Chapitre 4.7 – La dynamique de rotation

La 2e loi de Newton appliquée sur un corps rigide et l'accélération du centre de masse

L'application de la 2e loi de Newton sur l'intégralité des particules d'un corp rigide consiste à additionner l'ensemble des équations de la 2e loi de Newton associée à chacune des particules du corp rigide. En raison des nombreuses pair action-réaction forçant à maintenir constante la distance entre les particules, la relation qui résulte de cette somme de 2e loi de Newton met en relation la masse totale du système multiplié avec l'accélération du centre de masse $\vec{a}_{\text{CM}}$ du corps rigide :

2e loi de Newton appliquée sur le corp rigide	Expression de l'accélération du centre de masse $\vec{a}_{\text{CM}}$	Expression de la somme des forces
$\vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}_{\text{CM}}$	$\vec{a}_{\text{CM}} = \dfrac{\vec{F}_{\text{ext}}}{m}$	$\vec{F}_{\text{ext}} = \sum_{p=1}^{N} \vec{F}_{p(\text{ext})}$

Preuve :

Appliquons la 2e loi de Newton selon $Oxyz$ sur une particule p du système

$$\vec{F}_p = \frac{\mathrm{d}\vec{p}_p}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \sum_{e=1}^{M} \vec{F}_{ep} + \sum_{q=1,\, q\neq p}^{N} \vec{F}_{qp} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}_p}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{F}_{p(\text{ext})} + \vec{F}_{p(\text{int})} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}_p}{\mathrm{d}t}}$$

Effectuons maintenant une sommation de l'ensemble des N équations disponibles pour les N particules du corps rigide afin d'y simplifier la présence des forces internes (pair action-réaction) :

$$\sum_{p=1}^{N} \vec{F}_p = \sum_{p=1}^{N} \frac{\mathrm{d}\vec{p}_p}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \sum_{p=1}^{N} \left(\vec{F}_{p(\text{ext})} + \vec{F}_{p(\text{int})} \right) = \sum_{p=1}^{N} \frac{\mathrm{d}\vec{p}_p}{\mathrm{d}t}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{p=1}^{N} \vec{F}_{p(\text{ext})} + \sum_{p=1}^{N} \vec{F}_{p(\text{int})} = \sum_{p=1}^{N} \frac{\mathrm{d}\vec{p}_p}{\mathrm{d}t}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{p=1}^{N} \vec{F}_{p(\text{ext})} = \sum_{p=1}^{N} \frac{\mathrm{d}\vec{p}_p}{\mathrm{d}t}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{\text{ext}} = \sum_{p=1}^{N} \frac{\mathrm{d}(m_p \vec{v}_p)}{\mathrm{d}t}$$ (Quantité de mouvement : $\vec{p}_p = m_p \vec{v}_p$)

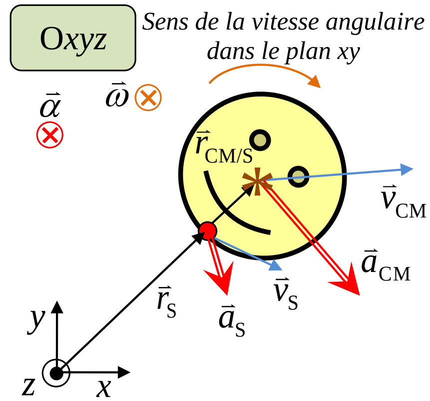
$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{p=1}^{N} m_p \vec{v}_p$$ (Factoriser la dérivée à la sommation)

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(m \frac{1}{m} \right) \sum_{p=1}^{N} m_p \vec{v}_p$$ (Multiplier par m / m)

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{\text{ext}} = m \frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\text{CM}}}{\mathrm{d}t}$$ ($\vec{v}_{\text{CM}} = \frac{1}{m} \sum_{p=1}^{N} m_p \vec{v}_p$)

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}_{\text{CM}} \quad \blacksquare$$ ($\vec{a}_{\text{CM}} = \mathrm{d}\vec{v}_{\text{CM}} / \mathrm{d}t$)

L'accélération du point de référence S du corps rigide



Afin d'évaluer l'évolution de la position $\vec{r}_{\mathrm{S}}$ et la vitesse $\vec{v}_{\mathrm{S}}$ du corps rigide, il faut évaluer l'accélération $\vec{a}_{\mathrm{S}}$ du point de référence S autour duquel le corps rigide tourne. Puisque la dynamique d'établie un lien entre la somme des forces ($\sum \vec{F}$) appliquée sur le corps rigide et l'accélération $\vec{a}_{\mathrm{CM}}$ du centre de masse du corps rigide, l'expression de l'accélération du corps rigide correspondra à l'expression suivante :

$$\vec{a}_{\mathrm{S}} = \vec{a}_{\mathrm{CM}} - \vec{\alpha} \times \vec{r}_{\mathrm{CM/S}} - \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{\mathrm{CM/S}} \right)$$

$$\text{avec} \quad \vec{r}_{\mathrm{CM/S}} = \vec{r}_{\mathrm{CM}} - \vec{r}_{\mathrm{S}}$$

où $\vec{a}_{\mathrm{S}}$: Accélération du point de référence S du corps rigide (m/s^2).
$\vec{a}_{\mathrm{CM}}$: Accélération du centre de masse du corps rigide (m/s^2).
$\vec{r}_{\mathrm{CM/S}}$: Position du centre de masse par rapport au point de référence S (m).
$\vec{\omega}$: Vitesse angulaire du corps rigide (rad/s).
$\vec{\alpha}$: Accélération angulaire du corps rigide (rad/s^2).

