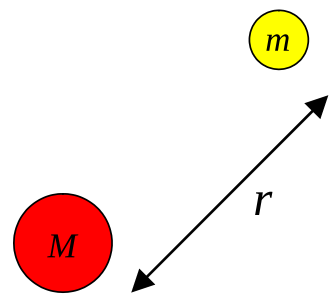
Chapitre 3.6 – L'énergie potentielle gravitationnelle des astres

Énergie potentielle gravitationnelle de deux masses

De façon générale, on peut associer une **énergie potentielle gravitationnelle** U_g à un système de deux **masses ponctuelles** ou **sphériques et homogènes** s'exerçant des forces gravitationnelles entre elles selon la distance *r* qui séparent les deux masses :

$$U_g = -\frac{GMm}{r}$$



où U_g : Énergie potentielle gravitationnelle entre *M* et *m* (J).
M : Masse qui produit le champ gravitationnel (kg).
m : Masse qui subit l'influence du champ gravitationnel (kg).
G : Constante de la gravitation universelle ($6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$).
r : Distance entre la masse *M* et *m* (m).

Convention : Lorsque $r = \infty$, $U_\infty = 0$

Remarques :

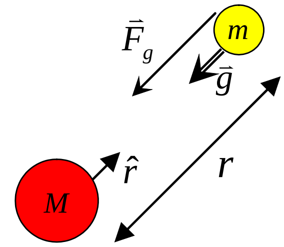
- L'énergie potentielle gravitationnelle est toujours négative ($U_g < 0$). Le **signe négatif** dans la définition de l'énergie potentielle gravitationnelle est très important, car cela signifie qu'il y a une **attraction** entre les deux masses *M* et *m*.
- L'énergie potentielle gravitationnelle ne dépend pas d'un système d'axe, mais uniquement de la distance *r* qui séparent les deux masses.
- Lorsque la distance entre les deux masses est **très petite**, **l'énergie** est **très négative**.

  (r petit $\Rightarrow$ peu d'énergie potentielle, donc U_g très négatif)
- Lorsque la distance entre les deux masses est **très grande**, **l'énergie tend** vers **zéro**.
  (r grand $\Rightarrow$ beaucoup d'énergie potentielle, donc U_g près de zéro et négatif)

Preuve :

À partir de la définition générale de la force gravitationnelle

$$\vec{F}_g = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r} \quad ,$$



évaluons le travail effectué par cette force lorsque la masse m s'éloigne de M dans la direction radiale ce qui correspond à un déplacement dans la direction de $\hat{r}$:

$W = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \quad \Rightarrow \quad W = \int_{r=r_i}^{r_f} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ (Déplacement selon de l'axe r : $\mathrm{d}\vec{s} = \mathrm{d}\vec{r}$)

$\Rightarrow \quad W = \int_{r=r_i}^{r_f} \vec{F} \cdot \mathrm{d}r\,\hat{r}$ (Remplaçons $\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}r\,\hat{r}$)

$\Rightarrow \quad W = \int_{r=r_i}^{r_f} -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r} \cdot \mathrm{d}r\,\hat{r}$ (Expression de la force : $\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\hat{r}$)

$\Rightarrow \quad W = -GMm\int_{r=r_i}^{r_f} \frac{\mathrm{d}r}{r^2}\hat{r} \cdot \hat{r}$ (Factoriser les constantes)

$\Rightarrow \quad W = -GMm\int_{r=r_i}^{r_f} \frac{\mathrm{d}r}{r^2}$ (Produit scalaire : $\hat{r} \cdot \hat{r} = 1$)

$\Rightarrow \quad W = -GMm\left[\frac{-1}{r}\right]_{r_i}^{r_f}$ (Résoudre l'intégrale : $\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}$)

$\Rightarrow \quad W = -GMm\left(\frac{-1}{(r_f)} - \frac{-1}{(r_i)}\right)$ (Évaluer l'intégrale)

$\Rightarrow \quad W = -\left(\frac{GMm}{r_i} - \frac{GMm}{r_f}\right)$ (Simplifier)

$\Rightarrow \quad W = \left(-\frac{GMm}{r_i}\right) - \left(-\frac{GMm}{r_f}\right)$ (Intégrer le signe négatif à la définition

$\Rightarrow \quad W_g = U_{gi} - U_{gf}$ (Remplacer $U_{gi} = -\frac{GMm}{r_i}$ et $U_{gf} = -\frac{GMm}{r_f}$)

