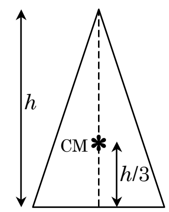
Chapitre 4.3 – Le centre de masse

La définition du centre de masse

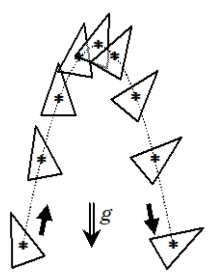
Le **centre de masse** CM d'un corps est un **point** de **référence imaginaire** situé à la **position moyenne** de la **masse** du corps.

Voici quelques caractéristiques du centre de masse :

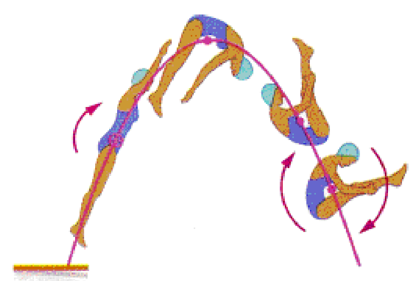


- Cette position n'est pas toujours au centre du corps.
- Le **centre de masse** d'un **corps homogène** (masse volumique constante) qui possède un **haut niveau de symétrie** est situé au **centre géométrique du corps** (ex : sphère, cube, tige)
- Le centre de masse n'est pas nécessairement situé sur le corps lui-même (ex : Boomerang).
- Lorsqu'un corps effectue un **mouvement libre** (aucun axe de rotation imposé[1] sur le corps), alors le **centre de masse** du corps effectue un **mouvement de translation** tandis que les **autres points** du corps effectuent une **rotation autour** du **centre de masse**.

<u>Exemple :</u> Translation du centre de masse et rotation autour du centre de masse



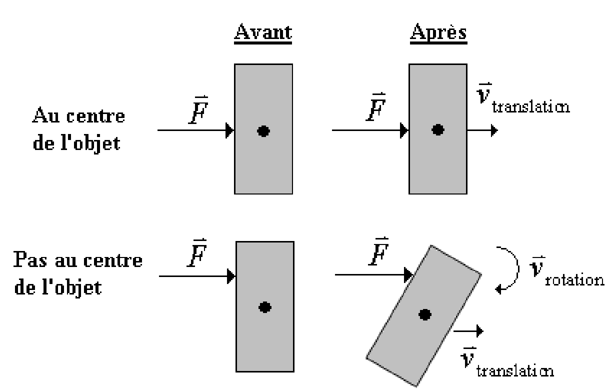
Un triangle homogène lancé dans la gravité.



Un plongeur effectue un saut avec de la rotation.

Le positionnement expérimental du centre de masse

Pour évaluer la position du centre de masse expérimentalement d'un corps, il suffit de pousser sur le corps à trois endroits différents et dans trois directions différentes sans que celui-ci n'effectue de rotation. L'intersection des trois droites formées à l'aide des points d'application des forces et l'orientation des forces localise le centre de masse.



[1] Exemple de corps ayant un axe de rotation imposé : porte et charnière.

Densité de masse

La densité de masse est une mesure de masse moyenne par unité de longueur L, de surface A ou de volume V. À partir d'une géométrie particulière, on peut évaluer la masse totale m d'un objet grâce aux équations suivantes :

	Densité de masse	Équation
Densité linéaire de masse :	$[\mu] = \mathrm{kg/m}$	$m = \mu L$
Densité surfacique de masse :	$[\sigma] = \mathrm{kg/m^2}$	$m = \sigma A$
Densité volumique de masse :	$[\rho] = \mathrm{kg/m^3}$	$m = \rho V$

où m : Masse du corps homogène (kg)
L : Longueur du corps (m)
A : Surface (aire) du corps ($\mathrm{m^2}$)
V : Volume du corps ($\mathrm{m^3}$)

La position moyenne

Pour évaluer la position du centre de masse, il faut évaluer la moyenne des positions des masses en utilisant la masse comme facteur de pondération. Plus il y a de masse à un endroit, plus le centre de masse sera près de cet endroit.