Preuve :

À partir de l'expression de la vitesse du centre de masse $\vec{v}_{\mathrm{CM}}^{(\mathrm{O})} = \vec{v}_{\mathrm{CM}}$ dans le référentiel **O** décomposé en vitesse $\vec{v}_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})} = \vec{v}_{\mathrm{S}}$ du point de référence S et en vitesse relative $\vec{v}_{\mathrm{CM/S}}^{(\mathrm{O})} = \vec{v}_{\mathrm{CM/S}}$ du centre de masse par rapport au point de référence S, effectuons la dérivée par rapport au temps pour obtenir $\vec{a}_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})} = \vec{a}_{\mathrm{S}}$:

$$\vec{v}_{\mathrm{CM}} = \vec{v}_{\mathrm{S}} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{\mathrm{CM/S}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\mathrm{CM}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{v}_{\mathrm{S}} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{\mathrm{CM/S}} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}_{\mathrm{CM}} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\mathrm{S}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{\mathrm{CM/S}} \right) \qquad \left(\vec{a}_{\mathrm{CM}} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\mathrm{CM}}}{\mathrm{d}t} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}_{\mathrm{CM}} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\mathrm{S}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r}_{\mathrm{CM/S}} + \vec{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\vec{r}_{\mathrm{CM/S}}}{\mathrm{d}t}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}_{\mathrm{CM}} = \vec{a}_{\mathrm{S}} + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{\mathrm{CM/S}} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{\mathrm{CM/S}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}_{\mathrm{CM}} = \vec{a}_{\mathrm{S}} + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{\mathrm{CM/S}} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{\mathrm{CM/S}} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}_{\mathrm{S}} = \vec{a}_{\mathrm{CM}} - \vec{\alpha} \times \vec{r}_{\mathrm{CM/S}} - \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{\mathrm{CM/S}} \right) \quad \blacksquare$$

Remarque :

- Le terme $\vec{a}_{\mathrm{CM}}$ représente l'accélération entrainé par le mouvement du centre de masse du corps rigide.
- Le terme $\vec{\alpha} \times \vec{r}_{\mathrm{CM/S}}$ représente l'accélération tangentielle du centre de masse par rapport au point de référence S.
- Le terme $\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{\mathrm{CM/S}} \right)$ représente l'accélération centripète du centre de masse par rapport au point de référence S.
- Il n'y a pas d'accélération de Coriolis, car la distance entre le point S et le centre de masse reste constant.

L'accélération d'un corps rigide avec axe fixe

Lorsque l'on désire analyser le mouvement d'un corps rigide en rotation autour d'un axe fixe, il est idéal d'établir la position $\vec{r}_{\mathrm{S}} = 0$ du référence S comme étant situé sur l'axe fixe ce qui nous permettra d'affirmer $\vec{a}_{\mathrm{S}} = 0$ signifiant que ce point ne pourra pas accélérer. Cette contrainte nous permet alors d'affirmer que le centre de masse subit une accélération tangentielle et une accélération centripète par rapport au point de référence $\vec{r}_{\mathrm{S}}$ selon la relation suivante :

Contrainte de l'axe fixe : $\vec{a}_{\mathrm{S}} = 0$	
L'axe fixe passe par le centre de masse : $\vec{r}_{\mathrm{S}} = \vec{r}_{\mathrm{CM}}$ et donc $\vec{r}_{\mathrm{CM/S}} = 0$	L'axe fixe ne passe pas par le centre de masse : $\vec{r}_{\mathrm{S}} \neq \vec{r}_{\mathrm{CM}}$
 https://www.playgroundoutfitters.com/wp-content/uploads/2018/12/merry-go-round-10__62014.jpg Rotation d'un tourniquet	 https://www.gimm.fr/categorie-produits/portes-dentrees/portes-entree-acier/ Rotation d'une porte
$\vec{a}_{\mathrm{CM}} = 0$ (sans accélération, car $\vec{r}_{\mathrm{CM/S}} = 0$)	$\vec{a}_{\mathrm{CM}} = \vec{\alpha} \times \vec{r}_{\mathrm{CM/S}} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{\mathrm{CM/S}} \right)$ (avec accélération tangentielle et centripète)

Preuve :

Développons l'expression de l'accélération du point de référence $\vec{a}_{\mathrm{S}}$ en imposant la contrainte $\vec{a}_{\mathrm{S}} = 0$ afin de définir l'expression de l'accélération du centre de masse $\vec{a}_{\mathrm{CM}}$:

$$\vec{a}_{\mathrm{S}} = \vec{a}_{\mathrm{CM}} - \vec{\alpha} \times \vec{r}_{\mathrm{CM/S}} - \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{\mathrm{CM/S}} \right) \qquad \text{(Expression de } \vec{a}_{\mathrm{S}}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \vec{a}_{\mathrm{CM}} - \vec{\alpha} \times \vec{r}_{\mathrm{CM/S}} - \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{\mathrm{CM/S}} \right) \qquad \text{(Contrainte } \vec{a}_{\mathrm{S}} = 0\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}_{\mathrm{CM}} = \vec{\alpha} \times \vec{r}_{\mathrm{CM/S}} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{\mathrm{CM/S}} \right) \ \blacksquare \qquad \text{(Isoler } \vec{a}_{\mathrm{CM}}\text{)}$$

La 2e loi de Newton en rotation selon l'axe *z* avec un axe fixe

Lorsque l'on applique la 2e loi de Newton sur un corps rigide, nous obtenons l'accélération $\vec{a}_{\mathrm{CM}}$ du centre de masse du corps rigide tel que

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}_{\mathrm{CM}} \quad .$$

Cependant, si nous désirons obtenir l'accélération angulaire $\vec{\alpha}$ du corps rigide, cela est un peu plus complexe, car la représentation adéquate du moment d'inertie I devient une structure tensorielle[1].

La porte et le tourniquet sont des bons exemples où la 2e loi de Newton en rotation selon l'axe *z* avec axe fixe est applicable.

