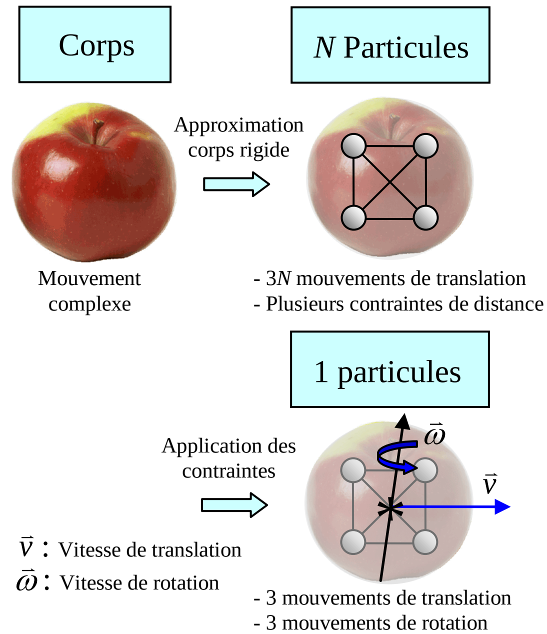
Chapitre 4.1 – La cinétique de rotation

Le corps rigide

Un corps rigide est un système de N particules dont la distance entre chaque paire de particules doit être maintenue constante grâce à des forces internes. Les contraintes de distance ont pour effet de réduire les $3N$ possibilités de translation des N particules (chaque particule ayant 3 degrés de liberté de translation).



La dynamique du corps rigide approxime un corps comme étant une particule pouvant effectuer des translations et des rotations autour d'un axe.

Lorsque le corps rigide est libre de mouvement, les mouvements des N particules est réduit par les contraintes au mouvement **d'une seule particule.** Cette particule ayant toute la masse du corps peut effectuer une **translation** et une **rotation** autour d'un axe.

L'état de **translation du corps** est évalué en appliquant la **2e loi de Newton** en supposant que toutes les forces appliquées sur le corps sont appliquées sur la particule et l'état de **rotation du corps** est évalué en appliquant la **2e loi de Newton en rotation**[1] par rapport à la particule.

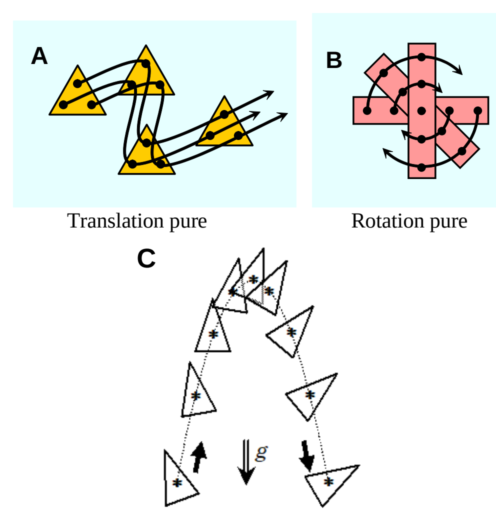
La dynamique du corps rigide ne permet pas d'évaluer la vibration du corps.

La cinématique de translation et de rotation

La **cinématique de translation** s'applique lorsque tous les éléments d'un corps effectuent le **même déplacement** (voir schéma A) comme par exemple un bloc qui glisse sur un plan incliné.

La **cinématique de rotation** s'applique lorsque tous les éléments d'un corps tournent autour d'un même point de référence et effectuent la **même rotation angulaire** (voir schéma **B**) comme par exemple un tourne-disque en rotation.

La **cinématique de translation et de rotation** s'applique lorsqu'un point du corps effectue une translation et que l'ensemble du corps effectue une rotation autour du point en translation (voir schéma **C**) comme par exemple lancer une balle de baseball.



