_c$ sera orienté vers la droite.  <u>Conséquence :</u> $v_{\mathrm{CM}} \uparrow$ et $\omega_{z\,\mathrm{CM}} \downarrow$

Évaluer le sens du frottement initialement :

$v_{\mathrm{sol}} = v_{\mathrm{CM}} - r\omega_{z\,\mathrm{CM}} \quad \Rightarrow \quad v_{\mathrm{sol}} = (1{,}8) - (0{,}20)(15)$

$\Rightarrow \quad \boxed{v_{\mathrm{sol}} = -1{,}2\ \mathrm{m/s}}$ **(a)** et nous avons un <u>frottement vers l'avant</u>.

Pour rouler sans glisser, il faut satisfaire l'équation suivante :

$$v_{\text{sol}} = v_{\text{CM}} - r\omega_{z\,\text{CM}} \quad \Rightarrow \quad (0) = v_{\text{CM}} - r\omega_{z\,\text{CM}}$$ (Condition rouler *sans glisser*)

$$\Rightarrow \quad 0 = v_{\text{CM}} - (0{,}20)\omega_{z\,\text{CM}}$$ (Remplacer valeurs num.)

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_{x\,\text{CM}\,f} = 0{,}2\,\omega_{z\,\text{CM}\,f}} \quad \textbf{(1)}$$ (Relation $v_{x\,\text{CM}\,f}$ et $\omega_{z\,\text{CM}\,f}$)

Évaluons la quantité de mouvement du centre de masse initiale :

$$p_{x\,\text{CM}\,i} = m\,v_{x\,\text{CM}\,i} \quad \Rightarrow \quad p_{x\,\text{CM}\,i} = (4)(1{,}8) \quad \Rightarrow \quad \boxed{p_{x\,\text{CM}\,i} = 7{,}2\ \text{kg}\cdot\text{m/s}}$$

Évaluons l'expression de la quantité de mouvement du centre de masse finale :

$$p_{x\,\text{CM}\,f} = m\,v_{x\,\text{CM}\,f} \quad \Rightarrow \quad p_{x\,\text{CM}\,f} = (4)v_{x\,\text{CM}\,f} \quad \Rightarrow \quad \boxed{p_{x\,\text{CM}\,f} = 4v_{x\,\text{CM}\,f}}$$

Évaluons le moment cinétique spin initial :

$$L_{z\,\text{CM}} = I_{\text{CM}}\omega_{z\,\text{CM}} \quad \Rightarrow \quad L_{z\,\text{CM}} = \left(\frac{2}{5}mR^2\right)\omega_{z\,\text{CM}}$$ (Inertie sphère pleine : $I = \frac{2}{5}mR^2$)

$$\Rightarrow \quad L_{z\,\text{CM}} = \frac{2}{5}(4)(0{,}2)^2(15)$$ (Remplacer valeurs num.)

$$\Rightarrow \quad \boxed{L_{z\,\text{CM}\,i} = 0{,}96\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}}$$ (Évaluer $L_{z\,\text{CM}\,i} = L_{z\,\text{CM}}$)

Évaluons l'expression du moment cinétique spin final :

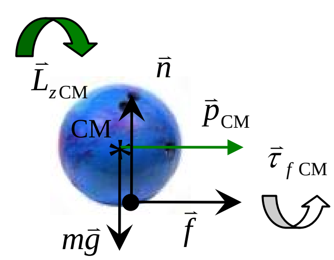
$$L_{z\,\text{CM}\,f} = \frac{2}{5}mR^2\omega_{z\,\text{CM}\,f} \quad \Rightarrow \quad L_{z\,\text{CM}\,f} = \frac{2}{5}(4)(0{,}2)^2\,\omega_{z\,\text{CM}\,f} \quad \Rightarrow \quad \boxed{L_{z\,\text{CM}\,f} = 0{,}064\,\omega_{z\,\text{CM}\,f}}$$

Évaluons le frottement cinétique appliqué par l'allée sur la boule : ($n = mg$)

$$f_c = \mu_c n \quad \Rightarrow \quad f_c = \mu_c(mg)$$

$$\Rightarrow \quad f_c = (0{,}01)(4)(9{,}8)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f_c = 0{,}392\ \text{N}}$$



