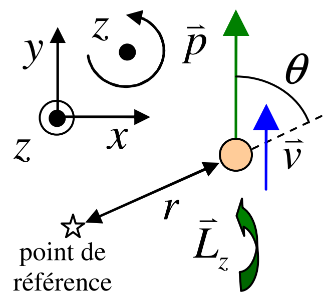
Chapitre 4.9 – La conservation du moment cinétique

Moment cinétique d'une particule selon l'axe *z*

Le moment cinétique L_z d'une particule mesure la quantité de mouvement dans le plan *xy* qui est en rotation autour d'un point de référence. Le module du moment cinétique L_z est égal à la distance *r* dans le plan *xy* entre le point de référence et la particule multiplié par la quantité de mouvement p de la particule dans le plan *xy* et multiplié par le sinus de l'angle θ entre *r* et p dans le plan *xy* :



$$L_z = \pm r\, p \sin(\theta) \quad \text{et} \quad p = mv$$

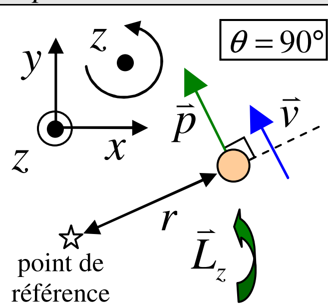
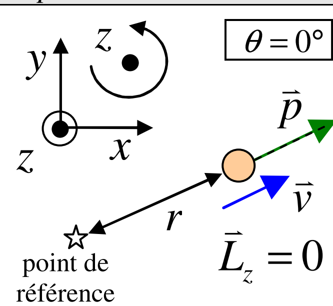
où L_z : Moment cinétique de la particule selon l'axe z ($\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$)

r : Distance dans le plan *xy* entre le point de référence et la particule (m)

p : Module de la quantité de mouvement de la particule dans le plan *xy* ($\text{kg}\cdot\text{m/s}$ ou Ns)

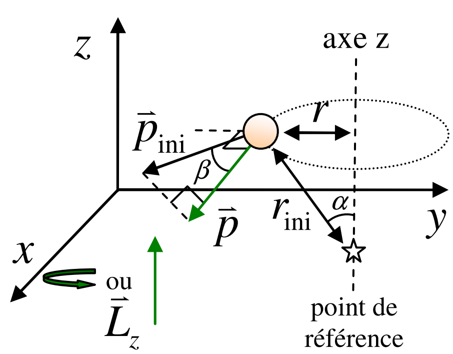
θ : Angle dans le plan *xy* entre r et p

$\pm$: Sens de la rotation selon l'axe *z* du moment cinétique

Lorsque l'angle $\theta = 90°$, le moment cinétique L_z associée à la quantité de mouvement *p* est maximale :	Lorsque l'angle $\theta = 0°$, le moment cinétique L_z associée à la quantité de mouvement *p* est nul :
	

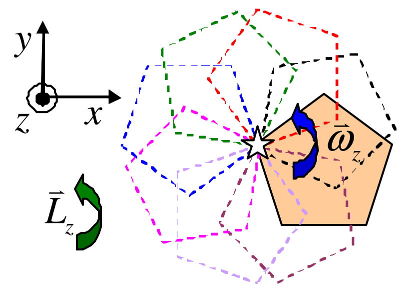
Encore une fois, il est important de rappeler que le moment cinétique L_z mesure uniquement la quantité de mouvement p dans le plan *xy* à tourner autour de l'axe *z* passant par le point de référence (voir schéma ci-contre) :

- $r = r_{ini} \cos(\alpha)$
- $p = p_{ini} \cos(\beta)$



Moment cinétique d'un corps selon l'axe *z*

Le moment cinétique L_z d'un corps permet d'évaluer la quantité d'inertie de rotation dans le plan *xy* en rotation autour d'un point de référence. Le moment cinétique L_z d'un corps est égal à l'inertie de rotation I du corps mesurée par rapport à l'axe *z* passant par le point de référence multiplié par la vitesse angulaire ω_z :



$$L_z = I\omega_z$$

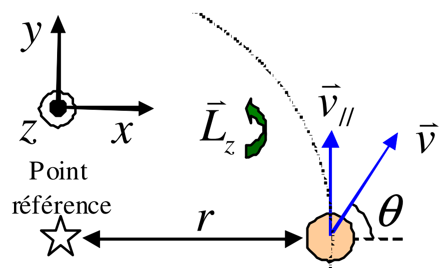
où L_z : Moment cinétique de l'objet en rotation autour de l'axe *z* passant par le point de référence ($\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$)