Translation pure

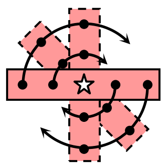
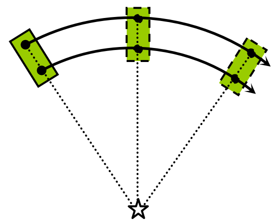
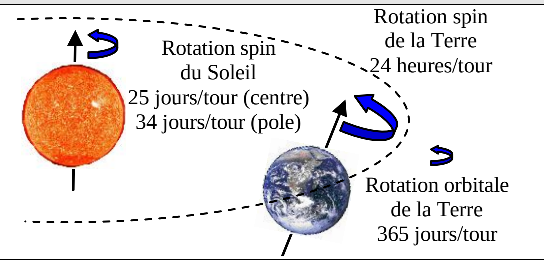
Rotation pure

Translation et rotation

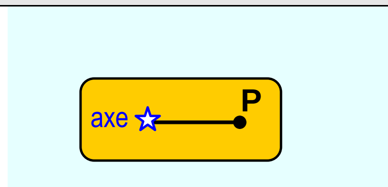
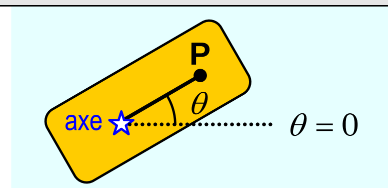
[1] La 2e loi de Newton en rotation sera présentée dans le chapitre 4.7.

Axe de rotation et position angulaire

Lorsqu'on fait tourner un corps rigide autour d'un axe de rotation, les points situés sur le corps ne vont pas tous effectuer le même déplacement :

Rotation du corps autour d'un point fixe sur corps (rotation spin)	Rotation du corps autour d'un point fixe à l'extérieur du corps (rotation orbitale)	Rotation spin et rotation orbitale avec deux vitesse angulaire différente (rotation spin-orbitale)
		

Puisque tous **points** de l'objet effectuent des **trajectoires circulaires**, on réalise que sous une rotation simple (spin ou orbitale) autour d'un axe, tous les points subissent la même **variation de position angulaire** $\Delta\theta$ que l'on mesure à l'aide d'un **système d'axe angulaire** :

Position angulaire initiale : $\theta = 0°$	Position angulaire finale : $\theta = 30°$
	

Position, vitesse et accélération angulaire

À partir d'un système d'axe angulaire, on peut associer à un corps une position, une vitesse et une accélération qui porte le nom de position angle θ, de vitesse angulaire ω et accélération angulaire α .

Tous ces paramètres sont reliés par le calcul différentiel de la façon suivante :

Relation	Position angulaire	Vitesse angulaire	Accélération angulaire
Différentielle (pente)	$\theta(t) = \theta$	$\omega(t) = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$	$\alpha(t) = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$
Intégrale (aire)	$\theta(t) = \int \omega(t)\,\mathrm{d}t$	$\omega(t) = \int \alpha(t)\,\mathrm{d}t$	$\alpha(t) = \alpha$

où θ : Position angulaire (rad)

ω : Vitesse angulaire (rad/s)

α : Accélération angulaire (rad/s^2)

N.B. On peut utiliser un indice *x*,*y* ou *z* aux paramètres θ, ω et α pour désigner autour de quel axe le corps rigide tourne (ex : θ_z, ω_z et α_z).

Le mouvement de rotation uniformément accéléré

Lorsqu'un objet subit une accélération angulaire α constante lors d'une rotation, l'objet effectue un mouvement de rotation uniformément accéléré (RUA). Les équations du mouvement sont alors identiques à celles d'un objet uniformément accéléré (MUA) :

Mouvement rectiligne MUA : Mouvement uniformément accéléré	Mouvement rotatif RUA : Rotation uniformément accéléré
○ $a_x(t) = a_x$ ○ $v_x(t) = v_{x0} + a_x\, t$ ○ $x(t) = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$ ○ $v_x^{\,2}(x) = v_{x0}^{\,2} + 2a_x(x - x_0)$	○ $\alpha(t) = \alpha$ ○ $\omega(t) = \omega_0 + \alpha\, t$ ○ $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha\, t^2$ ○ $\omega^2(\theta) = \omega_0^{\,2} + 2\alpha(\theta - \theta_0)$

Preuve :

La preuve est identique à la démonstration des équations du MUA en appliquant la correspondance suivante :

$$x \to \theta \qquad v_x \to \omega \qquad a_x \to \alpha$$

Situation 1 : ***Un disque tourne en ralentissant.*** Un disque tourne sur lui-même avec une vitesse angulaire initiale de 20 rad/s. En raison du frottement, son mouvement de rotation ralentit au taux constant de 4 rad/s^2. On désire déterminer combien de tours il effectue avant de l'arrêter.