Dans le cas où l'on utilise un point de référence à accélération nulle ($\vec{a}_{\mathrm{S}} = 0$) avec l'imposition d'une rotation du corps rigide autour d'un axe *z* fixe, alors nous pouvons obtenir l'accélération angulaire α_z du corps rigide à l'aide de l'équation de la 2e loi de Newton en rotation avec axe fixe :

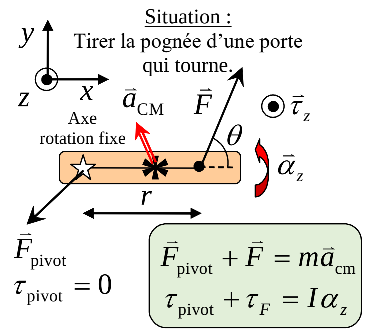
$$\sum \tau_z = I_z \alpha_z$$

(avec axe fixe)

où $\sum \tau_z$: Somme des moments de force selon l'axe z ($\mathrm{N \cdot m}$) ($\tau_z = \pm r\, F \sin(\theta)$)

I_z : Moment d'inertie de l'objet par rapport à l'axe de rotation z ($\mathrm{kg \cdot m^2}$)

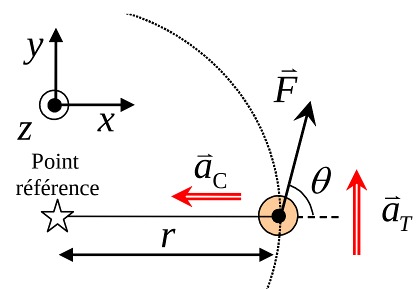
α_z : Accélération angulaire de l'objet selon l'axe z ($\mathrm{rad/s^2}$)



L'orientation de l'accélération du centre de masse satisfait son accélération tangentielle et centripète.

Preuve :

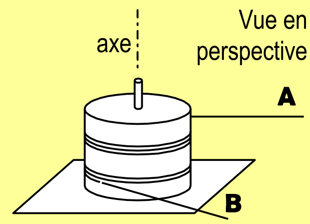
Considérons une particule de masse *m* qui subit une accélération tangentielle a_T grâce à une force F sur une trajectoire circulaire de rayon *r*. Appliquons la 2e loi de Newton selon l'axe tangentiel afin d'exprimer cette loi à l'aide de la notion de moment de force τ_z, d'inertie de rotation I_z et d'accélération angulaire α_z. Remarquons que l'angle entre *r* et *F* dans le plan *xy* est égal à θ :



$\sum \vec{F} = m\vec{a}$	$\Rightarrow$	$F\sin(\theta) = ma_T$	(Force selon l'axe tangentiel : $F_{//} = F\sin(\theta)$)
	$\Rightarrow$	$F\sin(\theta) = m(r\alpha_z)$	(Accélération angulaire : $a_T = r\alpha_z$)
	$\Rightarrow$	$(r)F\sin(\theta) = (r)m\,r\alpha_z$	(Multiplier par *r* de chaque côté)
	$\Rightarrow$	$(\tau_z) = m\,r^2\alpha_z$	(Moment de force selon z : $\tau_z = rF\sin(\theta)$)
	$\Rightarrow$	$\tau_z = I_z\alpha_z \quad \blacksquare$	(Inertie de rotation dans plan *xy* : $I_z = mr^2$)

[1] Consulter le chapitre 7.3 des notes de cours pour plus d'information sur le sujet.

Situation 1 : *Une double bobine de fil.* Un cylindre homogène dont la masse M est égale à 12 kg et dont le rayon R est égal à 20 cm peut tourner autour d'un axe vertical sans frottement. Deux fils sont enroulés autour du cylindre et permettent de lui imprimer un mouvement de rotation (voir schéma ci-contre). Albert tire sur le fil **A** avec une force horizontale de 6 N orientée vers l'est et Béatrice tire sur le fil **B** avec une force horizontale de 3 N orientée à 30° au sud de l'est.



Rotation liée avec axe fixe

Comme les cordes ont des masses négligeables et qu'elles ne glissent pas sur le cylindre, elles transmettent intégralement ces forces au cylindre. On désire déterminer l'accélération angulaire du cylindre.

Schéma vue de haut :

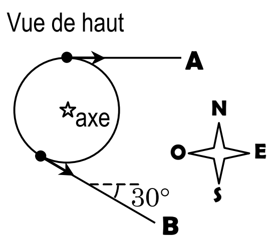
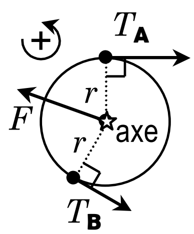
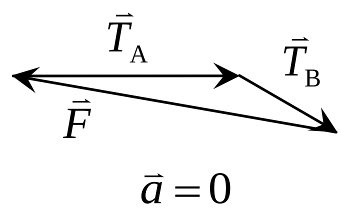


Schéma des forces :



Résolution graph. : ($\sum \vec{F} = m\vec{a}$) :



Nous avons ici une rotation liée. Nous pouvons alors évaluer le moment d'inertie du cylindre tournant autour de son centre de masse : (voir table inertie chapitre 4.4)

$$I_z = \frac{1}{2} m R^2 \quad \Rightarrow \quad I_z = \frac{1}{2}(12)(0{,}2)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_z = 0{,}24 \ \text{kg} \cdot \text{m}^2}$$

Nous avons trois forces d'appliquées sur le cylindre. Évaluons le moment de force associé aux trois forces. Le point de référence sera le centre du cylindre (axe de rotation) :

- $\tau_A = \pm r_A F_A \sin(\theta_A) = -(0{,}2)(6)\sin(90°) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau_A = -1{,}2 \ \text{N} \cdot \text{m}}$
- $\tau_B = \pm r_B F_B \sin(\theta_B) = +(0{,}2)(3)\sin(90°) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau_B = 0{,}6 \ \text{N} \cdot \text{m}}$
- $\tau_F = \pm r_F F_F \sin(\theta_F) = \pm(0) F_F \sin(\theta_F) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau_F = 0 \ \text{N} \cdot \text{m}}$

