Chapitre 4.2 – Le moment de force et l'équilibre statique

Équilibre statique

Un corps est en **équilibre statique** lorsqu'il est maintenu complètement immobile par l'ensemble des forces qui agissent sur lui.

Pour qu'un corps soit en équilibre statique, il faut :

1) Vitesse de translation nulle ($\vec{v} = 0$).
2) Accélération de translation nulle ($\vec{a} = 0$).
3) Vitesse angulaire nulle ($\vec{\omega} = 0$)
4) Accélération angulaire nulle ($\vec{\alpha} = 0$).

Le Golden Gate de San Francisco est en équilibre statique.

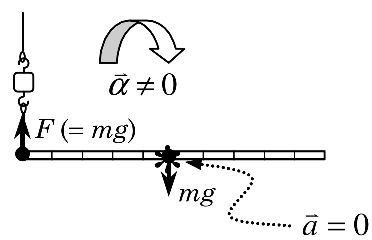
Pour maintenir un équilibre statique, nous pouvons affirmer que $\vec{v} = 0$ et $\vec{\omega} = 0$ sont satisfaites lorsque le corps est initialement immobile. Pour satisfaire $\vec{a} = 0$, il suffit d'appliquer la 1re loi de Newton ($\sum \vec{F} = 0$) afin d'obtenir

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = 0 \quad .$$

Rappelons que pour appliquer la 1re loi de Newton, l'endroit où les forces sont appliquées n'a pas d'importance.

Pour satisfaire $\vec{\alpha} = 0$, les endroits où les forces sont appliquées sur le corps prendront de l'importance.

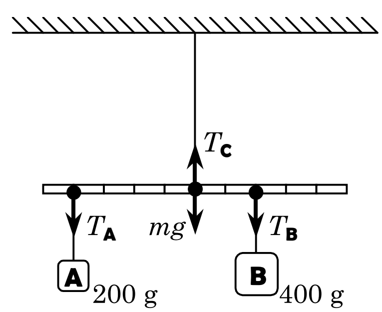
La situation ci-contre (voir schéma ci-contre) illustre qu'il est impossible de maintenir en équilibre une règle si l'on applique une force F à l'extrémité de celle-ci.



Dans cette exemple, $\sum F_x = 0$ et $\sum F_y = 0$, mais la règle tourne autour de son centre de masse dans le sens horaire.

Pour avoir un équilibre statique, il faut appliquer des forces à des endroits très précis sur le corps.

La situation ci-contre (voir le schéma ci-contre) illustre une situation où l'équilibre statique ($\vec{a} = 0$ et $\vec{\alpha} = 0$) est satisfait.



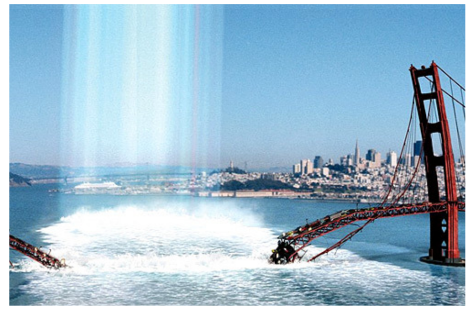
Dans cette exemple, $\sum F_x = 0$ et $\sum F_y = 0$, et la règle ne tourne pas.

Briser l'équilibre statique

Pour mesurer l'efficacité d'une force à modifier l'état de rotation d'un corps autour d'un axe de rotation, nous allons faire intervenir le concept de **moment de force** :

$$\boxed{\tau \;\equiv\; \text{moment de force}}$$

Le moment de force dépend de (1) l'endroit où la force est appliquée, (2) le module de la force et de (3) l'orientation de la force.

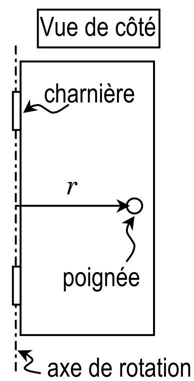


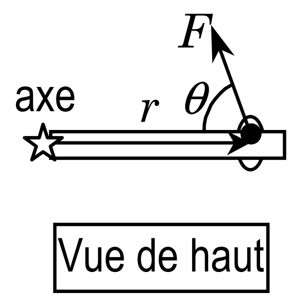
Le Golden Gate de San Francisco détruit dans le film *X-Men*.