Différence entre les deux équations de l'énergie potentielle gravitationnelle

Voici les deux expressions associées à l'énergie potentielle gravitationnelle U_g :

1) $U_g = mgy$ (Valide si le champ gravitationnel est constant)

2) $U_g = -\dfrac{GMm}{r}$ (Valide pour des masses sphériques ou ponctuelles)

Situation A : *La chute de la brique en deux méthodes.* On désire évaluer la variation de l'énergie potentielle gravitationnelle d'une brique de 0,4 kg qui tombe d'une hauteur de 2 m au sol à l'aide des deux expressions pour l'énergie potentielle gravitationnelle. L'expérience se fait sur la Terre ($g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$, $M_T = 5{,}98\times10^{24}\ \text{kg}$, $R_T = 6380\ \text{km}$).

Méthode 1 : Champ gravitationnel constant

- $U_{gi} = mgy_i = (0{,}4)(9{,}8)(2) \quad\Rightarrow\quad \boxed{U_{gi} = 7{,}84\ \text{J}}$
- $U_{gf} = mgy_f = (0{,}4)(9{,}8)(0) \quad\Rightarrow\quad \boxed{U_{gf} = 0\ \text{J}}$
- $\Delta U_g = U_{gf} - U_{gi} = (0) - (7{,}84) \quad\Rightarrow\quad \boxed{\Delta U_g = -7{,}84\ \text{J}}$

Méthode 2 : Équation générale (9 chiffres significatifs)

- $U_{gi} = -\dfrac{GMm}{r_i} = -\dfrac{(6{,}67\times10^{-11})(5{,}98\times10^{24})(0{,}4)}{6380002} \quad\Rightarrow\quad \boxed{U_{gi} = -25007264{,}89\ \text{J}}$
- $U_{gf} = -\dfrac{GMm}{r_f} = -\dfrac{(6{,}67\times10^{-11})(5{,}98\times10^{24})(0{,}4)}{6380000} \quad\Rightarrow\quad \boxed{U_{gf} = -25007272{,}73\ \text{J}}$
- $\Delta U_g = U_{gf} - U_{gi} = (-25007272{,}73) - (-25007264{,}89) \Rightarrow \boxed{\Delta U_g = -7{,}84\ \text{J}}$

Conclusion :

Lorsqu'il y a un petit déplacement dans un champ gravitationnel relativement constant, l'expression $U_g = mgy$ est assez précise et donc valide.

Énergie totale d'un système et type de trajectoire

L'énergie totale E d'un système est égale à l'addition de l'énergie cinétique totale K avec l'énergie potentielle totale U :


Le système Terre-Lune possède une énergie totale négative.

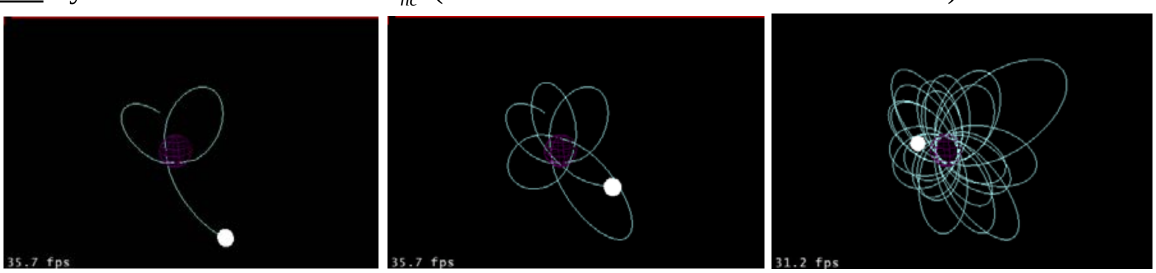
$$E = K + U$$

où E : Énergie totale du système (J)
K : Énergie cinétique totale du système (J)
U : Énergie potentielle totale du système (J)

Dans un système à deux corps massifs, **l'énergie potentielle gravitationnelle** des deux masses M et m est **toujours négative**. Il y a donc trois scénarios possibles pour le bilan de l'énergie qui produisent des trajectoires différentes :