Voici les données de base :

$$\omega_0 = 20 \text{ rad/s} \qquad \theta_0 = 0 \qquad \alpha = -4 \text{ rad/s}^2$$
$$\omega = 0 \qquad \theta = ? \qquad t = ?$$

En utilisant la formule $\omega^2(\theta)$ pour un RUA, on peut évaluer la position finale angulaire du disque :

$$\omega^2 = \omega_0^{\,2} + 2\alpha(\theta - \theta_0) \quad \Rightarrow \quad (0)^2 = (20)^2 + 2(-4)(\theta - (0))$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{\theta = 50 \text{ rad}}$$

Avec la relation suivante, on peut évaluer le nombre de tour : ($2\pi = 1$ tour)

$$\frac{50 \text{ rad}}{2\pi \text{ rad}} = \frac{n \text{ tours}}{1 \text{ tours}} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{50}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{n = 7{,}96 \text{ tours}}$$

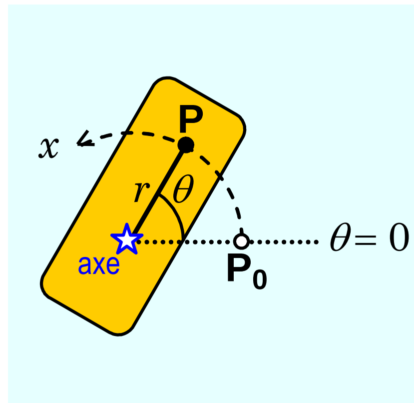
Les relations entre les variables linéaires et angulaires

Un arc de cercle L est relié au rayon r d'un cercle et à un angle d'ouverture θ de la façon suivante :

$$L = r\theta \qquad \Leftrightarrow \qquad Circonférence = 2\pi r$$

À partir de cette relation, nous pouvons associé la cinématique de translation selon un axe x circulaire avec la cinématique de rotation selon un axe θ de la façon suivante en imposant la contrainte $x = \theta = 0$ à l'origine :

- $x = r\theta$
- $v_x = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d}{dt}(r\theta) = r\dfrac{d\theta}{dt} = r\omega$
- $a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{d}{dt}(r\omega) = r\dfrac{d\omega}{dt} = r\alpha$



où x : Position tangentielle (m)
v_x : Vitesse tangentielle (m/s)
a_x : Accélération tangentielle (m/s^2)

Situation 2 : *Un disque qui tourne de plus en plus vite.* Un disque de 30 cm de rayon est initialement au repos. À partir de t = 0, il est entraîné par une courroie qui lui imprime une accélération angulaire constante de 2 rad/s^2 (l'axe de rotation du disque est au centre). On désire déterminer **(a)** la vitesse d'une particule située sur le bord du disque à t = 3 s ; **(b)** la longueur du trajet parcouru par une particule située à mi-chemin entre le centre du disque et le bord entre t = 0 et t = 3 s.

Voici les données de base :

$\omega_0 = 0$	$\theta_0 = 0$	$\alpha = 2\ \text{rad/s}^2$
$\omega = ?$	$\theta = ?$	$t = 3\ \text{s}$

Évaluer la vitesse angulaire du disque à 3 s :

$\omega = \omega_0 + \alpha\ t \quad \Rightarrow \quad \omega = (0) + (2)\ (3)$ (Remplacer valeurs num.)

$\Rightarrow \quad \boxed{\omega = 6\ \text{rad/s}}$ (Évaluer ω)

Évaluons la vitesse linéaire sur le bord du disque :

$v_x = r\omega \quad \Rightarrow \quad v_x = (0{,}3)(6)$ (Remplacer valeurs num.)