Question sur la disposition d'une porte :

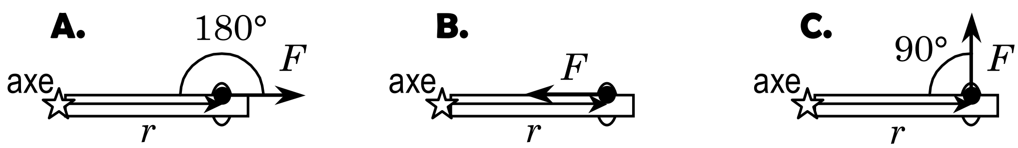
1) Pourquoi mettre une poignée de porte à l'extrémité des charnières?

2) Pourquoi tirer la poignée perpendiculairement à la porte?





Nous pouvons tirer sur la poignée de trois façons différentes :



Nous avons ici trois mesures :

- F : Module de la force qui effectue le moment de force.
- r : Distance entre l'axe de rotation et le point d'application de la force.
- θ : Angle entre r et F.

Conclusion :

1) Plus la poignée est loin de la charnière, plus la force est efficace à ouvrir la porte :

$$\tau \propto r$$

2) Seule la situation C est efficace. Plus la force appliquée F est perpendiculaire à r, plus la force est efficace à ouvrir la porte :

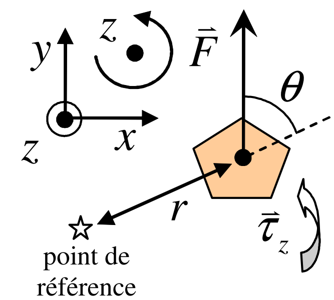
$$\tau \propto \sin(\theta)$$

Moment de force selon l'axe z

Le moment de force τ_z mesure l'efficacité d'une force F à modifier l'état de rotation d'un corps dans le plan xy autour d'un point de référence. Le module du moment de force τ_z est égal à la distance r dans le plan xy entre le point de référence et l'endroit où est appliquée la force F multiplié par le module de la force F projeté dans le plan xy et multiplié par le sinus de l'angle θ entre r et F dans le plan xy.

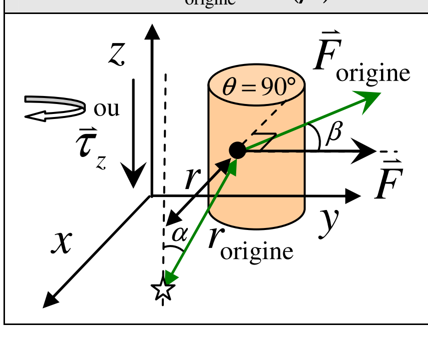
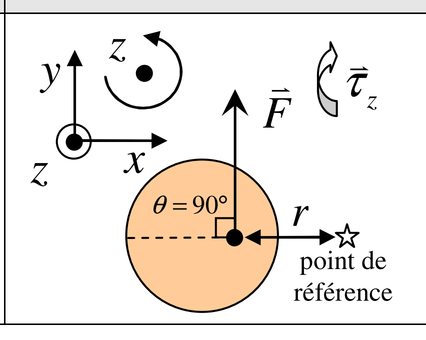
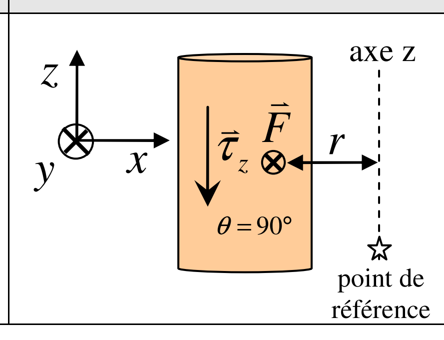
Lorsque toutes les mesures sont définies dans le plan xy, le moment de force τ_z est égal au produit de la distance r avec le module de la force F et le sinus de l'angle θ entre r et F :

$$\tau_z = \pm r\,F\sin(\theta)$$



où
- τ_z : Moment de force selon l'axe z ($\text{N}\cdot\text{m}$)
- r : Distance dans le plan xy entre le point de référence et l'endroit où est appliquée la force (m)
- F : Force qui effectue le moment de force projetée dans le plan xy (N)
- θ : Angle dans le plan xy entre r et F
- $\pm$: Sens de la rotation selon l'axe z que produirait le moment de force sur le corps