Nous pouvons évaluer l'accélération angulaire :

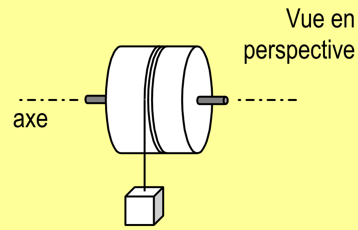
$$\sum \tau_z = I_z \alpha_z \quad \Rightarrow \quad \tau_A + \tau_B + \tau_F = I_z \alpha$$

$$\Rightarrow \quad (-1{,}2) + (0{,}6) + (0) = (0{,}24)\alpha_z$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\alpha_z = -2{,}5 \ \text{rad/s}^2} \qquad \text{(Évaluer } \alpha_z\text{)}$$

Selon notre système d'axe angulaire, le cylindre tourne avec une accélération angulaire de **2,5 rad/s²** dans le **sens horaire**.

Situation 2 : ***Un bloc relié à un cylindre.*** Un cylindre homogène ($R = 20$ cm, $m_C = 12$ kg, $I = ½ mR^2 = 0{,}24$ kg·m^2) peut tourner autour d'un axe horizontal fixe sans frottement (schéma ci-dessous). Il est initialement au repos. On accroche un bloc m_B de 2 kg à une corde de masse négligeable qui s'enroule autour du cylindre (la corde ne glisse pas sur le cylindre); on désire déterminer l'accélération angulaire du cylindre ainsi que le module de la vitesse du bloc après une chute de 30 cm.



Rotation liée avec axe fixe

Schéma vue de côté :

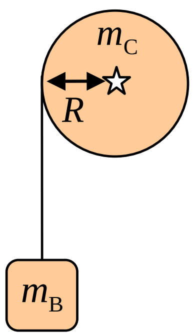
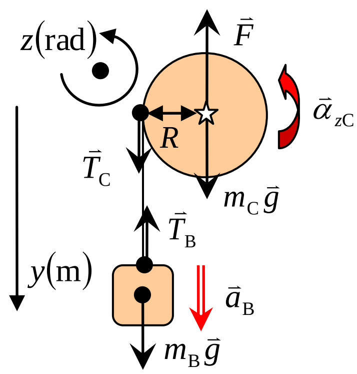
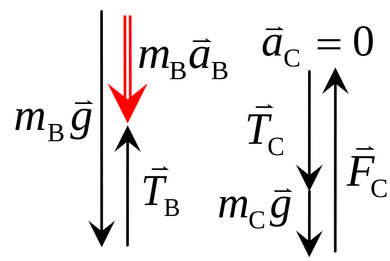


Schéma des forces :



Résolution graphique :



Appliquons la 2e loi de Newton sur le bloc de masse m_B selon l'axe y positif vers le bas :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad m_B\vec{g} + \vec{T}_B = m\vec{a}_B \quad \Rightarrow \quad \boxed{m_B g - T_B = m_B a_{yB}} \quad \textbf{(1)}$$

Appliquons la 2e loi de Newton sur le cylindre de masse m_C selon l'axe y positif vers le bas sachant que le cylindre n'effectue pas de translation : ($\vec{a}_C = 0$)

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{T}_C + m_C\vec{g} + \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_C + m_C g - F = 0} \quad \textbf{(2)}$$

Évaluons nos moment de force appliquées du le cylindre par rapport au centre du cylindre :

- $\tau_{T_C} = \pm r_{T_C} T_C \sin(\theta) = +(R)T_C \sin(90°) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau_{T_C} = RT_C}$
- $\tau_F = \pm r_F F \sin(\theta) = \pm(0) F \sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau_F = 0}$
- $\tau_{m_C g} = \pm r_{m_C g} m_C g \sin(\theta) = \pm(0) m_C g \sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau_{m_C g} = 0}$

Appliquons la 2e loi de Newton en rotation sur le cylindre de moment d'inertie I :

$$\sum \tau_z = I_z \alpha_z \quad \Rightarrow \quad \tau_{T_C} + \tau_F + \tau_{m_C g} = I_z \alpha_{zC} \qquad \text{(Remplacer } \textstyle\sum \tau_z \text{)}$$

$$\Rightarrow \quad (RT_C) + (0) + (0) = I_z \alpha_{zC} \qquad \text{(Remplacer valeur num.)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{RT_C = I_z \alpha_{zC}} \quad \textbf{(3)} \qquad \text{(Simplifier)}$$

Avec la 3e loi de Newton et l'approximation de la corde de masse nulle, nous avons :

$$T_{\mathrm{B}} = T_{\mathrm{C}} = T$$

Puisque nous deux objets sont reliés entre eux par une corde qui **ne glisse pas** sur la cylindre, nous pouvons relier l'accélération de B et l'accélération angulaire de C de la façon suivante :

$a_T = r\alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_{y\mathrm{B}} = R\alpha_{z\mathrm{C}}}$ **(4)** (Remplacer $r = R$ et $a_T = a_{y\mathrm{B}}$)

Nous avons donc les quatre équations suivantes :

$m_{\mathrm{B}} g - T = m_{\mathrm{B}} a_{y\mathrm{B}}$ **(1)** **(chute du bloc)**

$T + m_{\mathrm{C}} g - F = 0$ **(2)** **(maintien du cylindre)**

$RT = I_z \alpha_{z\mathrm{C}}$ **(3)** **(rotation du cylindre)**

$a_{y\mathrm{B}} = R\alpha_{z\mathrm{C}}$ **(4)** **(relation accélération-rotation)**

On peut résoudre le système pour évaluer l'accélération angulaire à partir de **(3)** :

$RT = I_z \alpha_{z\mathrm{C}} \quad \Rightarrow \quad R(m_{\mathrm{B}} g - m_{\mathrm{B}} a_{y\mathrm{B}}) = I_z \alpha_{z\mathrm{C}}$ (Utiliser **(1)** , $T = m_{\mathrm{B}} g - m a_{y\mathrm{B}}$)

