Chapitre 4.8 – L'énergie, le travail et la puissance en rotation

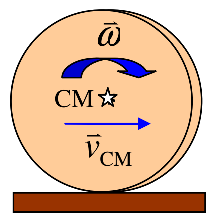
Une roue qui roule *sans glisser*


Moto unicycle électrique

Une roue qui roule *sans glisser* sur une surface de contact permet à celle-ci d'effectuer une translation et une rotation. On peut évaluer l'énergie cinétique de la roue de deux façons différentes selon la façon que l'on interprète la rotation de la roue :

1) Rotation de la roue autour de son centre de masse et translation du centre de masse par rapport au sol. Le centre de masse définit un **axe** de **rotation mobile**.

Énergie cinétique :



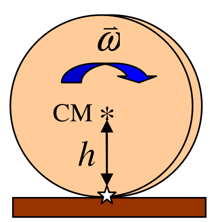
$$K = \frac{1}{2} m v_{CM}^{2} + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$

où $K_{translation} = \frac{1}{2} m v_{CM}^{2}$ et $K_{rotation} = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$

- Inertie de rotation (I_{CM}) et énergie cinétique de rotation $K_{rotation}$ par rapport au centre de masse, car le corps tourne à une vitesse angulaire $\vec{\omega}$.
- Inertie de translation (m) et énergie cinétique de translation $K_{translation}$, car le centre de masse est en mouvement à vitesse $\vec{v}_{CM}$.

2) Rotation de la roue autour du point de contact au sol. Ce point de contact définit un **axe** de **rotation fixe**.

Énergie cinétique :



$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

où I : Inertie par rapport à un axe fixe ($\mathrm{kg \cdot m^2}$)

- L'inertie de rotation (I) est maximale et il y a énergie cinétique de rotation $K_{rotation}$, car le corps tourne à une vitesse angulaire $\vec{\omega}$.
- Il n'y a pas d'énergie cinétique de translation, car le corps tourne autour d'un axe fixe situé au point de contact au sol.
- Il faut imaginer l'axe de rotation se déplacer au rythme du centre de masse de la roue pour sans accorder à cette translation une énergie cinétique de translation.

P.S. Dans les deux cas, le corps tourne avec la même vitesse angulaire $\vec{\omega}$ quel que soit la position de l'axe de rotation.

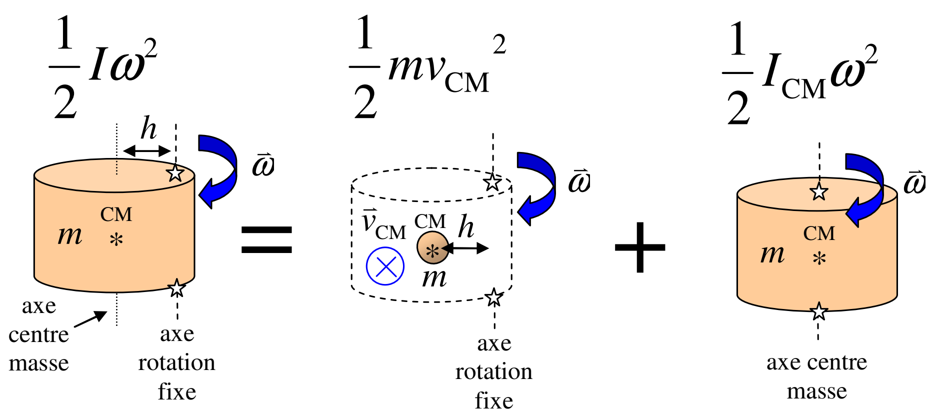
Énergie cinétique d'un corps en rotation

L'énergie cinétique K d'un corps en rotation peut être évaluée par rapport à un axe de rotation fixe ou par rapport à un axe en mouvement passant par le centre de masse du corps :

Énergie cinétique autour d'un axe fixe	Énergie cinétique par rapport au centre de masse
$K = \frac{1}{2} I \omega^2$	$K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}{}^2$

où
- K : Énergie cinétique du corps (J)
- I : Moment d'inertie du corps par rapport à un axe de rotation fixe ($\mathrm{kg \cdot m^2}$)
- I_{CM} : Moment d'inertie du corps par rapport à son centre de masse ($\mathrm{kg \cdot m^2}$)
- ω : Vitesse angulaire du corps (rad/s)
- m : Masse total du corps (kg)
- v_{CM} : Vitesse de translation du centre de masse du corps (m/s)