I : Inertie de l'objet en rotation autour de l'axe *z* passant par le point de référence ($\text{kg}\cdot\text{m}^2$)

ω_z : Vitesse angulaire de rotation de l'objet autour de l'axe z (rad/s)

Preuve :

Développons à partir de la définition du moment cinétique L_z d'une particule une expression pour le moment cinétique faisant intervenir la notion de l'inertie de rotation *I* et de la vitesse angulaire ω_z :



$L_z = r\,p\sin(\theta)$

$\Rightarrow \quad L_z = r(mv)\sin(\theta)$ (Remplacer $p = mv$)

$\Rightarrow \quad L_z = m\,r\,v\sin(\theta)$ (Réécriture)

$\Rightarrow \quad L_z = m\,r(v_{//})$ (Remplacer $v_{//} = v\sin(\theta)$)

$\Rightarrow \quad L_z = m\,r(r\,\omega_z)$ (Remplacer $v_{//} = r\omega_z$)

$\Rightarrow \quad L_z = m\,r^2\omega_z$ (Réécriture)

$\Rightarrow \quad L_z = I\omega_z \quad \blacksquare$ (Remplacer $I = mr^2$)

La 2e loi de Newton en rotation selon l'axe *z* avec le moment cinétique

La 2e loi de Newton en rotation selon l'axe z peut être réécrite à l'aide de la définition du moment cinétique L_z. Sous cette forme, cette loi permet plus facilement de mette en relation l'influence d'un moment de force τ_z et la modification de son état de rotation mesuré en moment cinétique L_z :

$$\tau_z = \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}$$

où τ_z : Moment de force appliquée ($\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$)

$\mathrm{d}L_z$: Variation du moment cinétique ($\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$)

$\mathrm{d}t$: Temps écoulé durant la variation du moment cinétique (s)

<u>Preuve :</u>

À partir de la définition du moment cinétique d'une particule, appliquons la dérivée par rapport au temps de chaque côté de l'équation afin de faire intervenir la notion de moment de force τ_z :

$L_z = \pm r\, p \sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L_z = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \pm r\, p \sin(\theta)$ (Appliquer la dérivée $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$)

$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = \pm r \sin(\theta) \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$ (Factoriser constante)

$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = \pm r \sin(\theta) F$ (2e loi de Newton : $F = \mathrm{d}p/\mathrm{d}t$)

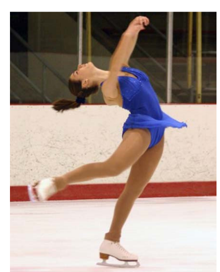
$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = \tau_z \quad \blacksquare$ (Moment de force : $\tau_z = \pm r\, F \sin(\theta)$)

Principe de conservation du moment cinétique selon l'axe *z*

Le moment cinétique L_z d'un corps est conservé lorsque la somme des moments de force τ_z extérieure au système est égale à zéro. Ce principe de conservation est comparable à la conservation de la quantité de mouvement sauf qu'il est évalue en rotation par rapport à un point de référence :

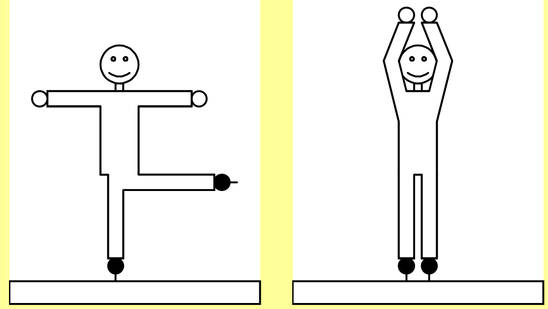
$$\sum \tau_{z\,\mathrm{ext}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum L_z = \text{constante}$$

$$\Rightarrow \quad \sum L_{zf} = \sum L_{zi}$$



Une vrille en patinage artistique est un bon exemple de conservation du moment cinétique