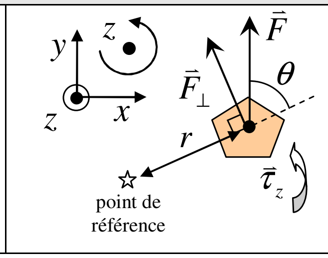
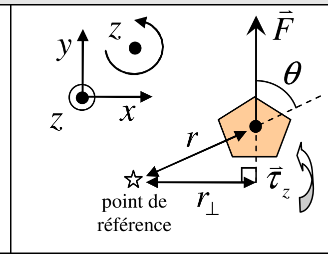
Puisque l'expression τ_z permet uniquement de mesure l'efficacité d'une force $\vec{F}$ à faire tourner un corps autour de l'axe z, il est important de mesure r dans le plan xy. Cette mesure correspond également à la distance entre l'axe de rotation z passant par le point de référence et l'endroit où est appliquée la force $\vec{F}$. De plus, il faut également prendre uniquement la composante dans le plan xy de la force $\vec{F}$ pour mesurer l'efficacité du moment de force à tourner autour de l'axe z :

Vue en perspective : $r = r_{\text{origine}}\sin(\alpha)$ $F = F_{\text{origine}}\cos(\beta)$	Vue de haut (plan xy)	Vue de côté (plan xz)
		

N.B. Puisque dans cette section, toutes les forces qui appliqueront un moment de force pertinent à la rédaction d'une solution sont uniquement appliquées dans le plan xy, la rigueur de la définition générale du moment de force selon l'axe z ne fera pas partie de notre étude.

Force perpendiculaire et bras de levier

Puisque c'est uniquement les composants perpendiculaires entre r et F qui sont multipliés dans le calcul du moment de force, le moment de force peut être évalué par la projection perpendiculaire de la force $F_{\perp}$ ou par le bras de levier $r_{\perp}$:

Force perpendiculaire : $F_{\perp} = F\sin(\theta)$		Bras de levier : $r_{\perp} = r\sin(\theta)$	
$\tau_z = \pm r\, F_{\perp}$		$\tau_z = \pm r_{\perp}\, F$	

Les équations de l'équilibre statique

Pour satisfaire l'équilibre statique, il faut que :

1) $\sum \vec{F} = 0$
2) $\sum \tau_z = 0 \;\; \forall$ point de référence (accepter sans preuve)

Pour résoudre un problème d'équilibre statique, il faut :

1) Identifier l'objet sur lequel les forces sont appliquées.
2) Identifier toutes les forces appliquées.
3) Identifier les positions où sont appliquées les forces.
4) Poser l'équation $\sum \vec{F} = 0$.
5) Poser l'équation $\sum \tau_z = 0$ **<u>pour un point</u>** de référence en particulier. Au besoin, poser l'équation pour un autre point de référence s'il manque des équations pour résoudre le système.
6) Résoudre le système d'équation et répondre à la question.

Choisir le point de référence en statique de rotation

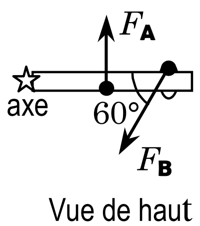
Pour résoudre un problème **d'équilibre statique**, le **choix** du **point de référence** n'a **<u>pas d'importance</u>**, car la deuxième loi de Newton en rotation se doit d'être égale à zéro ($\sum \tau_z = 0$) pour tous les points de référence. Un choix astucieux permettra alors d'accélérer la rédaction d'une solution.