En d'autres mots, on peut visualiser l'expression de l'énergie cinétique grâce au schéma ci-dessous :



Preuve :

Considérons un corps de moment d'inertie I tournant sur lui-même par rapport à un axe fixe quelconque à une vitesse angulaire $\vec{\omega}$. Utilisons le théorème des axes parallèles pour mesurer l'énergie cinétique K par rapport à un axe de rotation passant par le centre de masse CM situé à une distance h de l'axe précédent :

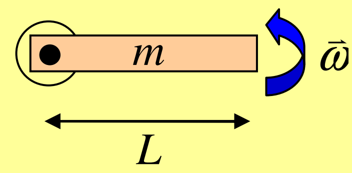
$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{1}{2}\left(mh^2 + I_{CM}\right)\omega^2$ (Théorème axes parallèles : $I = mh^2 + I_{CM}$)

$\Rightarrow \quad K = \frac{1}{2} mh^2 \omega^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$ (Distribution)

$\Rightarrow \quad K = \frac{1}{2} m (h\omega)^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$ (Réécriture)

$\Rightarrow \quad K = \frac{1}{2} m v_{CM}{}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 \quad \blacksquare$ (Vitesse centre de masse : $v_{CM} = h\omega$)

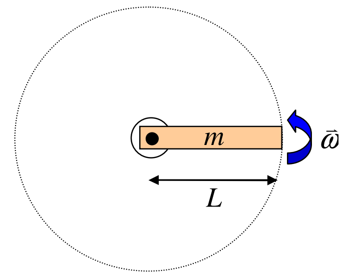
Situation 1 : *L'énergie cinétique d'une tige qui tourne autour de son extrémité.* Une tige homogène de masse m et de longueur L est fixée à une de ses extrémités à une charnière immobile (voir schéma ci-contre). Elle tourne avec une vitesse angulaire constante ω. On désire déterminer son énergie cinétique.



1) Énergie cinétique de rotation à partir de son extrémité :

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

- $I = \frac{1}{3} m L^2$ (voir table d'inertie)



Évaluons l'énergie cinétique de la tige :

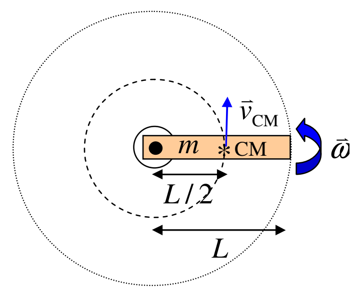
$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} m L^2\right)\omega^2 \qquad \text{(Remplacer } I = \frac{1}{3} m L^2 \text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{K = \frac{1}{6} m L^2 \omega^2} \qquad \text{(Calcul)}$$

2) Énergie cinétique de translation et de rotation à partir du centre de masse :

$$K = \frac{1}{2} m {v_{\text{CM}}}^2 + \frac{1}{2} I_{\text{CM}} \omega^2$$

- $I_{\text{CM}} = \frac{1}{12} m L^2$ (voir table d'inertie)
- $v_{\text{CM}} = r\omega$



Évaluons l'énergie cinétique de la tige

$$K = \frac{1}{2} m {v_{\text{CM}}}^2 + \frac{1}{2} I_{\text{CM}} \omega^2 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{1}{2} m (r\omega)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} m L^2\right)\omega^2 \qquad \text{(Remplacer termes)}$$

$$\Rightarrow \quad K = \frac{1}{2} m \left(\frac{L}{2}\right)^2 \omega^2 + \frac{1}{24} m L^2 \omega^2 \qquad \text{(Remplacer } r = \frac{L}{2} \text{)}$$

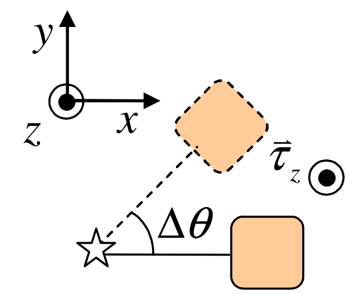
$$\Rightarrow \quad K = \frac{1}{8} m L^2 \omega^2 + \frac{1}{24} m L^2 \omega^2 \qquad \text{(Calculs)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{K = \frac{1}{6} M L^2 \omega^2} \qquad \text{(Simplification)}$$

On vérifie ainsi que nous pouvons évaluer l'énergie cinétique à l'aide du théorème des axes parallèles.