$\Rightarrow \quad m_{\mathrm{B}} gR - m_{\mathrm{B}} R a_{y\mathrm{B}} = I_z \alpha_{z\mathrm{C}}$ (Distribuer le R)

$\Rightarrow \quad m_{\mathrm{B}} gR - m_{\mathrm{B}} R (R\alpha_{z\mathrm{C}}) = I_z \alpha_{z\mathrm{C}}$ (Utiliser **(4)** , $a_{y\mathrm{B}} = R\alpha_{z\mathrm{C}}$)

, $\Rightarrow \quad m_{\mathrm{B}} gR = I_z \alpha_{z\mathrm{C}} + m_{\mathrm{B}} R^2 \alpha_{z\mathrm{C}}$ (Réunir termes en $\alpha_{z\mathrm{C}}$)

$\Rightarrow \quad \boxed{\alpha_{z\mathrm{C}} = \dfrac{m_{\mathrm{B}} gR}{I_z + m_{\mathrm{B}} R^2}}$ (Isoler $\alpha_{z\mathrm{C}}$)

$\Rightarrow \quad \alpha_{z\mathrm{C}} = \dfrac{(2)(9{,}8)(0{,}2)}{(0{,}24) + (2)(0{,}2)^2}$ (Remplacer valeurs num.)

$\Rightarrow \quad \boxed{\alpha_{z\mathrm{C}} = 12{,}25 \ \mathrm{rad/s^2}}$ (Évaluer $\alpha_{z\mathrm{C}}$)

On peut évaluer l'accélération verticale $a_{y\mathrm{B}}$ du bloc B à partir de **(4)** :

$a_{y\mathrm{B}} = R\alpha_{z\mathrm{C}} \quad \Rightarrow \quad a_y = (0{,}2)(12{,}25) \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_y = 2{,}45 \ \mathrm{m/s^2}}$

Évaluons la vitesse du bloc m_{B} après une chute de 30 cm à l'aide des équations du MUA :

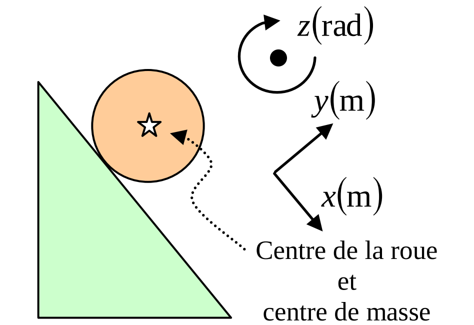
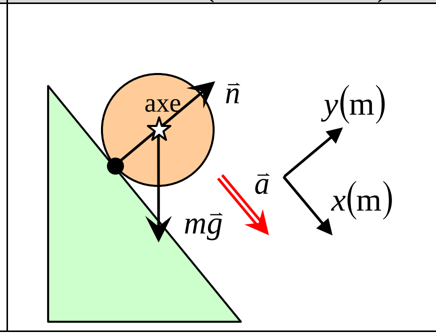
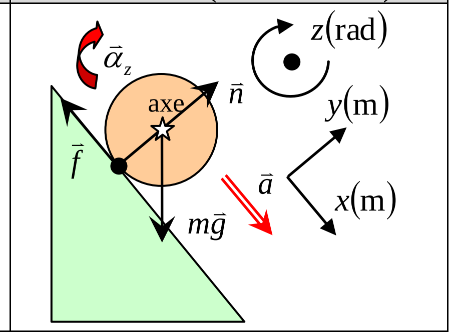
$v_y{}^2 = v_{y0}{}^2 + 2a_y(y - y_0) \quad \Rightarrow \quad v_y{}^2 = (0)^2 + 2(2{,}45)((0{,}3) - (0))$

$\Rightarrow \quad v_y{}^2 = 1{,}47$

$\Rightarrow \quad \boxed{v_y = 1{,}21 \ \mathrm{m/s}}$

La 2^{e} loi de Newton en rotation selon l'axe *z* avec un axe passant par le centre de masse

Nous avons présenté précédemment que $\sum \tau_z = I_z \alpha_z$ est applicable pour expliquer la rotation d'un corps autour d'un axe de rotation fixe (ex : Porte). Cependant, il y a plusieurs situations où un corps effectue une translation autour d'un point de référence tout en effectuant une rotation autour de ce point. Prenons comme exemple une roue qui descend un plan incliné :

Rotation d'une roue autour de son centre de masse	Descendre le plan sans frottement (sans rotation)	Descendre le plan avec frottement (avec rotation)
		

En théorie, nous ne pourrions plus appliquer $\sum \tau_z = I_z \alpha_z$, car l'axe de rotation est en accélération. Cependant, puisque **(1)** cet axe est situé sur le centre de masse, **(2)** que le moment d'inertie du corps est symétrique par rapport l'axe *z* et **(3)** que le corps possède uniquement[2] une vitesse angulaire selon l'axe *z*, alors nous pouvons décrire l'évolution du corps rigide grâce aux deux équations suivantes :

2^{e} loi de Newton en translation	2^{e} loi de Newton en rotation
$\sum \vec{F} = m\vec{a}_{\mathrm{CM}}$	$\sum \tau_{z\mathrm{CM}} = I_{z\mathrm{CM}} \alpha_z$

où

$\sum F$: Somme des forces selon l'axe x et y (N)

m : Masse totale de l'objet (kg)

$\vec{a}_{\mathrm{CM}}$: Accélération l'objet selon l'axe *x* et *y* ($\mathrm{m/s^2}$)

$\sum \tau_z$: Somme des moments de force selon l'axe *z* ($\mathrm{N \cdot m}$) avec $\tau_z = \pm r F \sin(\theta)$

$I_{z\mathrm{CM}}$: Moment d'inertie de l'objet par rapport au centre de masse selon l'axe *z* ($\mathrm{kg \cdot m^2}$)

α_z : Accélération angulaire de l'objet selon l'axe *z* ($\mathrm{rad/s^2}$)

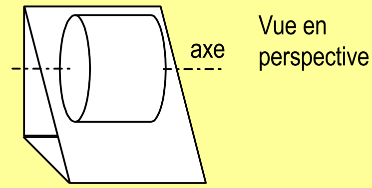
<u>Preuve :</u>

Consultez le chapitre 7 pour une démonstration très complexe, mais complète.