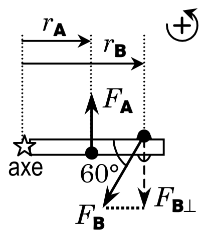
Pour sauver du calcul, identifiez les forces que vous ne pouvez pas évaluer directement grâce à la 2$^{\text{ième}}$ loi de Newton et choisissez le point de référence à l'endroit où ces forces sont appliquées. Les moments de force associés à ces forces seront égaux à zéro, car $r = 0$:

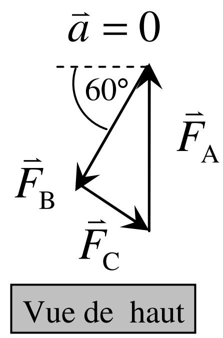
$$\text{Puisque } \tau_z = \pm r\,F\sin(\theta),\ \text{alors} \quad r = 0 \;\Rightarrow\; \tau_z = 0$$

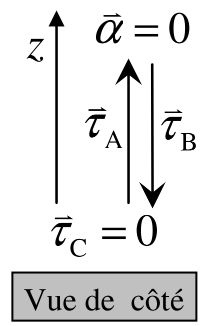
Situation 1 : *Ouvre la porte*! Béatrice essaie d'ouvrir la porte de la chambre d'Albert en poussant sur la poignée avec une force horizontale $F_{\mathrm{B}} = 30 \text{ N}$ faisant un angle de 60^{o} avec le plan de la porte. De l'autre côté de la porte, Albert empêche la porte de bouger en poussant horizontalement en plein centre de la porte avec une force F_{A} perpendiculaire au plan de la porte. La porte mesure 90 cm de largeur et la poignée est à 75 cm des charnières. On désire calculer F_{A} .

Voici le schéma de la situation : (moment de force par rapport à la charnière)









Identifions l'objet en équilibre statique :

La porte

Identifions nos forces et l'endroit où ces forces sont appliquées :

- $\vec{F}_{\mathrm{A}}$: la force d'Albert à $r_{\mathrm{A}} = 0{,}45$ m de la charnière.
- $\vec{F}_{\mathrm{B}}$: la force de Béatrice à $r_{\mathrm{B}} = 0{,}75$ m de la charnière.
- $\vec{F}_{\mathrm{C}}$: la force de la charnière à $r_{\mathrm{C}} = 0$ m de la charnière.

Appliquons la 2e loi de Newton à la situation :

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{\mathrm{A}} + \vec{F}_{\mathrm{B}} + \vec{F}_{\mathrm{C}} = 0$$

Selon l'axe x, nous avons :

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -F_{\mathrm{B}} \cos(60°) + F_{x\mathrm{C}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad -(30)\cos(60°) + F_{x\mathrm{C}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{F_{x\mathrm{C}} = 15 \text{ N}}$$

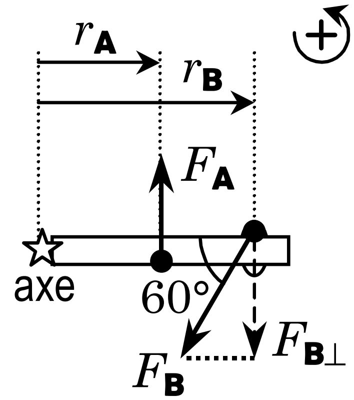
Selon l'axe y, nous avons :

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -F_{\mathrm{B}} \sin(60°) + F_{\mathrm{A}} + F_{y\mathrm{C}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad -(30)\sin(60°) + F_{\mathrm{A}} + F_{y\mathrm{C}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{F_{\mathrm{A}} + F_{y\mathrm{C}} = 25{,}98 \text{ N}}$$

Évaluons nos moments de force selon l'axe z : (positif dans le sens anti-horaire)



$$\tau_A = \pm r_A F_A \sin(\theta_A) \quad \Rightarrow \quad \tau_A = +(0{,}45)F_A \sin(90°)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\tau_A = 0{,}45F_A}$$

$$\tau_B = \pm r_B F_B \sin(\theta_B) \quad \Rightarrow \quad \tau_B = -(0{,}75)(30)\sin(180° - 60°)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\tau_B = -19{,}49 \ \text{N}\cdot\text{m}}$$

$$\tau_C = \pm r_C F_C \sin(\theta_C) \quad \Rightarrow \quad \tau_C = \pm(0)F_C \sin(\theta_C)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\tau_C = 0 \ \text{N}\cdot\text{m}}$$