Travail en rotation

Le **travail** W est le processus de **transformation de l'énergie** causé par l'application d'un **moment de force** τ_z sur un objet effectuant une rotation $\Delta\theta$. Seule la composante du moment de **force** qui est perpendiculaire au plan de rotation effectue un travail. Voici l'expression scalaire du travail en rotation :



$$W = \tau_z \, \Delta\theta$$

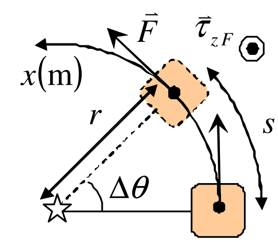
où W : Travail effectué par le moment de force (J)

τ_z : Moment de force perpendiculaire au plan de rotation ($\mathrm{N \cdot m}$)

$\Delta\theta$: Rotation effectuée par le corps (rad)

<u>Preuve :</u>

Considérons un corps qui subit une force $\vec{F}$ parallèle à un déplacement $\vec{s}$ le long d'une trajectoire circulaire de rayon r ce qui génère un travail W. Réécrivons l'expression du travail en fonction du moment de force associé à la force $\vec{F}$ et à la rotation $\Delta\theta$ du corps par rapport à l'axe de rotation :



$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$

$\Rightarrow \quad W = F\, s \cos(0°)$ (Force F parallèle au déplacement s)

$\Rightarrow \quad W = F(\Delta x)$ (Remplacer $s = \Delta x$)

$\Rightarrow \quad W = F(r\Delta\theta)$ (Relation linéaire-angulaire : $x = r\theta$ et $\Delta x = r\,\Delta\theta$)

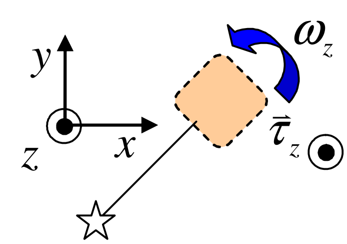
$\Rightarrow \quad W = (rF)\Delta\theta$ (Réécriture, regrouper rF)

$\Rightarrow \quad W = rF\sin(90°)\Delta\theta$ (Angle entre et est de 90°)

$\Rightarrow \quad W = \tau\,\Delta\theta \quad \blacksquare$ (Moment de force selon l'axe z : $\tau_z = \pm r\,F\sin(\theta)$)

Puissance en rotation

Lorsqu'une force applique un moment de force τ_z parallèlement à l'axe de rotation d'un corps tournant à une vitesse angulaire ω_z, celle-ci génère une puissance égale à l'expression suivante :



$$P = \tau_z \, \omega_z$$

où P : Puissance généré par le moment de force (W)

τ_z : Moment de force perpendiculaire au plan de rotation ($\mathrm{N \cdot m}$)

ω_z : Vitesse de rotation du corps (rad)

Preuve :

À partir du travail en rotation W, évaluons la puissance en rotation P en effectuant une variation dans le temps du travail :

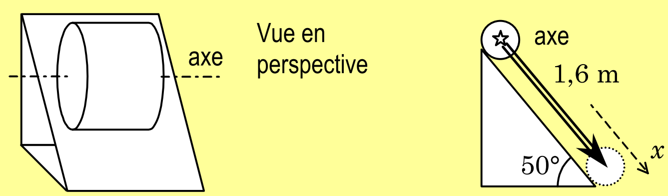
$$W = \tau_z \Delta\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}(\tau_z \, \Delta\theta)$$

$$\Rightarrow \quad P = \frac{d}{dt}(\tau_z \, \Delta\theta) \qquad \text{(Définition de la puissance : } P = dW/dt \text{)}$$

$$\Rightarrow \quad P = \tau_z \frac{d}{dt}(\Delta\theta) \qquad \text{(Suppose } \tau_z \text{ constant durant } dt \text{ infinitésimal)}$$

$$\Rightarrow \quad P = \tau_z \, \omega \quad \blacksquare$$

Situation 2 : ***L'énergie cinétique d'un cylindre qui roule.*** À la **situation 3** de la **section 4.7**, on voulait connaître l'accélération angulaire d'un cylindre (R = 20 cm, m = 12 kg, I_{CM} = 0,24 kg · m^2) qui roule *sans glisser* vers le bas d'un plan incliné à 50° par rapport à l'horizontale (schémas ci-dessous) : on a trouvé α = 25 rad/s^2 et f = 30,02 N. On désire calculer l'énergie cinétique acquise par le cylindre lorsqu'il roule à partir du repos sur une distance de 1,6 m mesurée le long du plan incliné par **(a)** dynamique et par **(b)** conservation de l'énergie.