Situation 1 : *La physique du patinage artistique*. Un patineur tourne sur lui-même avec une de ses jambes et ses bras perpendiculaire à son corps (schéma ci-contre) : sa vitesse angulaire vaut 8 rad/s et son moment d'inertie vaut $3{,}6\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$. En ramenant sa jambe à la verticale et en levant ses bras au-dessus de sa tête (schéma ci-contre), il diminue son moment d'inertie à $1{,}6\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$ et sa vitesse angulaire augmente pour atteindre 18 rad/s.



On désire analyser cette manœuvre à l'aide du principe de conservation du moment cinétique et du principe de conservation de l'énergie.

Évaluons le moment cinétique du patineur avant (*i*) et après (*f*) :

$$L_z = I\omega_z \quad \Rightarrow \quad L_{zi} = I_i\omega_{zi} = (3{,}6)(8) \quad \Rightarrow \quad \boxed{L_{zi} = 28{,}8\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}}$$

$$L_{zf} = I_f\omega_{zf} = (1{,}6)(18) \quad \Rightarrow \quad \boxed{L_{zf} = 28{,}8\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}}$$

Cette situation est **physiquement acceptable**, car il y a conservation du moment cinétique en l'absence de moment de force extérieur :

$$L_{zi} = L_{zf}$$

Évaluons l'énergie cinétique du patineur avant (*i*) et après (*f*) :

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad \Rightarrow \quad K_i = \frac{1}{2}I_i\omega_i^2 = \frac{1}{2}(3{,}6)(8)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{K_i = 115\ \text{J}}$$

$$K_f = \frac{1}{2}I_f\omega_f^2 = \frac{1}{2}(1{,}6)(18)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{K_f = 259\ \text{J}}$$

Dans cette situation, il n'y a pas conservation de l'énergie cinétique :

$$K_i \neq K_f$$

Évaluons à l'aide du principe de conservation de l'énergie le travail W_{nc} effectué sur le patineur entre la situation avant et après : ($E = K$)

$$E_f = E_i + W_{nc} \quad \Rightarrow \quad (259) = (115) + W_{nc} \qquad \text{(Remplacer valeurs num.)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{W_{nc} = 144\ \text{J}} \qquad \text{(Évaluer } W_{nc}\text{)}$$

Le **patineur** effectue un **travail** de **144 J** pour **rapprocher** ses **bras** et sa **jambe** près de lui ce qui se transforme sous forme d'énergie cinétique. Ce travail est cohérent, car les forces des bras et de la jambe du patineur sont orientées dans le sens de l'accélération centripète.

Situation A : ***Un ballon qui roule à vitesse constante.*** Un ballon homogène de masse m = 1,5 kg et de rayon R = 5 cm roule horizontalement sur le sol *sans glisser* à une vitesse constante de 5 m/s. On désire évaluer le moment cinétique de translation du centre de masse du ballon par rapport au point initial de contact au sol **(a)** au début du mouvement et **(b)** 0,4 seconde après avoir lancé le ballon. Vérifier qu'il y a conservation du moment cinétique.
(**P.S.** Garder plusieurs chiffres significatifs dans les calculs.)

Évaluons la quantité de mouvement du ballon :

$$p = mv \quad \Rightarrow \quad p = (1,5)(5) \quad \Rightarrow \quad \boxed{p = 7,5\ \text{kg}\cdot\text{m/s}}$$

Évaluons le moment cinétique selon l'axe z du ballon initialement : ($r = R = 0,05\ \text{m}$)

$$L_z = \pm r\,p\sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad L_z = (0,05)(7,5)\sin(90°)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{L_{zi} = 0,375\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}} \qquad \textbf{(a)}$$

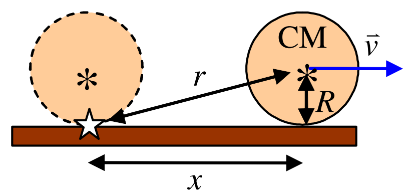
Évaluons la position du ballon à 0,4 s à l'aide de l'équation du MUA :