Évaluons la somme des moments de force ($\sum \tau_z$) afin de satisfaire l'équilibre statique :

$$\sum \tau_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_A + \tau_B + \tau_C = 0$$

$$\Rightarrow \quad (0{,}45F_A) + (-19{,}49) + (0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 0{,}45F_A = 19{,}49$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{F_A = 43{,}3 \ \text{N}}$$

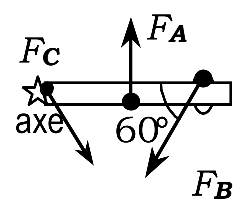
On peut même maintenant évaluer la force exercée par les charnières sur la porte :

<u>En x :</u> $\boxed{F_{xC} = 15 \ \text{N}}$

<u>En y :</u> $F_A + F_{yC} = 25{,}98 \quad \Rightarrow \quad F_{yC} = 25{,}98 - F_A$

$$\Rightarrow \quad F_{yC} = 25{,}98 - (43{,}3)$$

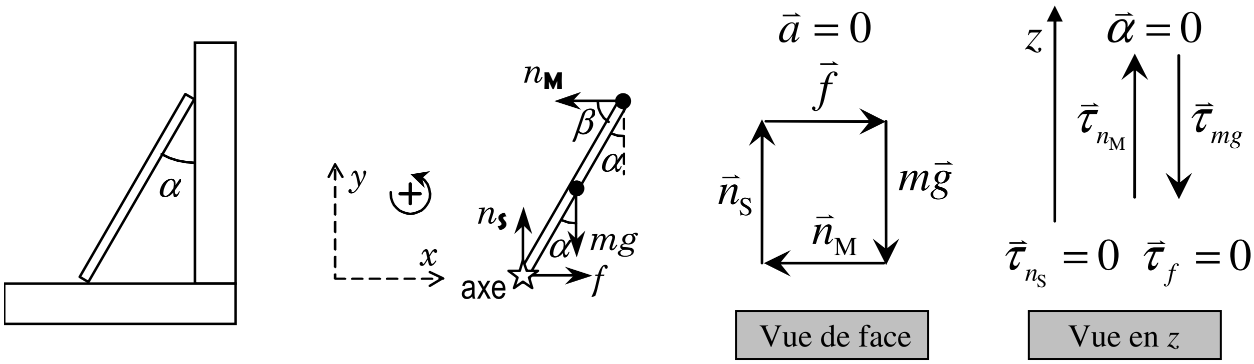
$$\Rightarrow \quad \boxed{F_{yC} = -17{,}32 \ \text{N}}$$



Vue de haut

Situation 5 : *Une règle appuyée contre un mur*. Une règle de longueur L et de masse m est appuyée contre un mur. Le frottement entre le mur et la règle est négligeable; en revanche, il y a un coefficient de frottement statique μ_s entre le sol et la règle. On désire déterminer l'angle α maximal que peut faire la règle par rapport à la verticale pour demeurer en équilibre.

Voici le schéma de la situation : (moment de force par rapport au contact au sol)



Identifions l'objet en équilibre statique :

La règle

Identifions nos forces et l'endroit où ces forces sont appliquées :

- $\vec{n}_S$: Normale au sol à $r_{n_S} = 0$ du point de contact au sol.
- $\vec{f}$: Frottement statique au sol à $r_f = 0$ du point de contact au sol.
- $m\vec{g}$: Poids à $r_{mg} = L/2$ du point de contact au sol.
- $\vec{n}_M$: Normale au mur à $r_{n_M} = L$ du point de contact au sol.

Appliquons la 2ième loi de Newton à la situation :

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_S + \vec{f} + m\vec{g} + \vec{n}_M = 0$$

<u>En *x* :</u> ($f = \mu_s n$, frottement statique max.)