Nous pouvons évaluer l'accélération de translation du centre de masse a_x grâce à l'accélération angulaire α :

$$a_x = r\alpha \quad \Rightarrow \quad a_x = (0{,}2)(25) \qquad \text{(Remplacer valeurs num.)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a_x = 5 \ \text{m/s}^2} \qquad \text{(Évaluer } a_x \text{)}$$

Évaluons la vitesse de translation du centre de masse v_x après avoir parcouru une distance de 1,6 m à l'aide des équations du MUA :

$$v_x{}^2 = v_{x0}{}^2 + 2a_x(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad v_x{}^2 = (0)^2 + 2(5)((1{,}6) - (0)) \qquad \text{(Remplacer valeurs num.)}$$

$$\Rightarrow \quad v_x{}^2 = 16 \qquad \text{(Calcul)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_x = 4 \ \text{m/s}} \qquad \text{(Évaluer } v_x \text{)}$$

Puisque le cylindre roule sans glisser, on peut évaluer la vitesse angulaire ω associée à une vitesse de translation de 4 m/s : ($v_{CR} = v_x$)

$$v_{CR} = r\omega \quad \Rightarrow \quad (4) = (0{,}20)\omega$$

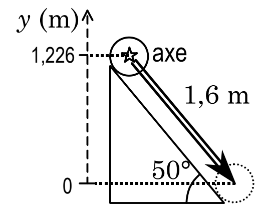
$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega = 20 \ \text{rad/s}}$$

Nous pouvons évaluer l'énergie cinétique du cylindre en rotation et translation :

$$K = \frac{1}{2} m v_{\mathrm{CM}}{}^2 + \frac{1}{2} I_{\mathrm{CM}} \omega^2 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{1}{2}(12)(4)^2 + \frac{1}{2}(0{,}24)(20)^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{K = 144 \text{ J}} \quad \textbf{(a)}$$

Nous pouvons également vérifier l'énergie cinétique du cylindre par conservation de l'énergie :

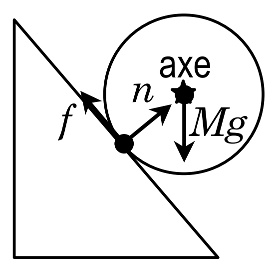
Conditions initiales	Conditions finales	Schéma
• $y_i = 1{,}6 \sin(50°) = 1{,}226 \text{ m}$ • $\omega_i = 0$ • $v_{\mathrm{CM}\,i} = 0$	• $y_f = 0 \text{ m}$ • $\omega_f = 20 \text{ rad/s}$ • $v_{\mathrm{CM}\,f} = 4 \text{ m/s}$	

On peut évaluer quelques termes d'énergies en exploitant le fait que le cylindre roule sans glisser ce qui permet d'exploiter la relation $\Delta x_{\mathrm{CR}} = r\Delta\theta$: ($m = 12 \text{ kg}$, $I = 0{,}24 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $f = 30{,}02 \text{ N}$)

- $K_i = 0$
- $U_{gi} = mgy_i = (12)(9{,}8)(1{,}226) \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_{gi} = 144 \text{ J}}$
- $U_{gf} = mgy_f = (12)(9{,}8)(0) \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_{gf} = 0}$
- $W_{f\,(\mathrm{trans})} = fs\cos(\theta) = (30{,}02)(1{,}6)\cos(180°) \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_{f\,(\mathrm{trans})} = -48{,}03 \text{ J}}$
- $W_{f\,(\mathrm{rot})} = +\tau_f \Delta\theta = (r\,f)\left(\frac{\Delta x_{\mathrm{CR}}}{r}\right) = (30{,}02)(1{,}6) \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_{f\,(\mathrm{rot})} = +48{,}03 \text{ J}}$

$W_f = 0$

On constate que le frottement qui effectue un travail de translation pour réduire l'accélération de translation a également effectué un travail de rotation pour augmenter/créer (seul agent) l'accélération angulaire. La somme des travaux est nul. Après tout, le frottement ne permet pas d'augmenter l'énergie cinétique du système, mais permet de la redistribuer entre la translation et la rotation.