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad \Rightarrow \quad x = (0) + (5)(0,4) + \frac{1}{2}(0)(3)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 2\ \text{m}}$$

Évaluons la distance r entre la position du point de référence (position initiale au sol) et la position finale du ballon :

$$r = \sqrt{R^2 + x^2} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{(0,05)^2 + (2)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{r = 2,000625\ \text{m}}$$



Évaluons l'angle θ entre r et p à la position finale :

$$\tan(\theta) = \frac{R}{x} \quad \Rightarrow \quad \tan(\theta) = \frac{(0,05)}{(2,000625)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta = 1,43165°}$$

Évaluons le moment cinétique selon l'axe z du ballon à 0,4 s : ($r = 2,000625\ \text{m}$)

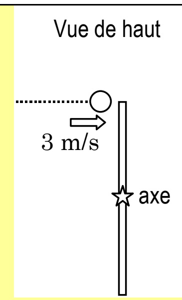
$$L_z = \pm r\,p\sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad L_z = (2,000625)(7,5)\sin(1,43165°)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{L_{zi} = 0,3749\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}} \qquad \textbf{(b)}$$

Il y a conservation du moment cinétique, car le **moment de force extérieure total** $\tau_{z\,\text{ext}}$ exercé sur le ballon est **nul** puisque la gravité est annulée par la force normale et le frottement est inexistant, car le ballon roule à vitesse constante. Ainsi, une **trajectoire rectiligne** à **vitesse constante** respecte la **conservation** de **moment cinétique** :

$$\sum L_{zf} = \sum L_{zi}$$

Situation 2 : ***Une boule percute une tige.*** Une petite boule de mastic de 20 g percute l'extrémité d'une tige mince homogène immobile de 120 g dont la longueur est de 1 m ; la tige peut tourner autour d'un axe fixe vertical perpendiculaire à elle-même passant par son centre. La boule frappe la tige avec une vitesse horizontale perpendiculaire à la tige dont le module est égal à 3 m/s (voir schéma ci-contre); après l'impact, la boule reste collée à la tige. On désire déterminer la vitesse angulaire de la tige immédiatement après l'impact.



Évaluons le moment cinétique de la boule <u>avant</u> la collision : (sens horaire +)

$$L_z = \pm r\,p\sin(\theta) \quad\Rightarrow\quad L_z = \pm r\,(mv)\sin(\theta)$$ (Remplacer $p = mv$)

$$\Rightarrow\quad L_z = \pm(0{,}5)(0{,}02)(3)\sin(90°)$$ (Remplacer valeurs num.)

$$\Rightarrow\quad \boxed{L_{z\mathrm{B}i} = 0{,}03\ \ \mathrm{kg\cdot m^2/s}}$$ (Évaluer $L_z = L_{z\mathrm{B}i}$)

Évaluons le moment cinétique du système <u>avant</u> la collision :

$$L_{zi} = L_{z\mathrm{B}i} + L_{z\mathrm{T}i} \quad\Rightarrow\quad L_{zi} = (0{,}03) + (0)$$ (Tige immobile : $L_{z\mathrm{T}i} = 0$)

$$\Rightarrow\quad \boxed{L_{zi} = 0{,}03\ \ \mathrm{kg\cdot m^2/s}}$$ (Évaluer L_{zi})

Évaluons l'inertie de la boule au lieu de la collision comme une masse ponctuelle :

$$I_\mathrm{B} = m_\mathrm{B} {r_\mathrm{B}}^2 \quad\Rightarrow\quad I_\mathrm{B} = (0{,}02)(0{,}5)^2 \quad\Rightarrow\quad \boxed{I_\mathrm{B} = 0{,}005\ \ \mathrm{kg\cdot m^2}}$$

Évaluer l'inertie de la tige tournant sur un axe passant par son centre :

$$I_\mathrm{T} = \frac{1}{12} m_\mathrm{T} {L_\mathrm{T}}^2 \quad\Rightarrow\quad I_\mathrm{T} = \frac{1}{12}(0{,}12)(1)^2 \quad\Rightarrow\quad \boxed{I_\mathrm{T} = 0{,}01\ \ \mathrm{kg\cdot m^2}}$$