---

[2] Sans restriction, en trois dimensions, nous aurions la relation $\sum \vec{\tau}_{\mathrm{CM}} = \vec{\omega} \times I_{\mathrm{CM}} \vec{\omega} + I_{\mathrm{CM}} \vec{\alpha}$ où I_{CM} est le tenseur 3×3 de moment d'inertie évalué par rapport au centre de masse du corps.

Situation 3 : ***Un cylindre qui roule.*** Un cylindre homogène (R = 20 cm, m = 12 kg, $I = ½\, mR^2 = 0{,}24\ \mathrm{kg \cdot m^2}$) roule *sans glisser* vers le bas d'un plan incliné à 50° par rapport à l'horizontale (voir schéma ci-contre). On désire déterminer **(a)** l'accélération angulaire du cylindre ainsi que **(b)** le coefficient de frottement statique minimal μ_s qui doit exister entre le cylindre et le plan.



Rotation liée avec axe de rotation en mouvement situé au CM

Schéma vue de côté :

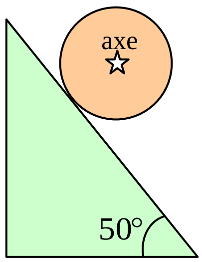
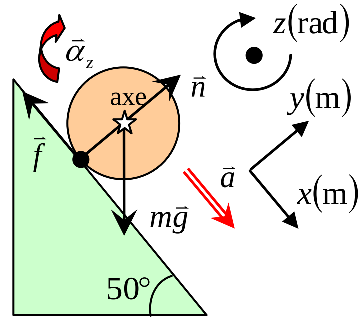
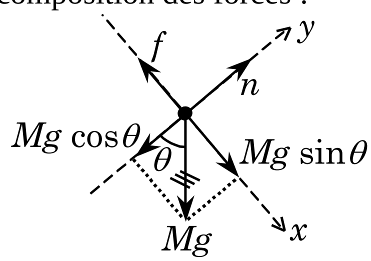


Schéma des forces :



Décomposition des forces :



$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \text{où} \quad m\vec{g} + \vec{n} + \vec{f} = m\vec{a}$$

Appliquons la 2e loi de Newton sur le cylindre de masse m selon l'axe x et y afin d'obtenir nos deux relation en lien avec l'accélération a_x et a_y sachant que $a_y = 0$:

<u>Selon l'axe x :</u> $\quad \sum F_x = ma_x \quad \Rightarrow \quad \boxed{mg\sin(\theta) - f = ma_x}$ **(1)**

<u>Selon l'axe y :</u> $\quad \sum F_y = ma_y \quad \Rightarrow \quad \boxed{n - mg\cos(\theta) = 0}$ **(2)**

Appliquons la 2e loi de Newton en rotation sur le cylindre de moment d'inertie I_z :

$$\sum \tau_z = I_z \alpha_z \quad \Rightarrow \quad \tau_{mg} + \tau_n + \tau_f = I_z \alpha_z$$

<u>Selon l'axe z :</u>

- $\tau_{mg} = \pm r_{mg}\, mg\sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad \tau_{mg} = \pm(0)mg\sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau_{mg} = 0}$
- $\tau_n = \pm r_n\, n\sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad \tau_n = \pm(R)n\sin(180°) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau_n = 0}$
- $\tau_f = \pm r_f\, f\sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad \tau_f = +(R)f\sin(90°) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau_f = R\,f}$

Ceci nous donne une 3e équation :

$$\tau_{mg} + \tau_n + \tau_f = I_z \alpha_z \quad \Rightarrow \quad (0) + (0) + (R\,f) = I_z \alpha_z$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{R\,f = I_z \alpha_z} \quad \textbf{(3)}$$

Puisque le cylindre tourne *sans glisser* sur le plan incliné, nous pouvons introduire la relation suivante entre l'accélération de translation a_x :

$a_T = r\alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_x = R\alpha_z}$ **(4)** (Remplacer $r = R$ et $a_T = a_x$)

Nous avons les quatre équations suivantes :

$mg\sin(\theta) - f = ma_x$ **(1)** **(accélération du cylindre le long du plan)**

$n - mg\cos(\theta) = 0$ **(2)** **(support du cylindre sur le plan incliné)**

$R\,f = I_z\alpha_z$ **(3)** **(rotation du cylindre autour du centre)**

$a_x = R\alpha_z$ **(4)** **(relation accélération-rotation)**

Évaluons l'accélération angulaire du cylindre à partir de l'équation **(1)** :

$mg\sin(\theta) - f = ma_x \quad \Rightarrow \quad mg\sin(\theta) - f = m(R\alpha_z)$ (Utiliser **(4)**)

$\Rightarrow \quad mg\sin(\theta) - \left(\dfrac{I_z\alpha_z}{R}\right) = mR\alpha_z$ (Utiliser **(3)**, $f = \dfrac{I_z\alpha_z}{R}$)

$\Rightarrow \quad mg\sin(\theta) = mR\alpha_z + \dfrac{I_z\alpha_z}{R}$ (Regrouper termes avec α_z)

$\Rightarrow \quad mg\sin(\theta) = \left(mR + \dfrac{I_z}{R}\right)\alpha_z$ (Factoriser α_z)

$\Rightarrow \quad mg\sin(\theta) = \left(\dfrac{mR^2 + I_z}{R}\right)\alpha_z$ (Dénominateur commun)

$\Rightarrow \quad \boxed{\alpha_z = \dfrac{mgR\sin(\theta)}{mR^2 + I_z}}$ (Isoler α_z)

$\Rightarrow \quad \alpha_z = \dfrac{(12)(9{,}8)(0{,}2)\sin(50°)}{(12)(0{,}2)^2 + (0{,}24)}$ (Remplacer valeurs num.)