Évaluons l'énergie cinétique (translation et rotation) par conservation de l'énergie :

$$E_f = E_i + W_{\mathrm{nc}} \quad \Rightarrow \quad U_{gf} + K_f = U_{gi} + K_i + W_f$$

$$\Rightarrow \quad (0) + K_f = (144) + (0) + (0)$$

$$\Rightarrow \quad K_f = 144 \text{ J} \quad \blacksquare$$

Exercice

4.8.2 ***L'énergie d'une sphère qui descend un plan incliné.*** Une sphère pleine de 15 cm de rayon dont la masse est égale à 5 kg est initialement au repos en haut d'un plan de 10 m de longueur incliné à 20° par rapport à l'horizontale. Elle roule sans glisser jusqu'en bas du plan. (a) Calculez son énergie cinétique totale lorsqu'elle arrive en bas du plan. (b) Quelle est l'énergie cinétique de rotation lorsqu'elle arrive en bas du plan? (c) Combien de tours sur elle-même a-t-elle fait en descendant le plan?

Solution

4.8.2 ***L'énergie d'une sphère qui descend un plan incliné.***

Moment d'inertie d'une sphère plein par rapport à son centre de masse :

$$I_{\text{CM}} = \frac{2}{5}MR^2 \quad \Rightarrow \quad I_{\text{CM}} = \frac{2}{5}(5)(0{,}15)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_{\text{CM}} = 0{,}045\ \text{kg}\,\text{m}^2}$$

Avec la conservation de l'énergie :

$y_i = 10\sin(20°) = 3{,}42\ \text{m}$ $\qquad v_i = 0$ $\qquad \omega_i = 0$

$y_f = 0$ $\qquad v_f = ?$ $\qquad \omega_f = ?$

a) Énergie cinétique totale en bas du plan incliné

$$E_f = E_i + W_{nc} \quad \Rightarrow \quad K_f + U_f = K_i + U_i + W_{nc}$$

$$\Rightarrow \quad K_f = U_i \qquad (K_i = 0,\ U_f = 0,\ W_{nc} = 0)$$

$$\Rightarrow \quad K_f = mgy_i = (5)(9{,}8)(3{,}42)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{K_f = 167{,}58\ \text{J}}$$

b) Énergie cinétique de rotation

$$K = K_{\text{CM rot}} + K_{\text{CM trans}} \quad \Rightarrow \quad K_f = \frac{1}{2} I_{\text{CM}} \omega_f^{\ 2} + \frac{1}{2} m v_f^{\ 2}$$

$$\Rightarrow \quad K_f = \frac{1}{2} I_{\text{CM}} \omega_f^{\ 2} + \frac{1}{2} m \left(r \omega_f \right)^2 \qquad (v = r\omega)$$

$$\Rightarrow \quad K_f = \frac{1}{2} I_{\text{CM}} \omega_f^{\ 2} + \frac{1}{2} m r^2 \omega_f^{\ 2}$$

$$\Rightarrow \quad K_f = \left(\frac{1}{2} I_{\text{CM}} + \frac{1}{2} m r^2 \right) \omega_f^{\ 2}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_f = \sqrt{\frac{K_f}{\left(\frac{1}{2} I_{\text{CM}} + \frac{1}{2} m r^2 \right)}}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_f = \sqrt{\frac{(167{,}58)}{\frac{1}{2}(0{,}045) + \frac{1}{2}(5)(0{,}15)^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega_f = 46{,}13 \ \text{rad/s}}$$

Avec la vitesse angulaire, on peut évaluer l'énergie cinétique de rotation :

$$K_{\text{CM rot}} = \frac{1}{2} I_{\text{CM}} \omega^2 \quad \Rightarrow \quad K_{\text{CM rot } f} = \frac{1}{2} I_{\text{CM}} \omega_f^{\ 2} = \frac{1}{2}(0{,}045)(46{,}13)^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{K_{\text{CM rot } f} = 47{,}88 \ \text{J}}$$

c) Nombre de tours effectués durant la descente :

$$x = r\theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{x}{r} = \frac{(10)}{(0{,}15)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\theta = 66{,}\overline{6} \ \text{rad}}$$

Ce qui nous donne le nombre de tours suivant :

$$N = 66{,}6 \ \text{rad} \times \frac{1 \ \text{tour}}{2\pi \ \text{rad}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{N = 10{,}61 \ \text{tours}}$$