$\Rightarrow \quad \boxed{v_x = 1{,}8\ \text{m/s}}$ **(a)** (Évaluer v_x)

Évaluons l'angle de rotation parcouru durant 3 s :

$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad \Rightarrow \quad \theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ (Isoler $\theta - \theta_0$)

$\Rightarrow \quad (\Delta\theta) = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ (Remplacer $\Delta\theta = \theta - \theta_0$)

$\Rightarrow \quad \Delta\theta = (0)(3) + \frac{1}{2}(2)(3)^2$ (Remplacer valeurs num.)

$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta\theta = 9 \text{ rad}}$ (Évaluer $\Delta\theta$)

Évaluons la distance parcourue à mi-chemin du rayon total :

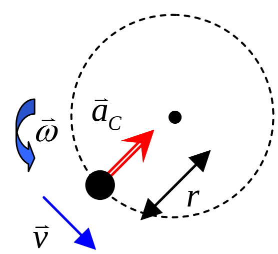
$x = r\theta \quad \Rightarrow \quad \Delta x = r\,\Delta\theta$ (Relation en Δx et $\Delta\theta$)

$\Rightarrow \quad \Delta x = (0{,}3/2)(9)$ (Remplacer, r est à mi-chemin)

$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta x = 1{,}35 \text{ m}}$ **(b)** (Évaluer Δx)

Accélération centripète en cinématique de rotation

L'accélération centripète correspond à l'accélération requise pour demeurer sur une trajectoire circulaire. En cinématique de translation, elle dépend de la vitesse et du rayon de rotation. En cinématique de rotation, elle dépend de la vitesse angulaire et du rayon de rotation selon l'expression suivante :



$$a_C = r\omega^2$$

où a_C : Accélération centripète (m/s^2)

r : Rayon de la trajectoire circulaire (m)

ω : Vitesse angulaire (rad/s)

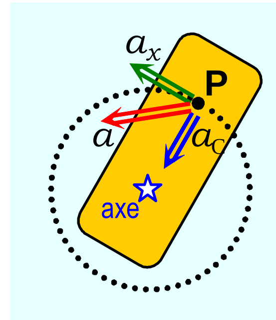
Preuve :

Évaluons l'accélération centripète en cinématique de rotation à partir de son expression en cinématique de rotation :

$a_C = \frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad a_C = \frac{(r\omega)^2}{r}$ (Remplacer $v = v_x = r\omega$)

$\Rightarrow \quad a_C = r\omega^2 \quad \blacksquare$ (Simplifier r)

Accélération tangentielle et centripète de rotation



Puisque l'accélération peut toujours être décomposée en accélération tangentielle $\vec{a}_T$ et en accélération centripète $\vec{a}_C$, le module de l'accélération respecte la règle de Pythagore étant donné que les deux composantes de l'accélération sont perpendiculaires. Nous avons ainsi la relation suivante :

$$a = r\sqrt{\omega^4 + \alpha^2}$$

où a : Module de l'accélération d'une particule **P** (m/s^2).

r : Distance entre la particule **P** et l'axe de rotation (m).

ω : Vitesse angulaire du corps rigide (rad/s).

α : Accélération angulaire du corps rigide (rad/s^2).

Preuve :

Développons l'expression du module de l'accélération à partir de nos relations pour l'accélération tangentielle $\vec{a}_T$ et accélération centripète $\vec{a}_C$:

$$\vec{a} = \vec{a}_C + \vec{a}_T \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{a_C{}^2 + a_T{}^2} \qquad \text{(car } \vec{a}_T \perp \vec{a}_C \text{)}$$

$$\Rightarrow \quad a = \sqrt{\left(r\omega^2\right)^2 + \left(r\alpha\right)^2} \qquad \text{(Remplacer } a_C = r\omega^2 \text{ et } a_x = r\alpha \text{)}$$

$$\Rightarrow \quad a = r\sqrt{\omega^4 + \alpha^2} \quad \blacksquare \qquad \text{(Simplification)}$$