$\Rightarrow \quad \boxed{\alpha_z = 25{,}02\ \text{rad/s}^2}$ **(a)** (Évaluer α_z)

Pour satisfaire cette situation il faut que la force de frottement $\vec{f}$ génère l'accélération angulaire $\vec{\alpha}_z$. Évaluons la force de frottement requise à partir de l'équation **(3)** :

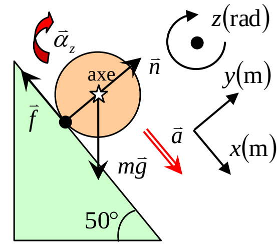
$R\,f = I_z\alpha_z \quad \Rightarrow \quad (0{,}2)f = (0{,}24)(25{,}02)$ (Remplacer valeurs num.)

$\Rightarrow \quad \boxed{f = 30{,}02\ \text{N}}$ (Évaluer *f*)

Pour évaluer le coefficient de fortement statique μ_s minimale, nous devons supposer que le frottement statique est sollicité au maximum ($f_{s\,\max} = \mu_s n$) :

$f = f_{s\,\max}$	$\Rightarrow$	$f = \mu_s n$	(Remplacer $f_{s\,\max} = \mu_s n$)
	$\Rightarrow$	$f = \mu_s (mg\cos(\theta))$	(Utiliser **(2)**, $n = mg\cos(\theta)$)
	$\Rightarrow$	$(30{,}02) = \mu_s (12)(9{,}8)\cos(50°)$	(Remplacer valeurs num.)
	$\Rightarrow$	$\boxed{\mu_s = 0{,}3971}$	(Évaluer μ_s)

Voici la conclusion que nous pouvons tirer sur le coefficient de frottement :

Condition sur le coefficient μ_s	Rappel du schéma des forces
$\mu_s > 0{,}397$: Le cylindre roule sur le plan incliné. $a_x = R\alpha_z$ $\mu_s < 0{,}397$: Le cylindre glisse sur le plan incliné. $a_x \neq R\alpha_z$	

La rotation d'une roue en accélération et décélération

La rotation d'une roue est influencée par le type de frottement qu'applique la surface de contact sur la roue. Dans une voiture, il est important de réaliser que la qualité des pneus est une donnée très importante, car c'est uniquement le frottement entre les pneus et le sol qui permet à la voiture de se déplacer :

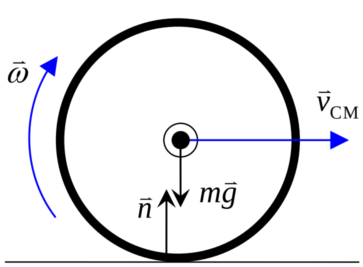
Un dérapage fait intervenir un frottement cinétique

- ❖ Frottement est statique $\Rightarrow$ la roue tourne sans glisser au sol ($v_{\text{cm}} = r\omega$)
- ❖ Frottement est cinétique $\Rightarrow$ la roue tourne en glissant au sol ($v_{\text{cm}} \neq r\omega$)

Voici différentes situations où le frottement cinétique et statique doit être considéré.

Situation 1 : Roue qui roule sur une surface sans frottement.

Exemple : Une roue qui glisse en tournant sur de la glace.

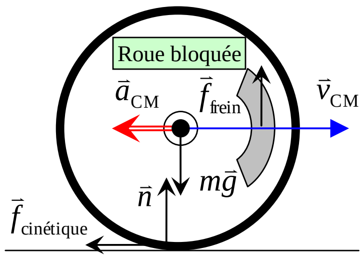


- ➢ La roue « flotte » sur la surface (pas d'interaction avec la surface)
- ➢ L'équation $v_{\text{cm}} = r\omega$ n'est pas nécessairement vraie.
- ➢ La roue peut tourner dans les deux sens ou ne pas tourner.

Situation 2 :

Roue qui <u>glisse sans rouler</u> sur une surface <u>avec frottement</u>.

Exemple : Une roue qui glisse sans tourner en bloquant la rotation des roues par un système de freinage.




Frein à disque sur une moto

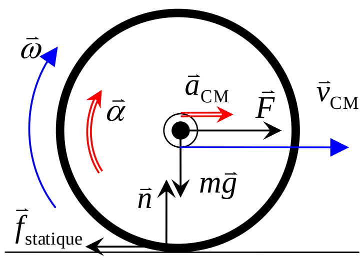
- La roue est comparable à un bloc qui glisse sous l'influence d'un frottement cinétique $\vec{f}_c$.
- Nous avons aucune vitesse angulaire ($\omega = 0$), car $\tau_f - \tau_{frein} = 0$.


Frein à disque sur une voiture

Situation 3 :

Roue qui <u>roule sans glisser</u> sur une surface <u>avec frottement</u>, avec force appliquée au centre de masse.

Exemple : Tirer une charrette à l'aide d'une corde.

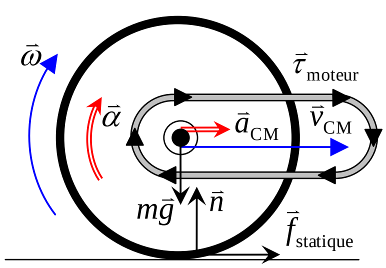


- L'accélération de translation $\vec{a}_{CM}$ est propulsée par $\vec{F}$, mais ralentie par $\vec{f}_s$ ($\vec{F} + \vec{f}_s = m\vec{a}_{CM}$, $F > f_s$)
- L'accélération de rotation $\vec{\alpha}$ est propulsée par le moment de force produit par $\vec{f}_s$ ($\tau_f = I_{CM}\alpha$)
- Nous avons la relation suivante : $v_{CM} = r\omega$ et $a_{CM} = r\alpha$

Situation 4 :

Roue qui <u>roule sans glisser</u> sur une surface <u>avec frottement</u>, avec moment de force appliquée sur la roue.