Bilan de l'énergie	**Comparaison *K* et *U***	**Type de trajectoire**	**Exemple**
$E < 0$	$\lvert K \rvert < \lvert U \rvert$	Fermée	Système Terre-Lune
$E = 0$	$\lvert K \rvert = \lvert U \rvert$	Ouverte à l'infini	Vitesse de libération[1]
$E > 0$	$\lvert K \rvert > \lvert U \rvert$	Ouverte	Comète qui ne repassera pas près de la Terre

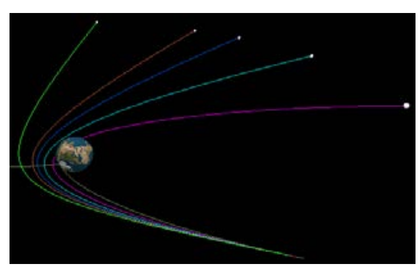
Exemple : Système où $E < 0$ avec W_{nc} (*M* est immobile et *m* est en mouvement)



Pour quitter la liaison, la masse *m* doit acquérir une énergie externe afin que le système puisse satisfaire $E \geq 0$. Un moteur pourrait jouer ce rôle permettant au système d'augmenter son énergie totale via un travail non-conservatif W_{nc}. C'est grâce à cette technique que l'on peut envoyer des satellites dans l'espace.

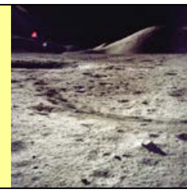
Exemple : système où $E > 0$ (*M* est immobile et *m* est en mouvement)

La masse *m* possède une vitesse non nulle à une très grande distance de la masse *M* et elle sera déviée lorsqu'elle passera près de la masse *M* attractive. L'objet n'est pas en orbite.



[1] La vitesse de libération sera présentée dans la situation 2.

Situation 2 : *La vitesse de libération sur la Lune.* De la surface de la Lune, on lance une balle vers le haut. On désire déterminer le module de la vitesse minimale qu'elle doit posséder pour ne jamais retomber. La Lune a une masse de $7{,}35\times10^{22}$ kg et un rayon de 1738 km.



Donnée de base :

<u>Initiale :</u> $r_i = r_{Lune}$ $\quad U_{gi} = -G\dfrac{mM}{r_i}$ $\quad$ et $\quad K_i = \dfrac{1}{2}mv_i^{\,2}$

<u>Finale :</u> $r_f = \infty$ $\quad U_{gf} = 0$ $\quad$ et $\quad K_f = 0$ car $v_\infty = 0$

Appliquons la conservation de l'énergie : ($W_{nc} = 0\ \text{J}$)

$$U_{gf} + K_f = U_{gi} + K_i + W_{nc} \quad \Rightarrow \quad 0 = -G\frac{mM}{r_i} + \frac{1}{2}mv_i^{\,2}$$ (Remplacer termes)

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_i^{\,2} = G\frac{mM}{r_i}$$ (Isoler énergie cinétique)

$$\Rightarrow \quad v_i^{\,2} = 2G\frac{M}{r_i}$$ (Isoler $v_i^{\,2}$)

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_i = \sqrt{2G\frac{M}{r_i}}}$$ (Vitesse de libération)

$$\Rightarrow \quad v_i = \sqrt{2\left(6{,}67\times10^{-11}\right)\frac{\left(7{,}35\times10^{22}\right)}{\left(1{,}738\times10^{6}\right)}}$$ (Remplacer valeurs num.)

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_i = 2{,}38\times10^{3}\,\text{m/s}}$$ (Évaluer $v_i = 2{,}38\ \text{km/s}$)

Vitesse de libération

La vitesse de libération v_{lib} correspond à la vitesse initiale minimale que doit avoir un objet situé à une distance r d'un corps très massif de masse M (comme la Terre ou le Soleil) afin de pouvoir s'en éloigner jusqu'à une distance infinie ($v_\infty = 0$) :

$$v_{\text{lib}} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

Fusée en décollage

Sur Terre, cette vitesse est égale à **11,2 km/s**. À cette vitesse, le frottement de l'air est très important. C'est pour cette raison qu'on ne peut pas uniquement lancer de la Terre un objet ayant comme destination l'espace. Il faut le propulser graduellement (voir image ci-contre).

- Libération du Soleil depuis la Terre : ≈ 42,1 km/s
- Libération de la Lune depuis la Lune : ≈ 2,4 km/s
- Libération de la voie lactée depuis notre système solaire : ≈ 1000 km/s