La cinématique du roulement *sans glisser*

Une roue à mesure

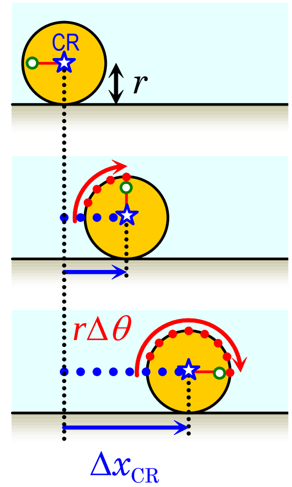
Lorsqu'une roue de rayon r roule *sans glisser*, le centre de la roue CR effectue un déplacement Δx_{CR} égale à l'arc de cercle $r\Delta\theta$ effectué par la roue durant sa rotation ce qui donne la relation suivante :

$$\Delta x_{\mathrm{CR}} = r\Delta\theta$$

Une roue à mesure est un instrument qui mesure des distances en effectuant un comptage des tours effectués par la roue durant sa rotation tout au long de son déplacement *sans glisser*. La distance parcourue d est alors le nombre de tours N multiplié par la circonférence de la roue $2\pi r$ ce qui donnera l'expression

$$d = 2\pi r N \quad .$$

Voici les relations existant entre la cinématique de translation du centre de la roue et la cinématique de rotation de la roue :

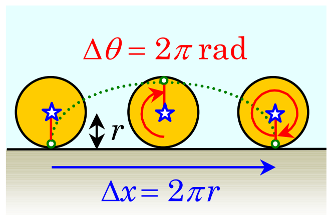


Déplacement du centre de la roue : $\Delta x_{CR} = r\Delta\theta$

Vitesse de translation du centre de la roue : $v_{CR} = r\omega$

Accélération du centre de la roue : $a_{CR} = r\alpha$

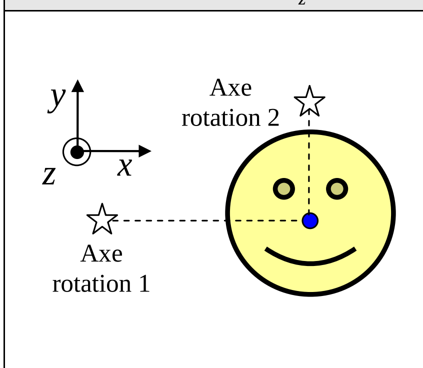
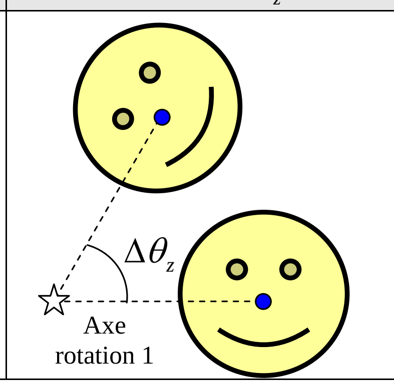
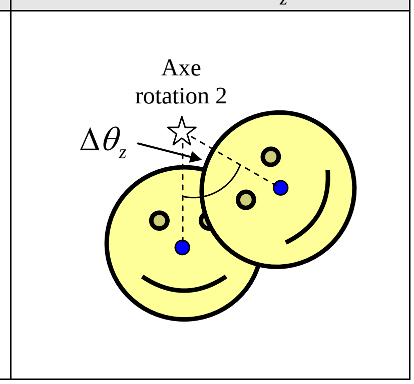
La cinématique d'un point en bordure d'une roue est beaucoup plus complexe lorsqu'on l'analyse en deux dimensions :



Position angulaire et coordonnée *xy* de l'axe de rotation selon *z*

Lorsqu'un corps effectue une rotation spin ou orbitale autour d'un axe *z*, la distance entre la position *xy* où passe l'axe de rotation et le corps en rotation n'influence pas la position angulaire θ_z, la vitesse angulaire ω_z et l'accélération angulaire α_z du corps. Les valeurs de θ_z, ω_z et α_z sont uniques au corps.