Exemple : $M_1 = 10\ \mathrm{kg}$ est située à la position $x_1 = 5\ \mathrm{m}$
$M_2 = 5\ \mathrm{kg}$ est située à la position $x_2 = 2\ \mathrm{m}$

Le centre de masse associé à la masse totale $M = M_1 + M_2$ sera plus près de $x = 5\ \mathrm{m}$, car la masse de M_1 est plus importante que la masse de M_2.

Afin de déterminer comment on peut évaluer une position pondérée par une masse, nous allons faire une analogie avec le calcul d'une moyenne générale dans un cours de physique.

Situation 1 : *La moyenne pondérée de deux examens.* Dans son cours de physique, Albert a obtenu la note de 80% au premier examen, qui vaut pour 15 points ; il a obtenu la note de 88% au deuxième examen, qui vaut 25 points. On désire déterminer sa moyenne pour le cours.

Nous avons : $P_1 = 15$ et $N_1 = 80\%$ puis $P_2 = 25$ et $N_2 = 88\%$

Ce qui nous donne la moyenne suivante :

$$\overline{N} = \frac{P_1 N_1 + P_2 N_2}{P_1 + P_2} \quad \Rightarrow \quad \overline{N} = \frac{(15)(80\%) + (25)(88\%)}{(15) + (25)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{N} = 85\%}$$

La position du centre de masse

Le centre de masse d'un corps est une position moyenne pondérée par la masse du corps et se calcul de la façon suivante :

Centre de masse en x	Centre de masse en y	Masse totale
$x_{CM} = \frac{1}{m_{tot}} \sum_{i=1}^{N} m_i x_i$	$y_{CM} = \frac{1}{m_{tot}} \sum_{i=1}^{N} m_i y_i$	$m_{tot} = \sum_{i=1}^{N} m_i$

où x_{CM} : Position du centre de masse selon l'axe x (m)

y_{CM} : Position du centre de masse selon l'axe y (m)

m_i : La masse de l'objet i (kg)

x_i : La position selon l'axe x de l'objet i (m)

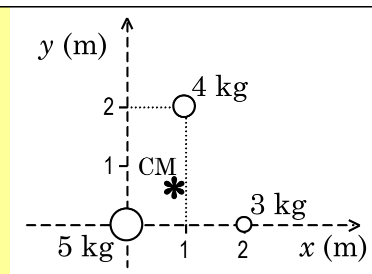
y_i : La position selon l'axe y de l'objet i (m)

N : Le nombre d'objet à considérer dans le calcul. ($i \in 1..N$)

m_{tot} : La masse totale de tous les objets (kg)

<u>Remarque :</u> x_i et y_i peuvent être également la position du centre de masse d'un corps complexe. Pour évaluer le centre de masse d'un **ensemble d'objets**, il est utile de **calculer le centre de masse de chaque objet individuellement** et de calculer à nouveau le centre de masse du système.

Situation 3 : *Le centre de masse d'un système de 3 particules.* Une particule de 5 kg est située à l'origine d'un système d'axe de coordonnée *xy*. Une particule de 4 kg est située à la position (x; y) = (1 m ; 2 m) et une particule de 3 kg est située à la position (x; y) = (2 m ; 0). On désire déterminer les coordonnées du centre de masse du système composé des 3 particules.



La masse du système : $m_{tot} = \sum_{i=1}^{3} m_i = (5) + (4) + (3) = 12 \text{ kg}$

Le CM selon x : $x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{3} m_i x_i}{m_{tot}} = \frac{(5)(0) + (4)(1) + (3)(2)}{(12)} = 0{,}8 \text{ m}$

Le CM selon y : $y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{3} m_i y_i}{m_{tot}} = \frac{(5)(0) + (4)(2) + (3)(0)}{(12)} = 0{,}667 \text{ m}$

Situation 4 : ***Le centre de masse d'une tige pliée en forme de triangle.*** Un fil de métal homogène et de section uniforme est plié afin de former un triangle représenté ci-contre. On désire déterminer les coordonnées du centre de masse du triangle.