Évaluons la vitesse angulaire du système immédiatement <u>après</u> l'impact à l'aide de la conservation du moment cinétique selon l'axe z :

$$L_{zf} = L_{zi} \quad\Rightarrow\quad \left(L_{z\mathrm{B}f} + L_{z\mathrm{T}f}\right) = L_{zi}$$ (Remplacer $L_{zf} = L_{z\mathrm{B}f} + L_{z\mathrm{T}f}$)

$$\Rightarrow\quad \left(I_\mathrm{B}\omega_{z\mathrm{B}f}\right) + \left(I_\mathrm{T}\omega_{z\mathrm{T}f}\right) = L_{zi}$$ (Remplacer $L_z = I\omega_z$)

$$\Rightarrow\quad I_\mathrm{B}(\omega_z) + I_\mathrm{T}(\omega_z) = L_{zi}$$ ($\omega_z = \omega_{z\mathrm{B}f} = \omega_{z\mathrm{T}f}$)

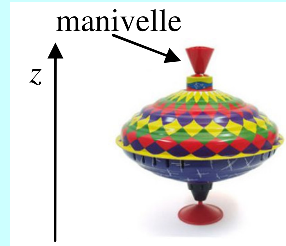
$$\Rightarrow\quad (I_\mathrm{B} + I_\mathrm{T})\omega_z = L_{zi}$$ (Factoriser ω_z)

$$\Rightarrow\quad ((0{,}005) + (0{,}01))\omega_z = (0{,}03)$$ (Remplacer valeurs num.)

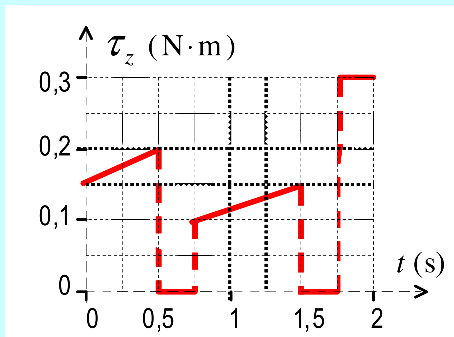
$$\Rightarrow\quad \boxed{\omega_z = 2\ \ \mathrm{rad/s}}$$

Il est important de préciser que la **force exercée** par **l'axe de rotation** sur la tige **<u>n'est pas nulle</u>**, mais qu'elle n'applique aucun moment de force par rapport à l'axe de rotation puisque $r = 0$. Cette force permet par contre de satisfaire la conservation de la quantité de mouvement $\vec{p}_i = \vec{p}_f = 0$ sur la tige, car la tige n'effectue pas de translation avant ni après la collision.

Situation A : ***Une toupie jouet qui tourne***. Albert fait tourner une toupie de 350 g initialement immobile autour de l'axe z en poussant contre une manivelle ce qui applique un moment de force sur la toupie (voir schéma ci-contre). Lorsque la manivelle est complètement enfoncée, Albert tire dessus ce qui n'influence pas la rotation de la toupie. Par rapport à l'axe z, l'inertie de rotation de la toupie est égale à $0{,}006\ \mathrm{kg \cdot m^2}$.



On désire déterminer la vitesse angulaire finale de la toupie sachant qu'Albert pousse trois fois sur la manivelle et que le moment de force en newton-mètres en fonction du temps en secondes appliqué sur la toupie est représenté à l'aide du graphique ci-dessous :



À partir de la 2$^{\text{ième}}$ loi de Newton en rotation selon l'axe z, développons une équation permettant d'utiliser la notion de moment de force non constant :

$$\tau_z = \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \tau_z\, \mathrm{d}t = \mathrm{d}L_z \qquad \text{(Isoler } dL_z\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \int_{t=0}^{t} \tau_z\, \mathrm{d}t = \int_{L_z = L_{z0}}^{L_z} \mathrm{d}L_z \qquad \text{(Appliquer l'intégrale de } t = 0 \rightarrow t\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \left[L_z\right]_{L_{z0}}^{L_z} = \int_{t=0}^{t} \tau_z\, \mathrm{d}t \qquad \text{(Résoudre l'intégrale selon } L_z\text{)}$$