Pour se convaincre, effectuons une rotation de 60° d'un corps autour de l'axe *z* situé à deux endroits dans le plan *xy* :

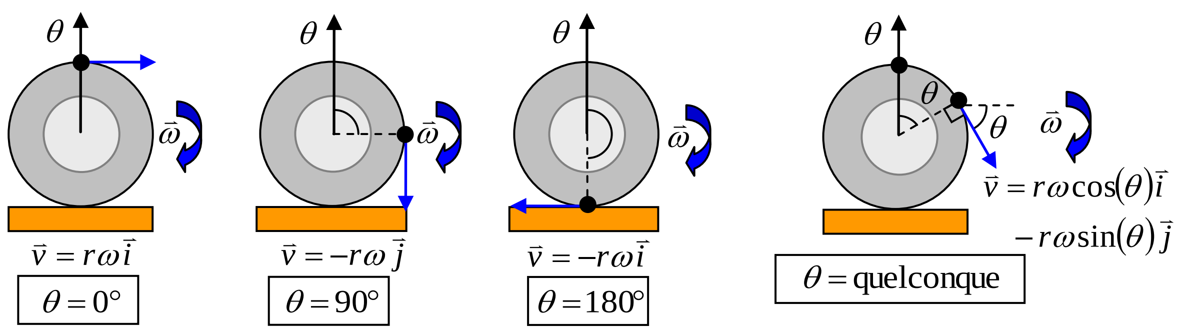
Schéma initiale : $\theta_z = 0°$	Rotation axe 1 : $\theta_z = 60°$	Rotation axe 2 : $\theta_z = 60°$
		

- ❖ Dans les deux cas, le corps a bel et bien effectué une rotation de 60° autour de l'axe de rotation *z* et le corps possède le même état de rotation qui est $\theta_z = 60°$.
- ❖ Le corps possède une position angulaire θ_z unique par rapport à un axe de rotation *z*.
- ❖ Le corps possède une vitesse angulaire ω_z unique par rapport à un axe de rotation *z*, car $\omega_z = \mathrm{d}\theta_z / \mathrm{d}t$ et θ_z est unique.
- ❖ Le corps possède une accélération angulaire α_z unique par rapport à un axe de rotation *z*, car $\alpha_z = \mathrm{d}\omega_z / \mathrm{d}t$ et ω_z est unique.

Situation A : *La vitesse d'un bout de pneu*. La roue **R** d'une voiture se déplace *sans glisser* selon l'axe x à la vitesse $v_{x\text{RS}} = v$ par rapport au sol **S**. La roue possède un rayon r et tourne à la vitesse angulaire ω. On désire évaluer l'expression de la vitesse selon l'axe x d'un bout de pneu **P** en fonction de son positionnement angulaire θ par rapport **(a)** au centre de la roue **R** et **(b)** par rapport au sol **S**.

Selon le **référentiel de la roue**, la roue est immobile et tous les bouts de pneu tournent à la même vitesse angulaire ω. Représentons graphiquement le vecteur vitesse $\vec{v}$ dans un système d'axe xy à l'aide d'un angle θ :

Avec $v = r\omega$:



(a) Voici l'expression de la vitesse d'un bout de pneu **P** selon l'axe x en fonction de l'angle θ dans le référentiel de la roue **R** :

$$v_{x\text{PR}} = r\omega\cos(\theta)$$

(b) Selon le **référentiel du sol**, la roue se déplace à vitesse $v_{x\text{RS}}$ en même temps qu'elle effectue des rotations à vitesse angulaire ω. À l'aide de l'addition des vitesses relatives en une dimension, nous pouvons évaluer la vitesse d'un bout de pneu **P** selon l'axe x à partir de la mesure effectuée dans le référentiel de la roue **R** :

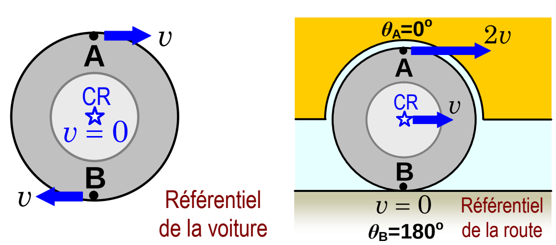
$v_{x\text{PS}} = v_{x\text{PR}} + v_{x\text{RS}} \quad \Rightarrow \quad v_{x\text{PS}} = r\omega\cos(\theta) + v_{x\text{RS}}$ (Remplacer $v_{x\text{PR}} = r\omega\cos(\theta)$)