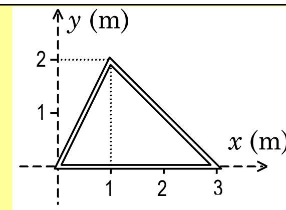
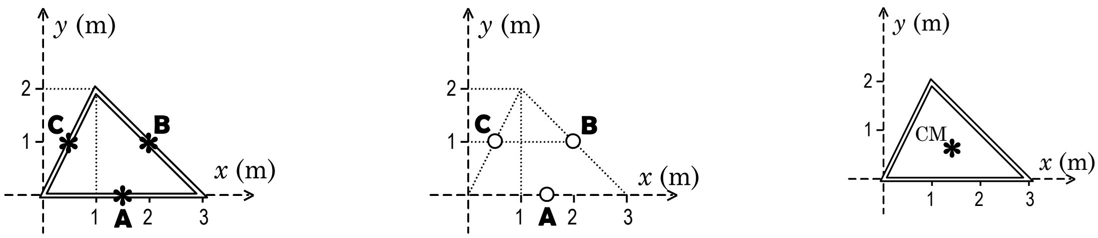


Schéma :



CM des tiges | Masses ponctuelles | Position CM finale

Pour trouver le centre de masse du triangle, nous pouvons découper ce triangle en trois tiges. Nous allons évaluer le centre de masse de chaque tige et les considérer comme des masses ponctuelles. Puisque les tiges sont homogènes, le centre de masse de chaque tige sera au centre géométrique de la tige :

<u>Tige A :</u> $L_A = 3\ \text{m}$ $\qquad x_{A\,CM} = 1{,}5\ \text{m}$

$m_A = \mu L_A = 3\mu$ $\qquad y_{A\,CM} = 0\ \text{m}$

<u>Tige B :</u> $L_B = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2{,}83\ \text{m}$ $\qquad x_{B\,CM} = 2\ \text{m}$

$m_B = \mu L_B = 2{,}83\mu$ $\qquad y_{B\,CM} = 1\ \text{m}$

<u>Tige C :</u> $L_C = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} = 2{,}24\ \text{m}$ $\qquad x_{C\,CM} = 0{,}5\ \text{m}$

$m_C = \mu L_C = 2{,}24\mu$ $\qquad y_{C\,CM} = 1\ \text{m}$

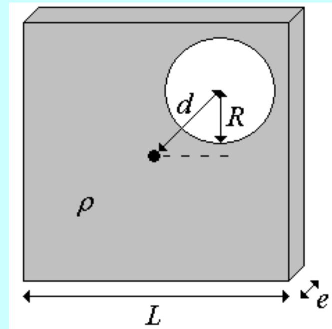
Nous pouvons évaluer le CM :

$$m_{tot} = \sum_{i=A,B,C} m_i = (3\mu) + (2{,}83\mu) + (2{,}24\mu) \quad \Rightarrow \quad \boxed{m_{tot} = 8{,}07\mu}$$

$$x_{CM} = \frac{\sum_{i=A,B,C} m_i x_i}{m_{tot}} = \frac{(3\mu)(1{,}5) + (2{,}83\mu)(2) + (2{,}24\mu)(0{,}5)}{(8{,}07\mu)} = \frac{11{,}3\mu}{8{,}07\mu} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{CM} = 1{,}4\ \text{m}}$$

$$y_{CM} = \frac{\sum_{i=A,B,C} m_i y_i}{m_{tot}} = \frac{(3\mu)(0) + (2{,}83\mu)(1) + (2{,}24\mu)(1)}{(8{,}07\mu)} = \frac{5{,}07\mu}{8{,}07\mu} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_{CM} = 0{,}628\ \text{m}}$$

Situation A : *La plaque d'aluminium trouée.* Une plaque carrée en aluminium (masse volumique $\rho = 2700\ \text{kg/m}^3$) est percée d'un cylindre de rayon $R = 0{,}6\ \text{m}$ à une distance d égale à 1 m du centre de la plaque à 45° par rapport à l'horizontale (voir schéma ci-contre). Évaluez le centre de masse (x_{CM} et y_{CM}) de la plaque par rapport au coin inférieur gauche de la plaque si celle-ci possède une largeur L égale à 4 m et une épaisseur e égale à 0,1 m.