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad f - n_M = 0$$

$$\Rightarrow \quad (\mu_s n_S) - n_M = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mu_s n_S = n_M}$$

<u>En y :</u>

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad n_S - mg = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{n_S = mg}$$

Nous pouvons remplacer la normale n_S dans l'équation en x et obtenir la relation suivante :

$$\mu_s n_S = n_M \quad \Rightarrow \quad \mu_s (mg) = n_M$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{n_M = \mu_s mg}$$

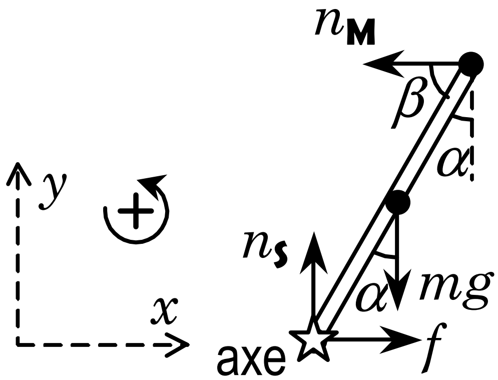
Évaluons nos moments de force selon l'axe z : (positif dans le sens anti-horaire)

$$\tau_{n_S} = \pm r_{n_S} n_S \sin\theta \quad \Rightarrow \quad \tau_{n_S} = \pm(0) n_S \sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\tau_{n_S} = 0}$$

$$\tau_f = \pm r_f f \sin\theta \quad \Rightarrow \quad \tau_f = \pm(0) f \sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\tau_f = 0}$$



$$\tau_{mg} = \pm r_{mg} mg \sin\theta \quad \Rightarrow \quad \tau_{mg} = -(L/2) mg \sin(180-\alpha)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\tau_{mg} = -\frac{1}{2} mgL \sin(\alpha)}$$

$$\tau_{n_M} = \pm r_{n_M} n_M \sin\theta \quad \Rightarrow \quad \tau_{n_M} = +(L)(\mu_s mg)\sin(180-\beta)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\tau_{n_M} = \mu_s mgL \sin(\beta)}$$

Évaluons la somme des moments de force ($\sum \tau_z$) afin de satisfaire l'équilibre statique :

$$\sum \tau_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{n_S} + \tau_f + \tau_{mg} + \tau_{n_M} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (0) + (0) + \left(-\frac{1}{2} mgL \sin(\alpha)\right) + \left(\mu_s mgL \sin(\beta)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} mgL \sin(\alpha) = \mu_s mgL \sin(\beta)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \sin(\alpha) = \mu_s \sin(\beta)$$ (Simplifier par mgL)

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \sin(\alpha) = \mu_s \sin(90° - \alpha)$$ (Remplacer $\beta = 90° - \alpha$)

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \sin(\alpha) = \mu_s \cos(\alpha)$$ ($\sin(90° - \alpha) = \cos(\alpha)$)

$$\Rightarrow \quad \tan(\alpha) = 2\mu_s$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\alpha = \tan^{-1}(2\mu_s)}$$

Conclusion : L'angle dépend seulement du coefficient de frottement statique.

Le produit vectoriel

En algèbre vectorielle euclidienne dans un plan cartésien *xyz* en trois dimensions, on définit le produit vectoriel de la façon suivante :

$$\vec{A}\times\vec{B} = \left\|\vec{A}\right\|\left\|\vec{B}\right\|\sin(\theta)\hat{n}$$
$$= \left(A_yB_z - A_zB_y\right)\vec{i} - \left(A_xB_z - A_zB_x\right)\vec{j} + \left(A_xB_y - A_yB_x\right)\vec{k}$$

où $\vec{A}\times\vec{B}$: Produit vectoriel entre $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