$\Rightarrow \quad v_{x\text{PS}} = v_{x\text{RS}}\cos(\theta) + v_{x\text{RS}}$ (Roue glisse pas : $v_{\text{CR}} = r\omega$)

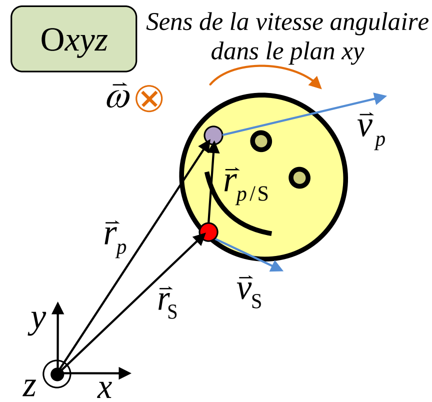
$\Rightarrow \quad v_{x\text{PS}} = v_{x\text{RS}}\left(1 + \cos(\theta)\right)$ (Factoriser $v_{x\text{RS}}$)

$\Rightarrow \quad \boxed{v_{x\text{PS}} = v\left(1 + \cos(\theta)\right)}$ (Remplacer $v_{x\text{RS}} = v$)

Avec cette équation, on réalise que le bout de pneu possède une vitesse nulle par rapport au sol lorsque l'angle est égal à 180° ce qui correspond à la position du contact au sol (voir schéma ci-contre). Ce raisonnement est valide uniquement lorsque la roue roule *sans glisser*. Le frottement qui propulse une roue *sans glisser* est alors du frottement statique.



La position et la vitesse d'une particule du corps rigide par rapport à un point de référence S



L'ensemble des N particules décrivant le corps rigide possède une position $\vec{r}_p$ et une vitesse $\vec{v}_p$ dans nos deux systèmes de coordonnée $\mathrm{O}xyz$ et $\mathrm{S}x^{(\mathrm{S})}y^{(\mathrm{S})}z^{(\mathrm{S})}$. Elles se déplacent à une vitesse $\vec{v}_\mathrm{S}^{(\mathrm{O})}$ avec le corps rigide tout en tournant autour du point $\vec{r}_\mathrm{S}$ dans $\mathrm{O}xyz$ avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}$. Cependant, elles sont immobiles selon $\mathrm{S}x^{(\mathrm{S})}y^{(\mathrm{S})}z^{(\mathrm{S})}$.

Voici l'ensemble des relations que nous pouvons établir pour définir un corps rigide ainsi que ses N particules dans le système de coordonnée $\mathrm{O}xyz$ et $\mathrm{S}x^{(\mathrm{S})}y^{(\mathrm{S})}z^{(\mathrm{S})}$