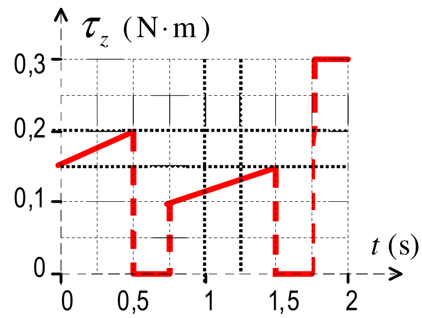
$$\Rightarrow \quad L_z - L_{z0} = \int_{t=0}^{t} \tau_z\, \mathrm{d}t \qquad \text{(Évaluer l'intégrale selon } L_z\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{L_z = \int_{t=0}^{t} \tau_z\, \mathrm{d}t} \qquad \text{(Toupie immobile à } t = 0 : L_{z0} = 0\text{)}$$

Ce calcul nous permet de réaliser que :

$$\Delta L_z = \int_{t=t_i}^{t} \tau_z\, \mathrm{d}t = \text{aire sous la courbe du graphique } \tau_z(t)$$

Évaluons l'aire sous la courbe du graphique $\tau_z(t)$:

Aire sous la courbe : $A = \dfrac{(h+H)}{2}B$	Rappel du graphique $\tau_z(t)$:
1ière poussée : $\Delta L_{z1} = \dfrac{((0{,}15)+(0{,}2))}{2}(0{,}5) = 0{,}0875\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$ 2ième poussée : $\Delta L_{z2} = \dfrac{((0{,}1)+(0{,}015))}{2}(0{,}75) = 0{,}09375\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$ 3ième poussée : $\Delta L_{z3} = (0{,}3)(0{,}25) = 0{,}075\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$	

Évaluons le moment cinétique finale L_z à partir de l'équation démontrée précédemment :

$$L_z = \int_{t=0}^{t} \tau_z \,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad L_z = \Delta L_{z1} + \Delta L_{z2} + \Delta L_{z3} \qquad \text{(Évaluer aire sous la courbe)}$$

$$\Rightarrow \quad L_z = (0{,}0875) + (0{,}09375) + (0{,}075) \qquad \text{(Remplacer valeurs num.)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{L_z = 0{,}25625\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}} \qquad \text{(Évaluer } L_z\text{)}$$

Évaluons la vitesse angulaire finale à partir de la définition du moment cinétique d'un corps :

$$L_z = I\omega_z \quad \Rightarrow \quad (0{,}25625) = (0{,}006)\omega_z \qquad \text{(Remplacer valeurs num.)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega_z = 42{,}71\ \text{rad/s}} \qquad \text{(Évaluer } \omega_z = 6{,}80\ \text{tours/s)}$$

Exercices

4.9.3 ***Un enfant saute sur un tourniquet.*** Dans un parc pour enfants, un enfant de 30 kg court à 4 m/s vers un immobile et saute tangentiellement sur le rebord. On assimile l'enfant à une particule et le tourniquet à un disque (cylindre) homogène de 3 m de rayon dont la masse vaut 150 kg. **(a)** Quelle est l'énergie cinétique initiale de l'enfant? **(b)** Quelle est la vitesse angulaire finale du tourniquet? **(c)** Quelle est l'énergie cinétique finale du système composé du tourniquet et de l'enfant?

4.9.4 **Un enfant saute sur un tourniquet, prise 2.** Dans la situation de l'exercice **4.9.3**, une fois que l'enfant a sauté sur le rebord du tourniquet, il se déplace vers le centre du tourniquet et se met debout en plein centre. **(a)** Quelle est la nouvelle vitesse angulaire du système? **(b)** Quelle est désormais l'énergie cinétique du système? **(c)** D'où provient la différence entre les énergies cinétiques trouvées en **4.9.3(c)** et **4.9.4(b)**?