$\left|\vec{A}\right|$: Module du vecteur $\vec{A}$

$\left|\vec{B}\right|$: Module du vecteur $\vec{B}$

θ : Angle entre le vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

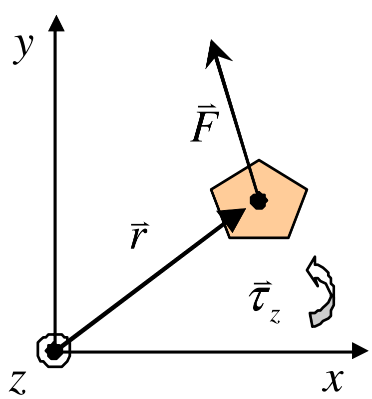
$\hat{n}$: Vecteur unitaire orientation

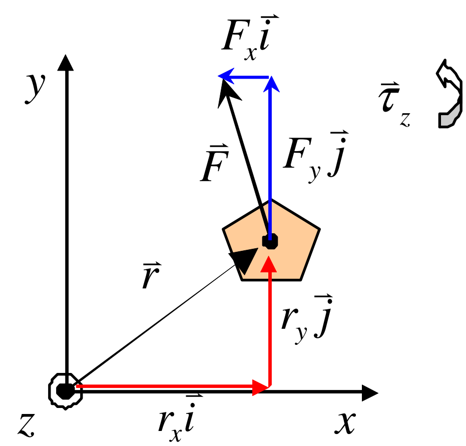
et $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$

$\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$

Le moment de force selon l'axe *z* en calcul vectoriel (complément informatique)

En construction …





Le moment de force

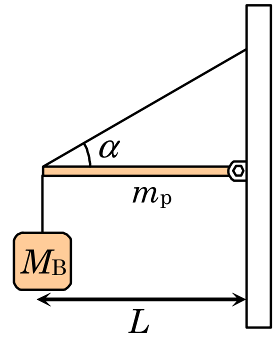
$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F} = \left(r_yF_z - r_zF_y\right)\vec{i} - \left(r_xF_z - r_zF_x\right)\vec{j} + \left(r_xF_y - r_yF_x\right)\vec{k}$$

Le moment de force selon l'axe *z*

$$\tau_z = r_xF_y - r_yF_x$$

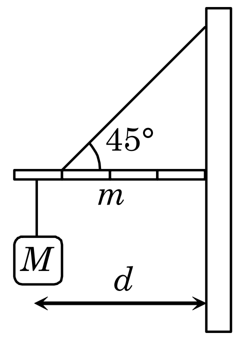
Exercices

4.2.4 ***Une poutre retenue par une charnière.*** L'extrémité droite d'une poutre horizontale de masse m_p et de longueur L est fixée à un mur par une charnière (schéma ci-contre). L'extrémité gauche est retenue par une corde faisant un angle α avec l'horizontale. À l'extrémité gauche, on suspend un bloc de masse M_B.



Déterminez **(a)** le module de la tension dans la corde inclinée (expression algébrique); **(b)** Si L = 2 m, m_p = 5 kg, M_B = 10 kg et α = 30°, déterminez le module et l'orientation de la force exercée par la charnière sur la poutre.

4.2.10 ***Une poutre appuyée contre un mur sans frottement, prise 2.*** L'extrémité droite d'une poutre horizontale de 10 kg dont la longueur vaut 4 m est appuyée contre un mur sans frottement : *il n'y a pas de charnière* (schéma ci-contre). Une corde faisant un angle de 45° avec la verticale soutient la poutre : son point d'attache sur la poutre est à 3 m du mur.



(a) À quelle distance d du mur doit-on accrocher un bloc de masse M = 20 kg pour que la poutre demeure en équilibre? **(b)** Si on accroche un bloc de masse M à l'extrémité gauche de la poutre (à 4 m du mur), pour quelle valeur de M la poutre demeure-t-elle en équilibre?

Solutions

4.2.4 ***Une poutre retenue par une charnière.***

a) Objet considéré : m (la tige)

Forces appliquées : $M\vec{g}$ (par la corde), $m\vec{g}$, $\vec{T}$, $\vec{F}$ (Charnière)

Position de référence : La charnière

1) $\sum \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad M\vec{g} + m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F} = 0$

Selon x :

$T\cos(\alpha) + F_x = 0$ (1)

Selon y :

$-Mg - mg + T\sin(\alpha) + F_y = 0$ (2)

2) $\sum \vec{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\tau}_M + \vec{\tau}_m + \vec{\tau}_T + \vec{\tau}_F = 0$

Selon z : (positif sens horaire)