Pour résoudre ce problème, on peut considérer la **masse d'un trou** comme étant une **masse négative**.

<u>Plaque sans trou :</u> (masse **positive**)

- $m_{\text{plaque sans trou}} = \rho L L e = \rho L^2 e = (2700)(4)^2(0{,}1)$ $\Rightarrow$ $m_{\text{plaque sans trou}} = 4320\ \text{kg}$
- $x_{\text{plaque sans trou CM}} = L/2 = (4)/2$ $\Rightarrow$ $x_{\text{plaque sans trou CM}} = 2\ \text{m}$
- $y_{\text{plaque sans trou CM}} = L/2 = (4)/2$ $\Rightarrow$ $y_{\text{plaque sans trou CM}} = 2\ \text{m}$

<u>Le trou de la plaque :</u> (masse **négative**)

- $m_{\text{trou}} = -\rho\pi R^2 e = -(2700)\pi(0{,}6)^2(0{,}1)$ $\Rightarrow$ $m_{\text{trou}} = -305{,}4\ \text{kg}$
- $x_{\text{trou CM}} = L/2 + d\cos(45°) = (4)/2 + (1)\cos 45°$ $\Rightarrow$ $x_{\text{trou CM}} = 2{,}71\ \text{m}$
- $y_{\text{trou CM}} = L/2 + d\sin(45°) = (4)/2 + (1)\sin 45°$ $\Rightarrow$ $y_{\text{trou CM}} = 2{,}71\ \text{m}$

<u>La plaque avec trou :</u>

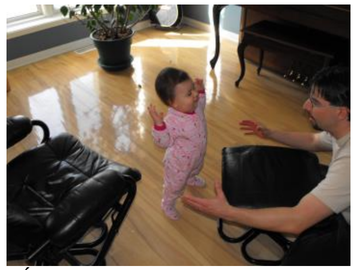
- $m_{\text{tot}} = m_{\text{plaque sans trou}} + m_{\text{trou}} = (4320) + (-305{,}4)$ $\Rightarrow$ $\boxed{m_{\text{tot}} = 4014{,}6\ \text{kg}}$
- $x_{\text{CM}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{m_{\text{tot}}} = \dfrac{(4320)(2) + (-305{,}4)(2{,}71)}{(4014{,}6)}$ $\Rightarrow$ $\boxed{x_{\text{CM}} = 1{,}946\ \text{m}}$
- $y_{\text{CM}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{m_{\text{tot}}} = \dfrac{(4320)(2) + (-305{,}4)(2{,}71)}{(4014{,}6)}$ $\Rightarrow$ $\boxed{y_{\text{CM}} = 1{,}946\ \text{m}}$

La stabilité et polygone de sustentation

Pour être en **équilibre statique**, il faut satisfaire $\sum \vec{F} = 0$ et $\sum \tau_z = 0$. Lorsqu'un corps repose sur une surface, ces deux conditions sont satisfaites lorsque le **centre de masse** du corps est situé au-dessus du **polygone de sustentation.**

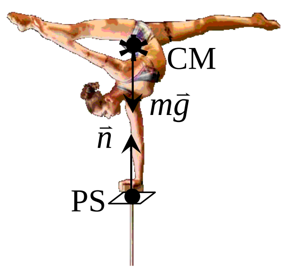
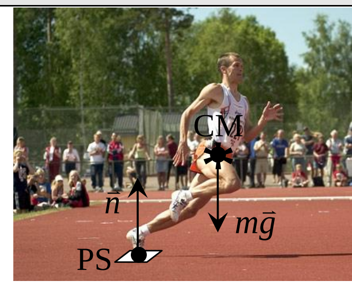
Le polygone de sustentation se construit en reliant tous les points du corps en contact avec la surface par un segment de droite.

Plus le polygone de sustentation est grand, plus il est facile de maintenir l'équilibre.


Élisabeth est en équilibre sur un petit polygone de sustentation.


Élisabeth augmente son polygone de sustentation à l'aide de son trotteur.