Appliquons la conservation de la quantité de mouvement avec impulsion pour établir un lien avec le temps requis pour rouler *sans glisser* :

$$p_{x\,f} = p_{x\,i} + J_x \quad \Rightarrow \quad p_{x\,\text{CM}\,f} = p_{x\,\text{CM}\,i} + J_{x\,\text{CM}}$$ (Appliquer au CM)

$$\Rightarrow \quad p_{x\,\text{CM}\,f} = p_{x\,\text{CM}\,i} + (F_x\,\Delta t)$$ (Pour force constante : $J_x = F_x\Delta t$)

$$\Rightarrow \quad p_{x\,\text{CM}\,f} = p_{x\,\text{CM}\,i} + (f_c)\Delta t$$ (Remplacer $F = f_x$)

$$\Rightarrow \quad (4v_{x\,\text{CM}\,f}) = (7{,}2) + (0392)\Delta t$$ (Remplacer valeurs num.)

$$\Rightarrow \quad \boxed{4v_{x\,\text{CM}\,f} = 7{,}2 + 0{,}392\Delta t} \quad \textbf{(2)}$$ (Calcul)

Appliquons la conservation du moment cinétique spin avec moment de force constant pour établir un lien entre le temps requis pour rouler *sans glisser* :

$$L_{z\,CM\,f} = L_{z\,CM\,i} + \Delta L_{z\,CM}$$ (Conservation moment cinétique selon *z*)

$$\Rightarrow \quad L_{z\,CM\,f} = L_{z\,CM\,i} + (\tau_z\,\Delta t)$$ (Pour force constante : $\Delta L_z = \tau_z \Delta t$)

$$\Rightarrow \quad L_{z\,CM\,f} = L_{z\,CM\,i} + (\pm r\,F\sin(\theta))\Delta t$$ (Moment de force selon z : $\tau_z = \pm r\,F\sin(\theta)$)

$$\Rightarrow \quad L_{z\,CM\,f} = L_{z\,CM\,i} - r(f_c)\sin(90°)\Delta t$$ (Remplacer $F = f_c$ et $\theta = 90°$)

$$\Rightarrow \quad (0{,}064\,\omega_{z\,CM\,f}) = (0{,}96) - (0{,}20)(0{,}392)\Delta t$$ (Remplacer valeurs num.)

$$\Rightarrow \quad \boxed{0{,}064\,\omega_{z\,CM\,f} = 0{,}96 - 0{,}0784\,\Delta t} \quad \textbf{(3)}$$ (Calcul)

Nous avons le système d'équations suivant à résoudre :

$$v_{x\,CM\,f} = 0{,}2\,\omega_{z\,CM\,f} \qquad \textbf{(1)}$$

$$4v_{x\,CM\,f} = 7{,}2 + 0{,}392\Delta t \qquad \textbf{(2)}$$

$$0{,}064\,\omega_{z\,CM\,f} = 0{,}96 - 0{,}0784\,\Delta t \qquad \textbf{(3)}$$

Remplaçons l'équation **(2)** et **(3)** dans l'équation **(1)** et isolons le temps :

$$v_{x\,CM\,f} = 0{,}2\,\omega_{z\,CM\,f}$$ (Utiliser **(1)**)

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{7{,}2 + 0{,}392\Delta t}{4}\right) = 0{,}2\left(\frac{0{,}96 - 0{,}0784\,\Delta t}{0{,}064}\right)$$ (Remplacer $v_{x\,CM\,f}$ et $\omega_{z\,CM\,f}$ avec **(2)** et **(3)**)

$$\Rightarrow \quad 1{,}8 + 0{,}098\Delta t = 3 - 0{,}245\Delta t$$ (Simplifier)

$$\Rightarrow \quad 0{,}343\Delta t = 1{,}2$$ (Isoler terme avec Δt)

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta t = 3{,}499\ \text{s}} \quad \textbf{(b)}$$ (Évaluer Δt)