- $\tau_M = -r_M Mg\sin(90°) = -(L)Mg \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau_M = -MgL}$
- $\tau_m = -r_m mg\sin(90°) = -(L/2)mg \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau_m = -\dfrac{mgL}{2}}$
- $\tau_T = +r_T T\sin(180-\alpha) = (L)T\sin(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau_T = TL\sin(\alpha)}$
- $\tau_F = \pm r_F F\sin(\theta) = \pm(0)F\sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau_F = 0}$

$$\sum \tau = -MgL - \frac{mgL}{2} + TL\sin(\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad -Mg - \frac{mg}{2} + T\sin(\alpha) = 0 \quad \text{(simplifier } L\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad T\sin(\alpha) = +Mg + \frac{mg}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T = \left(M + \frac{m}{2}\right)\frac{g}{\sin(\alpha)}} \qquad (3)$$

b) Évaluons notre tension avec les données mentionnées :

$$T = \left(M + \frac{m}{2}\right)\frac{g}{\sin(\alpha)} \quad \Rightarrow \quad T = \left((10) + \frac{(5)}{2}\right)\frac{(9{,}8)}{\sin(30°)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T = 245 \text{ N}}$$

Avec l'équation (1), on peut évaluer la force de la charnière selon x :

$$T\cos(\alpha) + F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F_x = -T\cos(\alpha)$$

$$\Rightarrow \quad F_x = -(245)\cos(30°)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{F_x = -212{,}2 \text{ N}}$$ (force vers la gauche)

Avec l'équation (2), on peut évaluer la force de la charnière selon y :

$$-Mg - mg + T\sin(\alpha) + F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad F_y = Mg + mg - T\sin(\alpha)$$

$$\Rightarrow \quad F_y = (M + m)g - T\sin(\alpha)$$

$$\Rightarrow \quad F_y = [(10) + (5)](9{,}8) - (245)\sin(30°)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{F_y = 24{,}5 \text{ N}}$$ (force vers le haut)

Nous pouvons évaluer le module de la force appliquée par la charnière et son orientation :

$$F = \sqrt{F_x^{\,2} + F_y^{\,2}} = \sqrt{(-212{,}2)^2 + (24{,}5)^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = 213{,}6 \text{ N}}$$ (réponse)

$$\tan(\theta) = \frac{F_y}{F_x} = \frac{(24{,}5)}{(212{,}2)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta = 6{,}58°}$$

(vers le haut par rapport à la gauche)

$\boxed{4.2.10}$ ***Une poutre appuyée contre un mur sans frottement, prise 2.***

a) Objet considéré : m (la tige)

Forces appliquées : $M\vec{g}$, $m\vec{g}$, $\vec{T}$, $\vec{n}$ (le mur)

Position de référence : endroit où la tension est appliquée

$$\sum \vec{\tau} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{\tau}_M + \vec{\tau}_m + \vec{\tau}_T + \vec{\tau}_n = 0$$

Selon z : (positif sens anti-horaire)

- $\tau_M = +r_M Mg\sin(90°) = (x)Mg = Mgx$
- $\tau_T = \pm r_T T\sin(\theta) = \pm(0)T\sin(\theta) = 0$
- $\tau_m = +r_m mg\sin(90°) = (L/4)mg = \dfrac{mgL}{4}$
- $\tau_n = \pm r_n n\sin(180°) = \pm\left(\dfrac{3L}{4}\right)n(0) = 0$

Ainsi :

$$\sum \tau = Mgx - \frac{mgL}{4} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad Mgx = \frac{mgL}{4}$$

$$\Rightarrow \qquad Mx = \frac{mL}{4}$$

$$\Rightarrow \qquad x = \frac{mL}{4M} = \frac{(10)(4)}{4(20)} \qquad \Rightarrow \qquad x = 0{,}5 \text{ m}$$

Nous avons pour mesure : $d = \dfrac{3L}{4} + x = \dfrac{3(4)}{4} + (0{,}5) \qquad \Rightarrow \qquad d = 3{,}5 \text{ m}$

b) Si l'on accroche la masse M à l'extrémité, nous avons cette équation à satisfaire pour avoir l'équilibre statique :

$$\sum \tau = Mg\frac{L}{4} - mg\frac{L}{4} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad M = m = 10 \text{ kg}$$