Voici un exemple de stabilité et d'instabilité :

Stable (PS exagéré)	Instable (PS exagéré)
 Pour demeurer en équilibre, la gymnaste doit positionner son centre de masse au-dessus de sa main afin que les moments de force associés à mg et n puissent s'annuler.	 Pour retrouver l'équilibre, le coureur devra déposer sa jambe droite pour agrandir son polygone de sustentation afin que son centre de masse soit au-dessus du polygone.

Le centre de masse par intégration

À partir de l'intégrale, nous pouvons évaluer la position du centre de masse x_{CM} et y_{CM} d'un corps à partir des expressions suivantes :

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{m_{\mathrm{tot}}} \int x \, \mathrm{d}m \qquad \text{et} \qquad y_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{m_{\mathrm{tot}}} \int y \, \mathrm{d}m$$

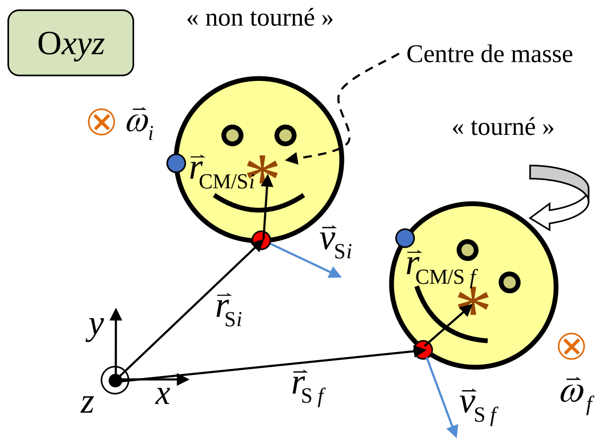
Situation B : *Un bâton de bois.*

En construction …


http://www.flickriver.com/groups/scienceofbaseball/pool/random/

La position et la vitesse du centre de masse d'un corps rigide à partir d'un point de référence S

Le positionnement d'un corps rigide se caractérise par la position de deux points : une position de référence $\vec{r}_S$ et la position du centre de masse $\vec{r}_{CM} = \left(r_{xCM}, r_{yCM}, r_{zCM}\right)$. L'objectif sera de décrire l'évolution dans le temps de la position de référence $\vec{r}_S$ et de décrire la rotation autour de ce point par une vitesse angulaire $\vec{\omega}$.



La position du centre de masse à partir de la position de ses particules	La position du centre de masse à partir de la position du corps rigide	La vitesse du centre de masse à partir de la vitesse de ses particules	La vitesse du centre de masse à partir de la vitesse du corps rigide
$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{m}\sum_{p=1}^{N} m_p \vec{r}_p$	$\vec{r}_{CM} = \vec{r}_S + \vec{r}_{CM/S}$	$\vec{v}_{CM} = \frac{1}{m}\sum_{p=1}^{N} m_p \vec{v}_p$	$\vec{v}_{CM} = \vec{v}_S + \vec{\omega} \times r_{CM/S}$

<u>Preuve :</u>

$$\vec{r}_{CM/S} = \vec{r}_{CM} - \vec{r}_S \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_{CM/S} = \left(\frac{1}{m}\sum_{p=1}^{N} m_p \vec{r}_p\right) - \vec{r}_S$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}_{CM/S} = \frac{1}{m}\sum_{p=1}^{N} m_p \vec{r}_p - \frac{1}{m} m \vec{r}_S$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}_{CM/S} = \frac{1}{m}\sum_{p=1}^{N} m_p \vec{r}_p - \frac{1}{m}\left(\sum_{p=1}^{N} m_p\right)\vec{r}_S$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}_{CM/S} = \frac{1}{m}\sum_{p=1}^{N} m_p \vec{r}_p - \frac{1}{m}\sum_{p=1}^{N} m_p \vec{r}_S$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}_{CM/S} = \frac{1}{m}\sum_{p=1}^{N} m_p \left(\vec{r}_p - r_S\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}_{CM/S} = \frac{1}{m}\sum_{p=1}^{N} m_p \vec{r}_{p/S} \quad \blacksquare$$