Solutions

$\boxed{4.9.3}$ *Un enfant saute sur un tourniquet.*

a) Énergie cinétique initiale de l'enfant :

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{1}{2}(30)(4)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{K = 240 \text{ J}}$$

b) Évaluer la vitesse angulaire finale du tourniquet :

L'enfant possède par rapport au centre du tourniquet une vitesse angulaire tel que :

$$v = r\omega \quad \Rightarrow \quad \omega_{e\,i} = \frac{v}{r} = \frac{(4)}{(3)} = 1,\overline{3} \text{ rad/s}$$

Évaluons le moment d'inertie de l'enfant et du tourniquet par rapport au centre du tourniquet :

$$I_e = mr^2 \quad \Rightarrow \quad I_e = (30)(3)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_e = 270 \text{ kg m}^2}$$

$$I_t = \frac{1}{2}MR^2 \quad \Rightarrow \quad I_t = \frac{1}{2}(150)(3)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_t = 675 \text{ kg m}^2}$$

Avec la conservation du moment cinétique, évaluons la vitesse angulaire finale du tourniquet :

$$\left(\sum \vec{\tau}_{ext} = 0\right)$$

$$L_f = L_i \quad \Rightarrow \quad L_{e\,f} + L_{t\,f} = L_{e\,i} + L_{t\,i}$$

$$\Rightarrow \quad I_e\omega_{e\,f} + I_t\omega_{t\,f} = I_e\omega_{e\,i} + I_t\omega_{t\,i}$$

$$\Rightarrow \quad (I_e + I_t)\omega_f = I_e\omega_{e\,i} \qquad (\omega_{t\,i} = 0,\ \omega_{e\,f} = \omega_{t\,f} = \omega_f)$$

$$\Rightarrow \quad \omega_f = \frac{I_e\omega_{e\,i}}{(I_e + I_t)} = \frac{(270)(1,\overline{3})}{(270) + (675)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega_f = 0,381 \text{ rad/s}}$$

Énergie cinétique totale du système composé de l'enfant de du tourniquet :

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{1}{2}(I_e + I_t)\omega^2 = \frac{1}{2}((270) + (675))(0,381)^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{K = 68,59 \text{ J}}$$

$\boxed{4.9.4}$ Un enfant saute sur un tourniquet, prise 2.

Rappel : $I_e = 270\ \text{kg m}^2$ et $I_t = 675\ \text{kg m}^2$

a) Après déplacement de l'enfant, quelle est la nouvelle vitesse angulaire :

Appliquons la conservation du moment cinétique, car : $\sum \vec{\tau}_{ext} = 0$

$$L_f = L_i \quad \Rightarrow \quad L_{e\,f} + L_{t\,f} = L_{e\,i} + L_{t\,i}$$

$$\Rightarrow \quad I_{e\,f}\omega_{e\,f} + I_{t\,f}\omega_{t\,f} = I_{e\,i}\omega_{e\,i} + I_{t\,i}\omega_{t\,i}$$

$$\Rightarrow \quad I_t\omega_{t\,f} = \left(I_{e\,i} + I_t\right)\omega_i \qquad (I_{e\,f} = 0,\ I_{t\,i} = I_{t\,f} = I_t, \omega_{e\,i} = \omega_{t\,i} = \omega_i)$$

$$\Rightarrow \quad \omega_{t\,f} = \frac{\left(I_{e\,i} + I_t\right)\omega}{I_t}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_{t\,f} = \frac{((270) + (675))(0{,}381)}{(675)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega_{t\,f} = 0{,}533\ \text{rad/s}}$$

b) Nouvelle énergie cinétique du système :

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{1}{2}\left(I_{e\,f} + I_{t\,f}\right)\omega_f^{\,2} = \frac{1}{2}((0) + (675))(0{,}533)^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{K = 95{,}88\ \text{J}}$$

c) Énergie P2. c) $K = 68{,}59\ \text{J}$
Énergie P3. b) $K = 95{,}88\ \text{J}$

L'enfant effectue un travail avec ses muscles pour se déplacer vers le centre du tourniquet. Cette force est dans le sens de l'accélération centripète.