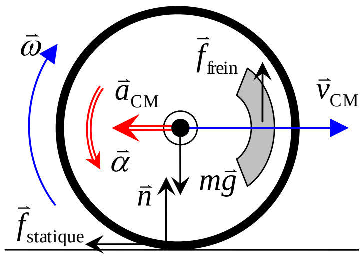
Exemple : Utiliser un pédalier afin de faire tourner le pneu arrière d'une bicyclette.



- Le pédalier applique une force résultant nulle sur le centre de masse. ($\sum \vec{F}_{moteur} = 0$)
- L'accélération de translation $\vec{a}_{CM}$ est propulsée par le frottement $\vec{f}_s$ ($\vec{f}_s = m\vec{a}_{CM}$).
- L'accélération de rotation $\vec{\alpha}$ est propulsée par le moment de force produit par $\vec{\tau}_{moteur}$, mais ralentie par le moment de force produit par $\vec{f}_s$ ($\tau_{moteur} - \tau_f = I_{CM}\alpha$, $\tau_{moteur} > \tau_f$).
- Nous avons la relation suivante : $v_{CM} = r\omega$ et $a_{CM} = r\alpha$

Situation 5 : Roue qui <u>roule sans glisser</u> sur une surface <u>avec frottement</u>, avec moment de force appliquée sur la roue comme freinage.

Exemple : Utiliser un système de frein ABS (empêche le blocage des roues).

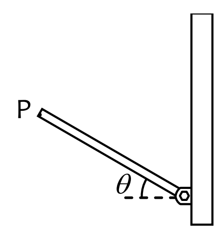


- La décélération de translation $\vec{a}_{\text{CM}}$ est propulsée par le frottement $\vec{f}_s$ ($\vec{f}_s = m\vec{a}_{\text{CM}}$).
- La décélération de rotation $\vec{\alpha}$ est propulsée par la force du frein $\vec{f}_{\text{frein}}$, mais ralentie le frottement $\vec{f}_s$ ($\tau_s - \tau_{\text{frein}} = -I_{\text{CM}}\alpha$, $\tau_{\text{frein}} > \tau_f$).
- Nous avons la relation suivante : $v_{\text{CM}} = r\omega$ et $a_{\text{CM}} = r\alpha$

Exercices

4.7.2 ***Le temps pour faire un quart de tour.*** Une tige mince homogène de 5 kg dont la longueur est de 2 m peut tourner autour de son centre. Si elle est initialement immobile et qu'on lui applique un moment de force de 10 N·m, combien de temps prendra-t-elle pour faire un quart de tour ?

4.7.3 ***Une accélération plus grande que l'accélération de chute libre.*** Une tige mince homogène de 2 kg, dont la longueur est de 50 cm, est fixée à une de ses extrémités par une charnière; elle tombe en pivotant sous l'effet de son propre poids (schéma ci-contre). Déterminez **(a)** l'accélération angulaire de la tige à l'instant où elle fait un angle θ = 30° par rapport à l'horizontale et **(b)** le module de l'accélération tangentielle de la particule **P** située à l'extrémité libre de la tige.



Solutions

$\boxed{4.7.2}$ *Le temps pour faire un quart de tour.*

Inertie de la tige :

$$I_z = \frac{1}{12}ML^2 \quad \Rightarrow \quad I_z = \frac{1}{12}(5)(2)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_z = 1{,}667\,\text{kg m}^2}$$

Évaluer l'accélération angulaire :

$$\sum \tau = I_z \alpha \quad \Rightarrow \quad (10) = (1{,}667)\alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = 6\ \text{rad/s}^2}$$

Avec les équations de la cinématique :

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha\ t^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\pi}{2}\right) = (0) + (0)t + \frac{1}{2}(6)\ t^2$$

$$\Rightarrow \quad t^2 = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{t = 0{,}724\ \text{s}}$$

$\boxed{4.7.3}$ *Une accélération plus grande que l'accélération de chute libre.*

Évaluons l'inertie de la tige par rapport au pivot :

$$I_z = \frac{1}{3}ML^2 \quad \Rightarrow \quad I_z = \frac{1}{3}(2)(0{,}5)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_z = 0{,}1667\ \text{kg m}^2}$$

Évaluons le moment de force exercé par la force gravitationnelle par rapport au pivot lorsque la tige fait un angle $\theta = 30°$ par rapport à l'horizontale :

$$\tau_{mg} = \pm r F \sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad \tau_{mg} = +r(mg)\sin(\theta) \qquad (F = mg)$$

$$\Rightarrow \quad \tau_{mg} = (0{,}50/2)(2)(9{,}8)\sin(180° - 60°)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\tau_{mg} = 4{,}244\ \text{N m}}$$

Évaluons l'accélération angulaire α_z de la tige à 30° par rapport à l'horizontale :

$$\sum \tau_z = I_z \alpha_z \quad \Rightarrow \quad \tau_{mg} = I_z \alpha_z$$

$$\Rightarrow \quad (4{,}244) = (0{,}1667)\alpha_z$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\alpha_z = 25{,}46\ \text{rad/s}^2} \quad \textbf{(a)}$$

Évaluons l'accélération tangentielle au bout de la tige :

$$a_T = r\alpha \quad \Rightarrow \quad a_T = (0{,}50)(25{,}46) \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_T = 12{,}73\ \text{m/s}^2} \quad \textbf{(b)}$$