<table>
<tr><th>Description du paramètre</th><th colspan="2">Mesure par rapport au référentiel $\mathrm{O}xyz$
(toujours fixe, celui qui observe corps rigide en mouvement)</th></tr>
<tr><td>Masse totale des N particules composant le corps rigide</td><td colspan="2">$m = \sum_{p=1}^{N} m_p$</td></tr>
<tr><td>Position du corps rigide
(le point de référence)</td><td colspan="2">$\vec{r}_\mathrm{S} = \vec{r}_\mathrm{S}^{(\mathrm{O})} = \left(r_{x\mathrm{S}}, r_{y\mathrm{S}}, r_{y\mathrm{S}}\right)$</td></tr>
<tr><td>Vitesse
du corps rigide</td><td colspan="2">$\vec{v}_\mathrm{S} = \vec{v}_\mathrm{S}^{(\mathrm{O})} = \left(v_{x\mathrm{S}}, v_{y\mathrm{S}}, v_{z\mathrm{S}}\right)$</td></tr>
<tr><td>Rotation du corps rigide</td><td>Rotation strictement selon l'axe z :
θ_z</td><td>Rotation en trois dimensions :
$\hat{q} = \hat{q}^{(\mathrm{O})} = \left(q_w, q_x, q_y, q_z\right)$
(le quaternion doit être normalisé)</td></tr>
<tr><td>Vitesse angulaire
du corps rigide</td><td>Rotation strictement selon l'axe z :
ω_z</td><td>Rotation en trois dimensions :
$\vec{\omega} = \vec{\omega}^{(\mathrm{O})} = \left(\omega_x, \omega_y, \omega_z\right)$</td></tr>
<tr><td>Position d'une particule p
à partir de la position du corps rigide</td><td colspan="2">$\vec{r}_p = \vec{r}_p^{(\mathrm{O})} = \left(r_{xp}, r_{yp}, r_{zp}\right)$
et $\vec{r}_p = \vec{r}_\mathrm{S} + \vec{r}_{p/\mathrm{S}}$ avec $\vec{r}_{p/\mathrm{S}} = \vec{r}_p - \vec{r}_\mathrm{S}$
(avec la notion de quaternion, nous pouvons calculer $\vec{r}_{p/\mathrm{S}}$ d'une autre façon)</td></tr>
<tr><td>Vitesse d'une particule p à partir de la vitesse du corps rigide</td><td colspan="2">$\vec{v}_p = \vec{v}_p^{(\mathrm{O})} = \left(v_{xp}, v_{yp}, v_{zp}\right)$
et $\vec{v}_p = \vec{v}_\mathrm{S} + \vec{v}_{p/\mathrm{S}}$
(la vitesse de la particule dépend de sa position par rapport à S dans $\mathrm{O}xyz$)</td></tr>
<tr><td>La vitesse $\vec{v}_{p/\mathrm{S}}$ d'une particule p par rapport à l'axe de rotation S à partir de $\vec{r}_{p/\mathrm{S}}$ et de la vitesse angulaire $\vec{\omega}$</td><td colspan="2">$\vec{v}_{p/\mathrm{S}} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{p/\mathrm{S}}$
(vitesse purement rotative autour de S et l'orientation dépend de la position de la particule p par rapport à S)</td></tr>
</table>

Exercice

4.1.7 ***De moins en moins vite*.** Un disque tourne sur lui-même dans le sens anti-horaire à 24 rad/s. En raison du frottement, il ralentit à un taux constant. Après avoir fait 10 tours sur lui-même, il ne tourne plus qu'à 18 rad/s. **(a)** Déterminez α ? **(b)** Combien de tours supplémentaires le disque fera-t-il avant de s'arrêter?

Solution

4.1.7 ***De moins en moins vite*.**

Informations de base :

$\omega_0 = 24 \text{ rad/s}$ $\quad\theta_0 = 0 \text{ rad}$ $\quad\alpha = ?$

$\omega = 18 \text{ rad/s}$ $\quad\theta = 10 \text{ tours} \times \dfrac{2\pi \text{ rad}}{\text{tour}} = 20\pi \text{ rad}$ $\quad t = ?$

a) Avec l'une des équations du RUA :

$$\omega^2 = \omega_0{}^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \quad\Rightarrow\quad (18)^2 = (24)^2 + 2\alpha((20\pi) - (0))$$

$$\Rightarrow\quad 324 = 576 + 40\pi\alpha$$

$$\Rightarrow\quad 40\pi\alpha = -252$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\alpha = -2{,}01 \text{ rad/s}^2}$$

Informations de base :

$\omega_0 = 18 \text{ rad/s}$ $\quad\theta_0 = 0 \text{ rad}$ $\quad\alpha = -2{,}01 \text{ rad/s}^2$

$\omega = 0 \text{ rad/s}$ $\quad\theta = ?$ $\quad t = ?$

b) Avec l'une des équations du RUA :

$$\omega^2 = \omega_0{}^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \quad\Rightarrow\quad (0)^2 = (18)^2 + 2(-2{,}01)(\theta - (0))$$

$$\Rightarrow\quad -324 = -4{,}02 \;\theta$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\theta = 80{,}60 \text{ rad}}$$

Puisque chaque tour représente 2π :

$$N = 80{,}60 \text{ rad} \times \frac{1 \text{ tour}}{2\pi \text{ rad}} \quad\Rightarrow\quad \boxed{N = 12{,}83 \text{ tours}}$$